Zárthelyi dolgozat, 2019. november 4.
Megoldás

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Artimetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Az egyes számú zsákban 13 piros és 11 kék színű golyó van, a kettes számú zsákban 13 piros, 11 kék és 12 zöld. Véletlenszerűen húzunk egy golyót az egyik zsákból. Annak az esélye, hogy az első zsákból húzunk $\frac{4}{13}$. Feltéve, hogy piros golyót húzunk, mi az esélye, hogy az első zsákból húztunk?

   (2 pont) $A_1 =${1. zsákból húzunk}, $A_2 =${2. zsákból húzunk}, $B =${piros golyót húzunk} (Ha az eseményekre jelölést nem vezet be, de a nekik megfelelő szövegek következetesen vannak használva a továbbiakban, szintén jár a 2 pont.)
   (1 pont) $P(A_1) = \frac{4}{13}$, $P(A_2) = 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13}$
   (2 pont) $P(A_1|B) = ?$
   (2 pont) Bayes-tétel alapján:
   (6 pont) $P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)}$, (a benne szereplő kifejezések felírására, és a helyes(!) behelyettesítésre együtt szintén jár a pont, akkor is ha a formula ilyen formában nem szerepel. Hibásan felírva: legfeljebb 1 pont)
   (2 pont) mert A_1, A_2 teljes eseményrendszer (avagy kizáróak és $A_1 \cup A_2 = \Omega$).
   (2 pont) $P(B|A_1) = \frac{13}{24}, P(B|A_2) = \frac{13}{36}$
   (3 pont) $P(A_1|B) = \frac{2}{5} = \underline{\underline{0{,}4}}$

2. Legyen Y olyan valószínűségi változó, aminek sűrűségfüggvénye valamilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\alpha}{x\sqrt{x}} & \text{ha } 1 < x < 4, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   Határozza meg $\mathbb{E}(Y)$-t.

   (3 pont) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$
   (3 pont) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^4 \frac{\alpha}{x\sqrt{x}}\,dx$
   (3 pont) $= \int_1^4 \alpha x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \alpha \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^4 = \alpha \left[-2\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_1^4 = -2\alpha\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \alpha$
   (2 pont) $\alpha = 1$
   (0 pont) Y folytonos valószínűségi változó, ezért

(3 pont) $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$ (elírással nem fogadható el; kivétel, ha a határok 1 és 4)
(3 pont) $= \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ (ha nem határozta meg az α-t, de egyébként ez a lépés helyes, akkor is jár a pont)
(3 pont) $= \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = 4 - 2 = \underline{\underline{2}}$ (α-val paraméteresen felírva: 1 pont).
Ha egy lépés helyesen szerepel, de a megoldást nem mozdítja előre, akkor a vonatkozó 3 pontból legfeljebb 2 adható, ha pedig egy rossz koncepció részeként, akkor legfeljebb 1 pont jár.

3. Béla híres ember, sokszor kérnek tőle autogramot az utcán. Tegyük fel, hogy az egyes autogram kérések egymástól független, azonos, de egyenként kis valószínűségű események. Egy nap átlagosan 4 kérést kap. Béla úgy érzi, jó napja van, ha 1-nél több, de 5-nél kevesebb kérést kap. (Tegyük fel, hogy más okból nem lehet jó napja.)
   (a) Mekkora a valószínűsége, hogy Bélának egy adott napon jó napja van?
   (b) Várhatóan hány napig kell várnia Bélának, hogy jó napja legyen (a jó napot is beleszámolva)?

   (1 pont) X az autogram kérések száma egy nap alatt, $\mathbb{E}(X) = 4$
   (1 pont) $\mathbb{P}(1 < X < 5) = ?$
   (3 pont) $X \sim \text{Pois}(\lambda)$
   (1 pont) $\mathbb{E}(X) = \lambda \Rightarrow \lambda = 4$
   (2 pont) $\mathbb{P}(1 < X < 5) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4)$ (Több vagy kevesebb, de megfelelő alakú tagot felírva: 1 pont. Eloszlásfüggvénnyel felírva, de aztán nem kibontva: 0 pont)
   (2 pont) $= \frac{4^2}{2!}e^{-4} + \frac{4^3}{3!}e^{-4} + \frac{4^4}{4!}e^{-4} = \underline{\underline{0{,}5373}}$
   (2 pont) $Y = \{$hány napig kell várnia jó napra$\}$, $\mathbb{E}(Y) = ?$ (Ha Y helyett ezt a változót is X-el jelöli: 0 pont; ha újradefiniálja X-et geometriainak: 1 pont.)
   (3 pont) $Y \sim \text{Geo}(p)$,
   (2 pont) $p = \mathbb{P}(1 < X < 5) = 0{,}5373$
   (1 pont) $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}$
   (2 pont) $= \underline{\underline{1{,}861}}$ (Egészre is kerekítve: 1 pont.)

4. Jelölje A azt az eseményt, hogy nem támad fel a szél a következő 2 órában, B pedig azt, hogy nem ered el az eső a következő 1 órában. Tegyük fel, hogy mind a szél feltámadásáig eltelő X, mind az eső eleredéséig eltelő Y órák száma exponenciális eloszlású, azonos λ paraméterrel.
   (a) Határozza meg a $\mathbb{P}(A)$ és $\mathbb{P}(B)$ valószínűségeket (λ függvényében).
   (b) A fenti eseményeken túl, jelölje C azt az eseményt, hogy ma front lesz. Ismerjük a következő valószínűségeket:

   $$\mathbb{P}(C) = 0{,}5\,, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}2\,, \quad \mathbb{P}(A \cap C) = 0{,}3\,, \quad \mathbb{P}(B \cap C) = 0{,}2\,, \quad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0{,}1.$$

   Ha 0,9 az esélye, hogy A, B és C események valamelyike bekövetkezik, akkor mennyi λ?

   (2 pont) $A = \{X > 2\}$, $B = \{Y > 1\}$
   (1 pont) $\mathbb{P}(X < x) = 1 - e^{-\lambda x}$ (Ha ez más formában szerepel, például F_X-el, de kiderül belőle, hogy az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényét használjuk, akkor is jár a pont.)
   (3 pont) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X > 2) = 1 - (1 - e^{-\lambda 2}) = e^{-2\lambda}$ és $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X > 1) = 1 - (1 - e^{-\lambda 1}) = e^{-\lambda}$
   (1 pont) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 0{,}9$
   (2 pont) Szita-formula alapján:
   (4 pont) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
   (2 pont) $0{,}9 = e^{-2\lambda} + e^{-\lambda} + 0{,}5 - 0{,}2 - 0{,}3 - 0{,}2 + 0{,}1 = e^{-2\lambda} + e^{-\lambda} - 0{,}1$
   (3 pont) $x = e^{-\lambda}$ helyettesítéssel $x^2 + x - 1 = 0$, ezért $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
   (2 pont) Csak $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ pozitív, ezért $\lambda = -\ln x_1 \approx \underline{\underline{0{,}4812}}$.

5. Dobjunk egy szabályos dobókockával 4-szer. Jelölje X a dobott hatosok számát. Az Y valószínűségi változó legyen 0, ha az első két dobás közt van hatos, 1, ha az első két dobás közt nincs, de az utolsó két dobás közt van hatos, és 2 egyébként. Mennyi $\text{cov}(X, Y)$?

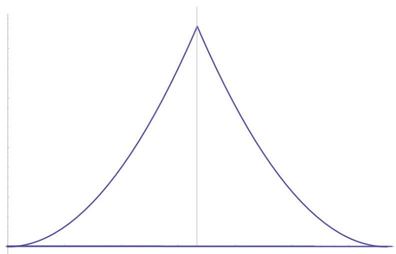
   (2 pont) X értékkészlete $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, Y értékkészlete $\{0, 1, 2\}$, így egy 3×5 táblázatra lesz szükség.

(6 pont) Együttes eloszlás:

Y \ X	0	1	2	3	4
0	0	125/648	125/1296	5/324	1/1296
1	0	125/648	25/1296	0	0
2	625/1296	0	0	0	0

Ebből a helyes nulla értékekért legfeljebb 2 pont adható, míg a nemnulla helyes értékekért oszloponként 1 pont, az utolsó két oszlopért közösen 1 pont. A 6 pont hiányos táblázat esetén is jár, amennyiben a hiányzó értékek azért nem szerepelnek, mert a hallgató felismeri, hogy a kovariancia kiszámításához nem lesz rájuk szükség. Binomiális együtthatók rossz használata esetén a táblázatra legfeljebb 4 pont adható.
(3 pont) $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ (definíció helyes felírása: szintén 3 pont.)
(2 pont) $\mathbb{E}(XY) = 0 \cdot (...) + 1 \cdot (1 \cdot \frac{125}{648} + 2 \cdot \frac{25}{1296}) + 2 \cdot 0 \cdot \frac{625}{1296}$
(1 pont) $= \frac{125}{648} + 2 \cdot \frac{25}{1296} = \frac{25}{108} (\approx 0{,}2315)$
(1 pont) $\mathbb{P}(Y=1) = \frac{125}{648} + \frac{25}{1296}$ és $\mathbb{P}(Y=2) = \frac{625}{1296} (\approx 0{,}4823)$
(2 pont) $\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot (\frac{125}{648} + \frac{25}{1296}) + 2 \cdot \frac{625}{1296} = \frac{1525}{1296} (\approx 1{,}1767)$
(2 pont) $X \sim B\left(4, \frac{1}{6}\right)$, ezért $\mathbb{E}(X) = np = \frac{4}{6}$
(1 pont) $\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{25}{108} - \frac{1525}{1296} \cdot \frac{2}{3} \approx \underline{\underline{-0{,}5530}}$.

6.* Legyen $a > 0$ valós szám. Vegyük azt a síkidomot, aminek határai a $(0;0)$-t a $(2a;0)$-val összekötő szakasz, az $y = x^2$ ($x \in [0,a]$) egyenlettel meghatározott görbe, illetve ugyanezen görbének az $x = a$ egyenesre vett tengelyes tükörképe. Az a paraméter értéke $1 - 2^{-1-N}$, ahol $N \sim B(2, 2^{-1})$. Mekkora az esélye, hogy a $[0,2] \times [0,1]$ téglalapból találomra választott pont a síkidomba esik?



A ={a pont a síkidomba esik}
(1 pont) $\mathrm{Ran}(N) = \{0,1,2\}$ (Ha ez implicit a későbbi számolásokban, akkor is jár a pont.)
(2 pont) Teljes valószínűség tétele alapján:
(4 pont) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|N=0)\,\mathbb{P}(N=0) + \mathbb{P}(A|N=1)\,\mathbb{P}(N=1) + \mathbb{P}(A|N=2)\,\mathbb{P}(N=2)$ (Ha a-ra tesznek feltételt: szintén 4 pont. Logikailag hibás formula: legfeljebb 1 pont.)
(1 pont) $\mathbb{P}(N=0) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(N=1) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(N=2) = \frac{1}{4}$
(2 pont) $N = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$, $N = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$, $N = 2 \Rightarrow a = \frac{7}{8}$
(5 pont) $P(A|N=0) = \frac{2\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx}{2}, \quad P(A|N=1) = \frac{2\int_0^{\frac{3}{4}} x^2\,dx}{2}, \quad P(A|N=2) = \frac{2\int_0^{\frac{7}{8}} x^2\,dx}{2}$
Ha az integrál a-ban paraméteresen van megadva, a-t skalárként kezelve: szintén 5 pont; a "kedvező" terület helyes kiszámolása, de a teljes terület lehagyása: 3 pont; 2-es szorzó lehagyása, de egyébként helyes számolás: 4 pont.
(3 pont) Az integrálok értékei rendre $\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}, \quad \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{3}{4}} = \frac{9}{64}, \quad \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{7}{8}} = \frac{343}{1536} \approx 0{,}2233$
(2 pont) $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{4} + \frac{9}{64} \cdot \frac{1}{2} + \frac{343}{1536} \cdot \frac{1}{4} \approx \underline{\underline{0{,}1366}}$.