4. Gyakorlat
Folytonos valószínűségi változók, Sűrűségfüggvény karakterizációja, Transzformált

1. Az egységnégyzeten találomra kiválasztunk egy P pontot. Jelölje X a P-hez legközelebbi oldal és a P pont távolságát. Mi X eloszlás- és sűrűségfüggvénye?

2. Az egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy a és egy b pontot. Jelöljük X-szel a két pont távolságának négyzetét.
   (a) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.
   (b) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét.
   (c) Átlagosan mekkora X?
   (d) Hol a legnagyobb X sűrűségfüggvényének értéke?

3. Adjuk meg az ötös lottón kihúzott öt szám közül a legkisebb eloszlásfüggvényének értékét a 25 helyen. Folytonos-e ez az eloszlásfüggvény?

4. A $(0, 1)$ intervallumban kijelölünk három pontot véletlenszerűen. Jelölje Y a középső pontot. Határozzuk meg Y eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét.

5. Egy benzinkút üzemanyagtartályát hetente teletöltik. Jelölje X a heti fogyasztást (százezer literekben), melynek sűrűségfüggvénye:
$$f_X : x \mapsto \begin{cases} 5\,(1-x)^4 & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$
Mekkora legyen a tartály kapacitása, hogy annak a valószínűsége, hogy a héten kifogy az üzemanyag, kisebb legyen $0,05$-nél? Mekkora az átlagos heti fogyasztás?

---

6. Eloszlásfüggvények-e az alábbi hozzárendelési szabályú $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények?
   (a) $F(x) = e^{-e^{-x}}$ (b) $F(x) = 1 - e^{-x^2}$ (c) $F(x) = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{x}\right)$

7. Határozzuk meg az α értékét, ha tudjuk, hogy f sűrűségfüggvény. Adjuk meg az eloszlásfüggvényt is.
   (a) $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha\,(2x - x^2) & \text{ha } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$ (b) $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha\sqrt{x-2} & \text{ha } 2 < x < 3, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$
   (c) $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha\sqrt{x-2} & \text{ha } 3 < x < 4, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$ (d) $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha\cos\frac{x}{2} & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$
   (*) Az egyes részfeladatokban milyen x esetén lesz $\mathbb{P}(X < x) = \frac{1}{2}$, ahol X az a valószínűségi változó, aminek a sűrűségfüggvénye a fenti?

---

8. Legyen X egy kockadobás eredménye. Mi az $(X-3)^2$ eloszlásfüggvénye?

9. Legyen $X \sim U\,(0, 1)$, illetve $Y = \sqrt{2X}$, $V = \ln\frac{1}{X}$ és $Z = \mathrm{arctg}(X)$. Adjuk meg Y, V és Z sűrűségfüggvényét.

10. Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $x \mapsto F_X(x)$. Fejezzük ki az alábbi valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit F_X segítségével:
    (a) $Y = \max\{0; X\}$ (b) $Z = -X$ (c) $V = |X|$ (d) $W = \min\{0; -X\}$

11. Az autók fogyasztását Amerikában mérföld/gallon-ban (mpg) fejezik ki, azaz megadják, hogy hány mérföldet tesz meg a gépjármű egy gallon üzemanyaggal. Európában, mint ismeretes, a fogyasztást liter/(100 km) formában adják meg. Egy autóról tudjuk, hogy az X mpg fogyasztását az f_X sűrűségfüggvény jellemzi. Hogyan kell transzformálnunk f_X-et, ha áttérünk a liter/100km skálára?
    (1 mérföld $= a$ km, 1 gallon $= b$ liter, ahol $a = 1{,}609$ és $b = 3{,}785$).

IMSc 4. Egy egység sugarú körvonalon választunk három pontot találomra. Jelölje T annak a háromszögnek a területét, aminek ez a három pont a három csúcsa. Mennyi $\mathbb{E}(T^2)$?