12. Gyakorlat

Feltételes valószínűség folytonos esetben, Többdimenziós normális eloszlás

1. Egy érmegyártó gép nem feltétlenül szimmetrikus érméket gyárt. Jelölje X egy adott érme esetén a fej eredmény valószínűségét. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f_X(x) = 6x - 6x^2$, ha $0 < x < 1$, és 0 egyébként. Egy ilyen érmét 4-szer feldobva, mi a valószínűsége, hogy 2 fejet kapunk eredményül?

2. Egy alkalmazását a gyártó rendszeresen ellenőrzi biztonsági rések tekintetében. Tegyük fel, hogy egy adott biztonsági rés gyártó általi felfedezéséig eltelő T időnek a következő az eloszlásfüggvénye

$$F_T : t \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{ha } t > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha a hibát t időpontban fedezi fel a gyártó, akkor $1-e^{-t}$ eséllyel élnek vissza azzal. (Ha felfedezi, rögtön kijavítja, így nem élhetnek vissza vele.) Mi a valószínűsége, hogy történik visszaélés a kijavítás előtt?

---

3. Legyenek X és Y független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, valamint legyen $U = 3X - 2Y + 1$ és $V = 7X - 5Y - 3$.
a) Mi az $(U, V) \sim N(\underline{m}, \underline{\underline{\Sigma}})$ kétdimenziós normális eloszlás $\underline{m}$ és $\underline{\underline{\Sigma}}$ paramétere?
b) Mi (U, V) sűrűségfüggvénye?
c) Mennyi $\mathrm{cov}(-2U + V, 12U - 5V)$?
d) Független-e $-2U + V$ és $12U - 5V$?

4. Legyen $\underline{Z} \sim N(\underline{m}; \underline{\underline{\Sigma}})$ ahol

$$\underline{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Adjunk olyan $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ alsóháromszögmátrixot és $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektort, amire $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{Z}+\underline{v}$ (kétdimenziós) standard normális eloszlású.

5. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y} : (x, y) \mapsto \frac{1}{2\pi d^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2d^2}}$. Határozzuk meg a $Z = \max\{|X|, |Y|\}$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

6. Legyenek X_1, X_2, X_3 együttesen független, normális eloszlású valószínűségi változók, egységesen μ várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Milyen eloszlású az $Y = \frac{X_1+X_2+X_3-3\mu}{\sqrt{3}\sigma}$ valószínűségi változó? Mennyi $\mathrm{corr}(X_1, Y)$?

7. Legyenek $X \sim N(5; 2)$ és $Y \sim N(4; 3)$ függetlenek. Adjuk meg a $\mathbb{P}(X < Y)$ valószínűséget.

8. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{\pi}{e} xy & \text{ha } x, y \in [-1, 1], \\ \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a) Adjuk meg a peremsűrűségfüggvényeket.
b) Kétdimenziós normális eloszlású-e az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó?