Pótló zárthelyi dolgozat

1. Legyen Y olyan valószínűségi változó, aminek sűrűségfüggvénye valamilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \frac{\alpha}{(1+x)^2} & \text{ha } -5 < x < -2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg a $\mathbb{P}(-4 < Y < -3)$ valószínűséget.

2. Egy gyöngyhalász egy nap átlagosan 1 igazgyöngyöt talál. Tegyük fel, hogy az egyes sikeres gyöngytalálatok egymástól független, azonos, de egyenként kis valószínűségű események. Néha a gyöngyhalászt a hazaúton kirabolják a kalózok, és elveszik az összes nála lévő gyöngyöt. Ha a halásznál épp k db gyöngy van (ahol $k > 0$), akkor $(0{,}5)^k\sqrt{e}$ eséllyel nem rabolják ki. Határozzuk meg a halász által egy nap hazavitt gyöngyök számának eloszlását.

3. Három együttes ad koncertet a hétvégén (külön-külön): az Ajtók, a Bogarak és a Csilipaprikák. Tegyük fel, hogy az egyes koncerten eljátszott számok mennyisége geometriai eloszlású, $1/10$ paraméterrel. Jelölje sorrendben A, B illetve C azon eseményeket, hogy az első, második, illetve harmadik koncerten legfeljebb 10 számot játszanak el. Tudjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 0{,}4 \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0{,}2.$$

a) Mekkora az esélye, hogy az első koncerten legfeljebb 10 számot játszanak el?
b) Mekkora az esélye, hogy van olyan koncert, ahol legfeljebb 10 számot játszanak el?

4. Felfogadtunk egy kivitelezőt egy felújításhoz, aki a munkát csak később, $\text{Exp}(\lambda)$ eloszlású idő múlva tudja elkezdeni. Maga a munka legalább 4, legfeljebb λ időegységig tart ($\lambda \geq 4$), de nem tudjuk pontosan meddig: a fenti két határ között bármilyen időtartam előfordulhat, egyenletes eloszlással. Mennyi λ értéke, ha várhatóan 10 időegység alatt készülünk el, a kezdeti várakozást is beleszámolva?

5. Legyen $X \sim B(4, p)$ és $Y \sim B(2, q)$ független valószínűségi változók valamilyen $0 < p, q < \frac{1}{2}$ paraméterekkel. Tudjuk, hogy $\mathbb{P}(X = 4, Y = 0) = \frac{1}{2025}$ és $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{8}{25}$.
a) Írjuk fel X és Y együttes eloszlását.
b) Mekkora a valószínűsége az $\{X + Y$ páros és $0 < X < 4\}$ eseménynek?

6. Egy 6 csúcsú teljes gráf csúcsainak kijelöljük egy részhalmazát úgy, hogy az egyes csúcsok egymástól függetlenül, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel kerülnek a kijelölt részhalmazba. Azt mondjuk, hogy egy él érintetlen, ha egyik végpontja sem eleme a kijelölt részhalmaznak. Mi az érintetlen élek számának várható értéke?

Eloszlás neve	Jelölés	Ran(X)	$\mathbb{P}(X = k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
Indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0, 1\}$	$p,\ 1-p$		p	$p(1-p)$
Binomiális	$\mathrm{B}(n; p)$	$\{0, 1, ..., n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0, 1, ...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$		λ	λ
Geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1, 2, ...\}$	$(1-p)^{k-1}p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Egyenletes	$\mathrm{U}(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1 - e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Tudnivalók: A vizsga időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.