Pótló zárthelyi dolgozat, 2019. november 28.
Javítási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Artimetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Legyen Y olyan valószínűségi változó, aminek sűrűségfüggvénye valamilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \frac{\alpha}{(1+x)^2} & \text{ha } -5 < x < -2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg a $\mathbb{P}(-4 < Y < -3)$ valószínűséget.

(3 pont) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

(3 pont) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-5}^{-2} \frac{\alpha}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

(3 pont) $= \int_{-5}^{-2} \alpha(1+x)^{-2}\,dx = \alpha\left[\frac{(1+x)^{-1}}{-1}\right]_{-5}^{-2} = -\alpha\left(\frac{1}{1-2} - \frac{1}{1-5}\right) = \frac{3}{4}\alpha$

(2 pont) $\alpha = \frac{4}{3}$

(0 pont) Y folytonos valószínűségi változó, ezért

(3 pont) $\mathbb{P}(-4 < Y < -3) = \int_{-4}^{-3} f(x)\,dx$ (Elírással nem fogadható el; kivétel, ha határokként a és b szerepel -4 és -3 helyett.)

(3 pont) $= \int_{-4}^{-3} \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$. Ha nincs meghatározva az α, de ez a lépés helyes, akkor is jár a pont.

(3 pont) $= \left[\frac{4}{3}\frac{(1+x)^{-1}}{-1}\right]_{-4}^{-3} = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{1-3} - \frac{1}{1-4}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{9}}}$ (α-val paraméteresen felírva: 1 pont.)

Ha egy lépés helyesen szerepel, de a megoldást nem mozdítja előre, akkor a vonatkozó 3 pontból legfeljebb 2 adható, ha pedig egy rossz koncepció részeként, akkor legfeljebb 1.

2. Egy gyöngyhalász egy nap átlagosan 1 igazgyöngyöt talál. Tegyük fel, hogy az egyes sikeres gyöngytalálatok egymástól független, azonos, de egyenként kis valószínűségű események. Néha a gyöngyhalászt a hazaúton kirabolják a kalózok, és elveszik az összes nála lévő gyöngyöt. Ha a halásznál épp k db gyöngy van (ahol $k > 0$), akkor $(0{,}5)^k\sqrt{e}$ eséllyel nem rabolják ki. Határozzuk meg a halász által egy nap hazavitt gyöngyök számának eloszlását.

(2 pont) X a talált gyöngyök száma; Y azon gyöngyök száma, amikkel haza is ér; $A = \{\text{nem rabolják ki}\}$
(3 pont) $X \sim \text{Pois}(\lambda)$
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = 1 \Rightarrow \lambda = 1$
(2 pont) Ha $k > 0$, akkor $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(\{X = k\} \cap A)$
(2 pont) A szorzási szabály miatt
(3 pont) $= \mathbb{P}(A \mid X = k) \cdot \mathbb{P}(X = k)$
Ha szorzási szabály helyett a teljes valószínűség érték tételére hivatkozunk, akkor abban az esetben jár a pont, ha helyesen használjuk a tételt. Ha ehelyett a feltételes valószínűség definícióját bontjuk ki, szintén jár a pont.
(2 pont) $\mathbb{P}(A \mid X = k) = (0{,}5)^k \sqrt{e}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k!} e^{-1}$
(2 pont) $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{(0{,}5)^k}{k!} e^{-0{,}5}$, $\forall k > 0$ esetén. Ha felismerjük, hogy $Y \sim \text{Pois}(0{,}5)$, szintén jár a pont.
(3 pont) $\mathbb{P}(Y = 0) = e^{-0{,}5}$, mert $\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(0{,}5)^k}{k!} e^{-0{,}5} = \frac{0^0}{0!} e^{-0{,}5}$.
Ha felismertük a $k > 0$ tagokból a Poisson-eloszlást, és megjegyezzük, hogy a $k > 0$ tagok meghatározzák az eloszlást, így speciálisan a $\mathbb{P}(Y = 0)$ értéket is, akkor szintén jár a pont (anélkül is, hogy szerepelne a $\mathbb{P}(Y = 0) = e^{-0{,}5}$ érték). Ha teljes valószínűség tételével indoklunk, a $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \overline{A})$ kiszámolásával, akkor is jár a pont. (Ha csak rájövünk, hogy a $k = 0$ eset külön figyelmet érdemel, de nem tudjuk belátni, hogy az eredmény $e^{-0{,}5}$, akkor 1 pont.)

3. Három együttes ad koncertet a hétvégén (külön-külön): az Ajtók, a Bogarak és a Csilipaprikák. Tegyük fel, hogy az egyes koncerten eljátszott számok mennyisége geometriai eloszlású, 1/10 paraméterrel. Jelölje sorrendben A, B illetve C azon eseményeket, hogy az első, második, illetve harmadik koncerten legfeljebb 10 számot játszanak el. Tudjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 0{,}4 \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0{,}2.$$

a) Mekkora az esélye, hogy az első koncerten legfeljebb 10 számot játszanak el?
b) Mekkora az esélye, hogy van olyan koncert, ahol legfeljebb 10 számot játszanak el?

(1 pont) Jelölje X, Y és Z az eljátszott számok mennyiségét. $X, Y, Z \sim \text{Geo}(\frac{1}{10})$.
(2 pont) $A = \{X \leq 10\}$, $B = \{Y \leq 10\}$, $C = \{Z \leq 10\}$.
(4 pont) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \leq 10) = \sum_{k=0}^{9} \left(1 - \frac{1}{10}\right)^k \frac{1}{10}$
(3 pont) $= \frac{1}{10} \cdot \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{10}}{1 - \left(1 - \frac{1}{10}\right)}$
Komplementer-módszerrel számolva: $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(X > 10) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$, amire szintén jár a pont.
(2 pont) $= 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx \underline{\underline{0{,}6513}}$
(2 pont) Szita/Poincaré-formula alapján:
(4 pont) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
(2 pont) $= 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}\right) - 3 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \approx \underline{\underline{0{,}9540}}$

4. Felfogadtunk egy kivitelezőt egy felújításhoz, aki a munkát csak később, $\text{Exp}(\lambda)$ eloszlású idő múlva tudja elkezdeni. Maga a munka legalább 4, legfeljebb λ időegységig tart ($\lambda \geq 4$), de nem tudjuk pontosan meddig: a fenti két határ között bármilyen időtartam előfordulhat, egyenletes eloszlással. Mennyi λ értéke, ha várhatóan 10 időegység alatt készülünk el, a kezdeti várakozást is beleszámolva?

(1 pont) X : kezdésig eltelő idő, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$
(1 pont) Y : munka időtartama, $Y \sim \text{U}(4; \lambda)$ (Ha kiderül a várható érték kiszámolásából, hogy az eloszlás fel lett ismerve, szintén jár a pont.)
(4 pont) $\mathbb{E}(X + Y) = 10$
(4 pont) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
(2 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
(2 pont) $\mathbb{E}(Y) = \frac{4+\lambda}{2}$
(2 pont) $\frac{1}{\lambda} + \frac{4+\lambda}{2} = 10$
(2 pont) $\lambda^2 - 16\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{248}}{2}$
(2 pont) $\lambda \geq 4$, ezért $\lambda \approx \underline{\underline{15{,}87}}$

5. Legyen $X \sim B(4,p)$ és $Y \sim B(2,q)$ független valószínűségi változók valamilyen $0 < p,q < \frac{1}{2}$ paraméterekkel. Tudjuk, hogy $\mathbb{P}(X=4, Y=0) = \frac{1}{2025}$ és $\mathbb{P}(Y=1) = \frac{8}{25}$.
a) Írjuk fel X és Y együttes eloszlását.
b) Mekkora a valószínűsége az $\{X+Y$ páros és $0 < X < 4\}$ eseménynek?

(1 pont) $\mathrm{Ran}(X) = \{0,1,2,3,4\}$, $\mathrm{Ran}(Y) = \{0,1,2\}$, így egy 3×5 táblázatra lesz szükség.
(2 pont) $\mathbb{P}(Y=1) = \binom{2}{1} q^1 (1-q)^1 = 2q - 2q^2 = \frac{8}{25}$, ezért $q_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{10}$
(1 pont) $0 < q < \frac{1}{2}$, ezért $q = \frac{1}{5}$
(3 pont) X és Y független $\Rightarrow \mathbb{P}(X=4, Y=0) = \mathbb{P}(X=4)\,\mathbb{P}(Y=0)$
(Ha nem hivatkozunk a függetlenségre, akkor 1 pont.)
(2 pont) $= \binom{4}{4} p^4 (1-p)^0 \cdot \binom{2}{0} \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} p^4 = \frac{1}{2025} \Rightarrow p^4 = \frac{1}{1296}$
(1 pont) $0 < p < \frac{1}{2}$, ezért $p = \frac{1}{6}$
(3 pont) $X \sim B(4, \frac{1}{6})$ és $Y \sim B(2, \frac{1}{5})$ együttes eloszlása:
$$\mathbb{P}(X=k, Y=l) = \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=l) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k} \cdot \binom{2}{l} \left(\frac{1}{5}\right)^l \left(\frac{4}{5}\right)^{2-l} \quad (0 \le k \le 4,\ 0 \le l \le 2)$$
Ha a formula helyett az alábbi táblázat szerepel teljesel kitöltve, szintén jár a teljes pont.

(2 pont) Ha az együttes eloszlásra (előző sor) teljes pontszám lett adva, akkor az alábbi táblázatból csak a *b*) ponthoz használt négy érték szükséges az ide tartozó 2 pont megadásához. Ha nem táblázatos formában van megadva, de ki van számolva a négy, megoldáshoz szükséges érték, szintén jár a pont. Számolási hibánként 1-1 pont levonás.

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4
0	25/81	20/81	2/27	4/405	1/2025
1	25/162	10/81	1/27	2/405	1/4050
2	25/1296	5/324	1/216	1/1620	1/32400

(2 pont) $\mathbb{P}(\{X+Y$ páros és $0 < X < 4\}) =$
$\mathbb{P}(\{X=1, Y=1\} \cup \{X=2, Y=0\} \cup \{X=2, Y=2\} \cup \{X=3, Y=1\})$
(2 pont) $= \mathbb{P}(X=1, Y=1) + \mathbb{P}(X=2, Y=0) + \mathbb{P}(X=2, Y=2) + \mathbb{P}(X=3, Y=1)$, mert kizáróak.
(Ha nem hivatkozunk a kizáróságra, akkor 1 pont.)
(1 pont) $= 10/81 + 2/27 + 1/216 + 2/405 = 671/3240 \approx \underline{\underline{0{,}2071}}$

6. Egy 6 csúcsú teljes gráf csúcsainak kijelöljük egy részhalmazát úgy, hogy az egyes csúcsok egymástól függetlenül, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel kerülnek a kijelölt részhalmazba. Azt mondjuk, hogy egy él érintetlen, ha egyik végpontja sem eleme a kijelölt részhalmaznak. Mi az érintetlen élek számának várható értéke?

A megoldás:

(2 pont) Jelölje a gráfot G. Ekkor $|E(G)| = \binom{6}{2} = 15$.
(4 pont) Számozzuk meg 1-től 15-ig G éleit. Legyen $X_i = 1$, ha az i-edik él érintetlen, és 0 egyébként.
(4 pont) A kérdés átfogalmazva $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{15} X_i)$.
(4 pont) A várható érték additivitása miatt: $= \sum_{i=1}^{15} \mathbb{E}(X_i)$.
(2 pont) X_i pontosan akkor 1, ha mindkét végpont kijelölt, ezért
(2 pont) $\mathbb{E}(X_i) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$
(2 pont) Tehát $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{15} X_i) = 15 \cdot \frac{9}{16} = 8{,}4375 \approx \underline{\underline{8{,}438}}$

B megoldás:

(2 pont) Jelölje Y a nem kijelölt csúcsok számát.
(2 pont) $Y \sim B\left(6, \frac{3}{4}\right)$
(3 pont) Ha k csúcs nincs kijelölve, akkor az érintetlen élek száma $\frac{k(k-1)}{2}$.
(4 pont) A keresett várható érték $\mathbb{E}\left(\frac{Y(Y-1)}{2}\right)$.
(2 pont) A transzformált valószínűségi változó értékére vonatkozó állítás miatt
(4 pont) $\mathbb{E}\left(\frac{Y(Y-1)}{2}\right) = \sum_{k=0}^{6} \frac{k(k-1)}{2} \cdot \binom{6}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{6-k}$
(3 pont) $= 0 + 0 + \frac{135}{2^{12}} + \frac{1620}{2^{12}} + \frac{7290}{2^{12}} + \frac{14580}{2^{12}} + \frac{10935}{2^{12}} = \frac{135}{16} \approx \underline{\underline{8{,}438}}$