

8. Gyakorlat  
Együttes sűrűségfüggvény, Konvolúció

1. Legyenek  $X \sim U(0; 3)$  és  $Y \sim U(-1; 4)$  független valószínűségi változók.
  - a)  $\mathbb{P}(X < Y) = ?$
  - b)  $\mathbb{P}(X + Y = 1) = ?$
  - c)  $\mathbb{P}(XY < 1) = ?$
2. Legyenek  $X, Y \sim U(0; 1)$  függetlenek,  $Z = 2X + 1$ ,  $V = 3Y$ .  $\mathbb{P}(V < Z) = ?$
3. Legyen  $X$  és  $Y$  együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 2(x^3 + y^3) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- a)  $P(X + Y < 1) = ?$
  - b)  $P(X^2 < Y) = ?$
  - c) Adjuk meg  $X$  és  $Y$  perem-sűrűségfüggvényét.
  - d)  $\mathbb{E}(X) = ?$
  - e) Független-e  $X$  és  $Y$ ?
4. Az  $(X, Y)$  folytonos valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye

$$F_{X,Y} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^3+x}{2} & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } |y| < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mennyi a valószínűsége, hogy az  $(X, Y)$  pár az  $A(0, 0)$ ,  $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$  csúcspontok által meghatározott háromszög belsejébe esik?

5. Legyen  $X$  és  $Y$  együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (u, v) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{v}} & \text{ha } 0 < u < 1 \text{ és } 0 < v < u^2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Adjuk meg  $X$  és  $Y$  sűrűségfüggvényét és várható értékét. Független-e  $X$  és  $Y$ ?

6. Legyenek  $X, Y \sim \text{Exp}(1)$  függetlenek. Adjuk meg  $Q = \min(X, Y)$  és  $R = \max(X, Y)$  eloszlását és várható értékét. Független-e  $Q$  és  $R$ ?

7. Legyenek  $X, Y \sim \text{Geo}(p)$  függetlenek.  $\mathbb{P}(X = Y) = ?$  Mennyi  $\mathbb{P}(X + Y = k)$ ,  $k \geq 2$  esetén?
8. Legyen  $X \sim B(m, p)$  és  $Y \sim B(n, p)$  függetlenek, ahol  $m, n \in \mathbb{N}$  és  $0 < p < 1$ . Milyen eloszlású  $X + Y$ ?
9. Legyenek  $X$  és  $Y$  független valószínűségi változók, amire  $Y \sim U(0; 1)$  és

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{ha } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Számoljuk ki  $X + Y$  sűrűségfüggvényét.

10. Legyenek  $X, Y \sim U(0; 1)$  függetlenek, és legyen
  - a)  $Z = X + Y$
  - b)  $Z = X - Y$
  - c)  $Z = 3X - 2Y$
 Számoljuk ki  $Z$  sűrűség- és eloszlásfüggvényét.

11. Legyenek  $X, Y \sim \text{Exp}(\lambda)$  függetlenek, és  $Z = |X - Y|$ . Határozzuk meg  $Z$  sűrűségfüggvényét.

IMSc 7. Legyenek  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  független,  $\text{Exp}(1)$  eloszlású valószínűségi változók. Legyen  $Y$  mindig az öt érték közül a középen lévő (azaz a harmadik legnagyobb), akármelyikük is az. Mennyi  $\mathbb{E}(Y)$ ?