5. Gyakorlat
Exponenciális, Geometriai és Poisson-eloszlás

1. Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, amiről tudjuk, hogy $\mathbb{P}(X > 3) = e^{-6}$.

   (a) Mi X eloszlásának paramétere (λ)? (b) $\mathbb{P}(X < 2) =$? (c) $\mathbb{E}(X) =$?

2. Tegyük fel, hogy egy adott mosógéptípus átlagosan 2 évig bírja az első meghibásodásig. Mi a valószínűsége, hogy az első 3 év során nem hibásodik meg, ha tudjuk, hogy az első 2 évben hibátlanul működött?

3. Hullócsillagra várva kémleljük az eget egy kora augusztusi éjszaka. Tudjuk, hogy annak az esélye, hogy az első 20 percben látunk hullócsillagot $1 - e^{-\frac{2}{3}}$. Mekkora eséllyel látunk hullócsillagot az első órában?

4. Legyen $X \sim \mathrm{Exp}\,(\lambda)$ és $Y = X^2$. Adjuk meg Y sűrűségfüggvényét.

---

5. Válasszunk egymástól függetlenül, véletlenszerűen pontokat az egységintervallumban. Addig folytatjuk a pontok választását, amíg valamelyik az intervallum középső harmadába nem esik. Jelölje X a kiválasztott pontok számát. Mekkora a $\mathbb{P}\,(X < 5)$ valószínűség?

6. Egy érmével addig dobunk, amíg először fordul elő, hogy két egymás utáni dobás értéke azonos. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

7. A $[-1; 1] \times [-1; 1]$ négyzeten egymás után (egymástól függetlenül, egyenletesen) véletlenszerűen pontokat választunk. Akkor állunk meg, amikor az első kisorsolt pont beleesik az origó középpontú egységkörbe. Mi a pontok számának eloszlása? Mennyi a pontok számának várható értéke?

8. Egy szabályos pénzérmét addig dobunk fel újra és újra, amíg meg nem kapjuk a második fejet is. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első fej után a második fejig ugyanannyi dobásra van szükség, mint amennyi az elsőig kellett?

---

9. Egy számítógépes szervizben egy hónap húsz munkanapjából átlagosan kettőn nincsen reklamáció. Poisson-eloszlást feltételezve mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon legalább három reklamáció érkezik?

10. Az egyetemen nagyon sok telefonkészülék van, amelyek egymástól függetlenül romlanak el azonos valószínűséggel. Az év 360 napjából átlagosan 12 olyan nap van, hogy egyetlen készülék sem romlik el. Várhatóan hány telefon romlik el egy nap? Várhatóan hány olyan nap lesz, amikor 2 vagy 2-nél több telefon romlik el?

11. Legyen $X \sim \mathrm{Pois}(3)$ és $Y = 3X - 1$. Adjuk meg Y eloszlásfüggvényét a π helyen.

12. Lovas gátversenyen a ló az akadályok mindegyikét egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel veri le. Ha 5% annak a valószínűsége, hogy a lovas hibátlanul teljesít egy kört, mennyi az esélye, hogy legfeljebb három akadályt ver le?

13. Egy futóversenyen a pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban pontosan egy kullancsot, 75-en pedig kettőt. Ezek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.

IMSc 5. Tegyük fel, hogy egy eszközben n alkatrész okozhat hibát. Az alkatrészek egymástól függetlenül, exponenciális eloszlás szerint romlanak el. A k. alkatrész átlagosan 2^k nap múlva ($k = 1, \ldots, n$). Várhatóan hány napot kell várnunk az első hibáig? (A függetlenség itt azt jelenti, hogy ha X_i jelöli az i-edik alkatrész elromlásának időpontját, akkor az $\{X_i > x\}$ események együttesen függetlenek tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén.)