13. Gyakorlat
Ismétlő feladatsor

1. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, ahol $X \sim U(0;1)$ és

$$f_Y : y \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} & \text{ha } y > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mennyi $\mathbb{P}(X^2 < Y < 1)$?

2. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x,y) \mapsto \begin{cases} a(4x+y) + bxy + \frac{2}{5} & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

valamilyen a és b valós számok esetén. Milyen a és b értékek esetén lesznek X és Y független valószínűségi változók?

3. Legyenek $U, V \sim U(0;1)$ független valószínűségi változók.
a) Mi $-\ln U$ sűrűségfüggvénye?
b) Határozzuk meg $-\ln(U \cdot V)$ sűrűség- és eloszlásfüggvényét!
c) Mi $U \cdot V$ eloszlásfüggvénye?

4. Legyenek $X, Y \sim U(2;5)$ független valószínűségi változók.
a) Határozzuk meg $Z = X + Y - 2$ sűrűségfüggvényét.
b) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(Z < z \mid Z < 5)$ feltételes valószínűséget tetszőleges $2 < z < 5$ esetén.
c) Mennyi $\mathbb{P}(\max(X,Y) < z)$?

5. Egy csomagológép az északi sarkon zsákokat tölt meg ajándékkal. A zsákok szélessége normális eloszlású valószínűségi változó 40 cm várható értékkel és 1,5 cm szórással. (Tegyük fel, hogy a zsákokat nem forgatjuk, a szélességük jóldefiniált mennyiség.) Egy zsák kémény-kompatibilis, ha a szélessége legfeljebb 42 cm. Mennyi a valószínűsége, hogy két függetlenül, véletlenszerűen kiválasztott zsák közül legalább az egyik kémény-kompatibilis?

6. Egy tévéműsorban rövid interjúkat adnak le élőben, egymás után. Az interjúalanyokat megkérik, hogy m percre számoljanak a mondanivalójukkal. A tapasztalatok szerint így egy interjú hosszának várható értéke m, szórása pedig a várható értékének a 10%-a. Milyen m-et mondjanak a szervezők az aznapi 10 alanynak, ha azt szeretnék, hogy közelítőleg 3% eséllyel fussanak túl a 100 perces műsoridőn?

7. Egy előadásra 500 hallgató jár. A hallgatók egy adott előadáson egymástól függetlenül jelennek vagy nem jelennek meg. Ha van aznap más tárgyból ZH, akkor $\frac{1}{6}$ eséllyel jönnek be az előadásra, ha nincs, akkor $\frac{1}{4}$ eséllyel.
a) Feltéve, hogy van aznap más tárgyból ZH, mekkora eséllyel jelenik meg legfeljebb 100 hallgató?
b) Annak a valószínűsége, hogy az előadás napján ZH-t írnak, 0,2. Feltéve, hogy legfeljebb 100 hallgató jelent meg, mekkora az esélye, hogy aznap más tárgyból ZH-t írnak?

8. Egy biztosítótársaság ügyfeleket biztosít. Minden ügyfél esetén 0,9 valószínűséggel nem történik káresemény az adott időszakban, ekkor nem fizet kártérítést a biztosítótársaság. Ha történik káresemény, akkor a kifizetett kártérítés nagysága 0,9 valószínűséggel 20 egység, 0,1 valószínűséggel pedig 200 egység. Az egyes ügyfeleknél történt káresetek egymástól függetlenek. Mekkora biztosítási díjat kérjen a biztosító az ügyfelektől, hogy 10 000 biztosított esetén 0,99 valószínűséggel kevesebb legyen a kifizetett kártérítések összege a befizetett díjnál?

Fordíts meg!

9. Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X,Y}:(x,y)\mapsto\begin{cases}\frac{1}{4}(1+xy(x^2+y^2)) & \text{ha } |x|<1, |y|<1,\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Számoljuk ki $\mathrm{cov}(3X,4Y)$-t. Segédkérdés: Igaz-e, hogy a $z\mapsto z^k$ valós függvény $[-1,1]$ intervallumon vett integrálja 0, ha k páratlan, pozitív egész?

10. Legyen (X,Y) együttes eloszlása egyenletes a $(-1;0)$, $(1;0)$ és $(0;1)$ pontok által határolt háromszögön. Mi Y lineáris regressziója X-re?

11. Legyenek $X,Y\sim B(3;\frac{1}{3})$ független valószínűségi változók. Számoljuk ki az $\mathbb{E}\left((Y-X)^2 \mid X\right)$ regressziót.

12. Legyen az X és Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x,y)=\alpha(xy^2+xy)$ ha $0<x<2$ és $0<y<1$, és 0 egyébként.
a) Határozzuk meg α értékét.
b) Adjuk meg $2X+3Y+1$ lineáris regresszióját Y-ra.
c) Adjuk meg az $\mathbb{E}(2X+3Y+1\mid Y)$ regressziót.

13. Feldobunk egy pénzérmét, ami p eséllyel esik a fej oldalára. Ha fejet dobtunk, akkor egy szabályos dobókockával addig dobunk, amíg hatost nem kapunk, ha írás, akkor addig, amíg párosat nem kapunk. Jelölje X a dobások számát. Feltéve, hogy $\mathbb{E}(5X)=\mathbb{E}(X^2)$, mennyi p?

14. Legyenek X és Y valószínűségi változók, amikre teljesül, hogy $\mathbb{E}(X)=1$ (*javítva 10-ről*) és $Y\sim\mathrm{Exp}(3)$. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X^2\mid Y=y)=\frac{1}{\sqrt{y}}$. Határozzuk meg a $\mathbb{D}^2(X)$ szórásnégyzetet.

15. Legyen $Y\sim U(0;1)$ és X egyenletes eloszlású az $[Y^2;Y]$ intervallumon. Mi az esélye, hogy $\mathbb{P}(X<0{,}5)$?

16. Jelölje L egy futárszolgálat forgalmának nagyságát egy napon, és legyen A az az esemény, hogy egy aznapi küldemény időben megérkezik. Tegyük fel, hogy $f_L(x)=\frac{1}{2}\sin(x)$ ha $x\in[0;\pi]$ és 0 egyébként, valamint ha $L=x$, akkor a küldemény $\frac{1}{2}\big(\cos(x)+1\big)$ eséllyel érkezik meg időben. Mennyi $\mathbb{P}(A)$?

17. Legyen $\underline{X}$ kétdimenziós standard normális eloszlású valószínűségi változó, és

$$\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}2 & v\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

valamilyen $v\in\mathbb{R}$ skalárra. Legyen $\underline{Y}=(Y_1,Y_2)=\underline{\underline{A}}\cdot\underline{X}$. Ha $\mathrm{corr}(Y_1,Y_2)=0{,}5$, akkor mennyi v? Mi Y kovarianciamátrixának determinánsa?

18. Legyen a $\underline{Z}\sim N(\underline{\mu},\underline{\underline{\Sigma}})$ kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f_{Z_1,Z_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}e^{-5(x_1+1)^2+7(x_1+1)(x_2+2)-\frac{5}{2}(x_2+2)^2}\qquad (x_1,x_2\in\mathbb{R})$$

Határozzuk meg $\underline{\mu}$ és $\underline{\underline{\Sigma}}$ értékét.