

6. Gyakorlat

Diszkrét változók függetlensége, Korrelációja, Szórása

1. Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Jelölje X a hatosok, Y pedig a páros eredmények számát. Független-e X és Y ?
2. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat.

	X			
Y				

a) $p = ?$ b) $\mathbb{P}(X \leq 0, Y = 1) = ?$ c) Független-e X és Y ? d) $\mathbb{E}(XY) = ?$

3. Egy dobozban 6 golyó van, 2 fehér, 2 zöld és 2 piros. Egyesével addig húzunk visszatevés nélkül a dobozból, amíg piros golyót nem kapunk. Jelölje X a kihúzott golyók számát, Y pedig a kihúzott fehér színű golyók számát. Adjuk meg az együttes eloszlásuk táblázatát. Független-e X és Y ?
4. Legyenek $X, Y \sim \text{Geo}(\frac{2}{3})$ függetlenek. Határozzuk meg az alábbi mennyiségeket:
a) $\mathbb{E}(XY)$ b) $\mathbb{P}(X = 2 | Y = 5)$ c*) $\mathbb{P}(X = Y)$.

5. Egy kalapban egy-egy cédulára fel vannak írva az 1, 2, 3 számjegyek. Egymás után, visszatevés nélkül kivesszünk két cédulát. Legyen X az első, Y a második húzás eredménye.
a) $\text{cov}(X, Y) = ?$ b) $\text{cov}(X, X) = ?$ c) $\text{cov}(Y, Y) = ?$ d) $\text{corr}(X, Y) = ?$ e) Független-e X és Y ?
6. Legyen X olyan valószínűségi változó, amire $\mathbb{E}(X) = 2$, $\mathbb{E}(X^2) = 5$ és $\mathbb{E}(X^3) = 14$. Számítsuk ki a $\text{corr}(X, X^2 - 4X)$ -et. Független-e $X - 2$ és $(X - 2)^2$?
7. Két kockával dobunk, X az egyesek száma, Y a másodiknak dobott szám. Adjuk meg X és Y
a) kovarianciáját b) korrelációját.
8. Bizonyítsuk be, hogy ha X és Y azonos szórású valószínűségi változók, akkor $X + Y$ és $X - Y$ korrelálatlanok.

9. Legyen X Poisson-eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel, és $Y = 2X + 1$. Adjuk meg Y szórásnégyzetét (más néven varianciáját).
10. Legyen $X \sim \text{Geo}(\frac{1}{3})$. Adjuk meg az $\mathbb{E}((3 - X)^2)$ és a $\mathbb{D}(5 - 2X)$ mennyiségeket.
11. Ha tudjuk, hogy $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, akkor mennyi $\mathbb{E}((2 + X)^2)$ és $\mathbb{D}^2(4 + 3X)$?
12. Szabályos érmével dobunk, amíg egymás után két egyformát nem kapunk. Mennyi a dobások számának szórása?
13. Egy üzemben gyártott harisnyák között átlagosan minden ezredik selejtes. A harisnyákat kétszázassával dobozolják. 1000 dobozt véletlenszerűen kiválasztva, jelölje X az egyetlen selejtest sem tartalmazó dobozok számát. $\mathbb{E}(X) = ?$, $\mathbb{D}^2(X) = ?$
14. Legyen $X \sim B(3; 0,25)$, $Y = X^3$, $Z = X^2 + 1$. Mi Y és Z eloszlása, mennyi a várható értékük és a szórásuk?

IMSc 6. Egy gyümölcsfa termésében a kártevők száma $\text{Pois}(10)$ eloszlású valószínűségi változó. A rovarirtó-szeres kezelés az egyes kártevőket egymástól függetlenül 0,75 valószínűséggel pusztítja el. Határozzuk meg a fán a kezelés után lévő kártevők számának szórását.