9. Gyakorlat

Normális eloszlás, Centrális határeloszlás-tétel, Csebisev-egyenlőtlenség

1. Tegyük fel, hogy egy berendezés élettartama normális eloszlású 6,3 év várható értékkel és 2 év szórással.
   a) Ha 8 év a garancia, mekkora eséllyel tapasztalunk meghibásodást a garanciális idő lejárta előtt?
   b) Hány év garanciát adjunk, hogy 0,95 legyen a valószínűsége, hogy a berendezés csak a garanciális idő után hibásodik meg?

2. Egy gép a beállítása szerint 2 kg lisztet adagol a zacskókba, de a technológia következtében a zacskóba került liszt mennyisége $N(m; 0{,}002^2)$ eloszlást követ. Előzetes megfigyelésekből lehet tudni, hogy 0,01 annak a valószínűsége, hogy a zacskóban a liszt mennyisége kevesebb 2 kg-nál. Mennyi m?

3. Egy normális eloszlású valószínűségi változó 0,2 valószínűséggel vesz fel 10-nél kisebb értéket és 0,3 valószínűséggel 14-nél nagyobb értéket. Mik az eloszlás paraméterei?

4. Texasban a hőmérsékletet Fahrenheit fokokban mérik. Megállapították, hogy az ottani hőmérséklet eloszlása nyaranta $N(86; 16)$. Hogyan változik meg az eloszlás, ha áttérünk Celsius-skálára? $\left(\frac{5}{9}(X-32)\ [^oF] = Y\ [^oC]\right)$

5. Legyen $X \sim N(m; \sigma^2)$ és $Z = \left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2$. Számoljuk ki Z sűrűségfüggvényét.

---

6. Béla elég válogatós filmek tekintetében: 10 filmből átlagosan egyet tart jónak. Mi a valószínűsége, hogy 300 film megnézése esetén, több mint 42 neki tetszőt talál?

7. Egy BME-VIK évfolyamon 500 diák hallgat egy tárgyat. A vizsgadolgozat előtt konzultációt szerveznek. Előzetes felmérések szerint a hallgatók külön-külön, egymástól függetlenül 0,25 valószínűséggel jönnek el a konzultációra. Hány fős terem kell ahhoz, hogy a konzultációra érkező hallgatók 90%-os biztonsággal mind elférjenek a teremben?

8. Adottak az $X_1, X_2, \ldots, X_{12} \sim U(0; 1)$ (együttesen) független véletlen számok. Ezek segítségével állítsunk elő közelítőleg $N(5; 4)$ normális eloszlású véletlen számot.

9. Egy részfeladat elkészítéséhez szükséges idő mennyisége $U(1; 3)$ eloszlású, ahol az egyes részfeladatokhoz szükséges idők mennyiségei (együttesen) függetlenek. A részfeladatokat egymás után végezzük. Ezer részfeladat esetén mi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 1984 időegység alatt elkészülünk?

10. Legyenek $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ (együttesen) független valószínűségi változók, ahol λ rögzített pozitív valós szám. Adjunk közelítést λ értékére, ha tudjuk, hogy $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i > \frac{n}{\lambda} + \frac{\sqrt{n}}{3}) = 0{,}1587$.

---

11. Legyen $X \sim N(0; 9)$.
    a) A Markov-egyenlőtlenség szerint $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a} = 0$ minden pozitív a-ra, vagyis X nulla valószínűséggel vesz fel pozitív értéket. Ez nyilván nem lehet igaz, hol a hiba?
    b) Becsüljük meg a $\mathbb{P}(|X| > 4)$ valószínűséget a Markov-egyenlőtlenség felhasználásával.

12. Legyen $X \sim N(1; 1)$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{P}\left((X-1)^2 \geq 5\right) \leq 0{,}2$.

13. Egy pályaudvaron az újságárus X lapot ad el óránként, ahol $X \sim \mathrm{Pois}(64)$. A Csebisev-egyenlőtlenség segítségével becsüljük alulról a $\mathbb{P}(46 < X < 80)$ valószínűséget.

14. Tíz szabályos dobókockával dobunk, legyen X a dobott számok összege. Becsüljük Csebisev-egyenlőtlenséggel is és CHT-vel is a $\mathbb{P}(24 < X < 46)$ és a $\mathbb{P}(31 \leq X \leq 37)$ valószínűségeket.

IMSc 8. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ (együttesen) független $U(0; 1)$ eloszlású valószínűségi változók. Mihez konvergál eloszlásban az $(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n \cdot e^n)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ valószínűségi változó?