Bevezetés a számításelméletbe II.

Vizsgazárthelyi feladatok, 2001. május 24.

1. Legyen G a $V = \{p_1, p_2, ..., p_{2001}\}$ ponthalmazon egy olyan egyszerű gráf, amelyben $\{p_i, p_j\} \in E$ pontosan akkor teljesül, ha $|i - j| \leqslant 2$.

   (a) Van-e G-ben Euler-kör vagy Euler-út?

   (b) Van-e G-ben Hamilton-kör vagy Hamilton-út?

   Megoldás:

   (a) A G gráf összefüggő, így Euler-kör illetve -út létezésének eldöntéséhez G fokszámait kell megvizsgálnunk. A feltételek szerint p_1 és p_{2001} fokszáma 2, p_2 és p_{2000} fokszáma 3, végezetül $3 \leqslant i \leqslant 1999$ esetén p_i fokszáma 4.

   Összességében tehát megállapítható, hogy G-nek pontosan két páratlan fokszámú csúcsa van, ezért Euler-utat tartalmaz, de Euler-kört nem.

   (b) A legegyszerűbb Hamilton-út a csúcsok növekvő index szerinti bejárásával kapható, hiszen p_i és p_{i+1} minden $1 \leqslant i \leqslant 2000$ esetén szomszédosak. Sajnos ez a Hamilton-út nem terjeszthető ki egyetlen él behúzásával Hamiton-körré.

   Könnyű ellenőrizni azonban, hogy a csúcsok következő sorrendben való bejárása Hamilton-kört ad: $p_1, p_3, p_5, ..., p_{1999}, p_{2001}, p_{2000}, p_{1998}, p_{1996}, ..., p_4, p_2, p_1$. Természetesen ennek egy élét elhagyva szintén Hamilton-utat kapunk.

2. Legyen $V = 1, 2, ..., 74$ a H gráf ponthalmaza, az i és j különböző pontok között akkor menjen él, ha $i + j$ és 74 relatív prímek. Határozzuk meg a $\chi(H), \alpha(H), \nu(H), \rho(H), \tau(H)$ értékeket!

   Megoldás:

   Azonos paritású számok között biztosan nem megy él, hiszen az ilyen számpárok összege páros, ami nem lehet relatív prím 74-hez. Bizonyos számpárok összege lehet továbbá 37, 74 vagy 111, mely esetekben az adott számpár szintén nincs összekötve. Minden egyéb számpár össze van kötve.

   Ennek alapján H egy jó színezését kapjuk, ha a páros számokat pirosra, a páratlanokat pedig kékre festjük. H tartalmaz élet, így egyetlen színnel biztosan nem színezhető. Ezek alapján $\chi(H) = 2$.

   Vizsgáljuk a lefogó élek minimális számát ($\rho(H)$). Egyfelől ez a szám nyilván legalább 37, hisz egy él legfeljebb két pontot foghat le. Másfelől megadható 37 él, melyek H összes pontját lefogják, éspedig az $\{i, 75 - i\}(1 \leqslant i \leqslant 37)$ élek. Ezen élek csúcsaihoz tartozó számok összege ugyanis minden esetben 75, ami relatív prím 74-hez, tehát ezek valóban H élei. Ezért $\rho(H) = 37$.

   A H gráf hurokmentes, ezért alkalmazható Gallai tétele, amely szerint $\rho(H) + \nu(H) = |V(H)|$, ennek alapján $\nu(H) = 37$.

   A H gráf páros és nem tartalmaz izolált pontot, így König tételének mindkét állítása alkalmazható, amely szerint $\tau(H) = \nu(H)$ és $\alpha(H) = \rho(H)$. Tehát a lefogó pontok minimális száma $\tau(H) = 37$, a független pontok maximális száma pedig $\alpha(H) = 37$.

3. Állapítsuk meg, hogy a p paraméter függvényében mennyi a feladat elvégzéséhez szükséges minimális idő az alábbi PERT diagram által leírt munkafolyamatnál! Melyek a kritikus tevékenységek?

4. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot!

5. Bizonyítsuk be, hogy ha a k-szorosan pontösszefüggő G gráf egy élét elhagyjuk, akkor a kapott G' gráf $(k - 1)$-szeresen pontösszefüggő lesz.

   Megoldás:

   Legyen a G-ből elhagyott él e. Indirekt módon tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Ekkor a G' gráfból elhagyható legfeljebb $k - 2$ pont úgy, hogy ne maradjon összefüggő. Tekintsük ugyanezen legfeljebb $k - 2$ pontot G-ben. Ha e egyik végpontja sincs köztük, akkor vegyük hozzájuk a kettő közül pontosan az egyiket. Így legfeljebb $k - 1$ pontot kaptunk, melyeket G-ből elhagyva az nem marad összefüggő. Ez azonban ellentmond annak, hogy G eredetileg k-szorosan pontösszefüggő volt.

6. Legyen a páratlan, b pedig páros szám. Igazoljuk, hogy ha $a^2 + b^2$ négyzetszám, akkor b osztható néggyel!

   Megoldás:

   Könnyű ellenőrizni, hogy bármely páratlan szám négyzete 1-et ad 8-cal osztva maradékul ($(8k \pm 1)^2 \equiv (8k \pm 3)^2 \equiv 1 \pmod 8$).

   Indirekt módon tegyük fel, hogy b nem osztható néggyel, ekkor alkalmas k egész szám választása esetén $b = 4k + 2$. Ekkor $b^2 \equiv 4 \pmod 8$. Ekkor azonban $a^2 + b^2 \equiv 5 \pmod 8$ ellentmond a fenti megállapításunknak, ez az ellentmondás bizonyítja a feladat állítását.

7. Oldjuk meg a $2001x \equiv 3 \pmod{12}$ kongruenciát!

   Megoldás:

   $(2001, 12) = 3$, ezért a kongruenciának pontosan három megoldása lesz modulo 12, vagy másképpen mondva pontosan egy megoldása lesz modulo 4. A 3-mal való osztás elvégzése után $667x \equiv 1 \pmod{4}$, azaz $3x \equiv 1 \pmod{4}$ adódik. Mindkét oldalt 3-mal szorozva (figyelem! itt változatlan marad a modulus) kapjuk a megoldást: $9x \equiv x \equiv 3 \pmod{4}$.

8. A 2001 rendű G csoportnak H egy 69 rendű részcsoportja. Bizonyítsuk be, hogy ha H normálosztó G-ben, akkor a G/H faktorcsoport kommutatív!

   Megoldás:

   A faktorcsoport elemszáma: $|G/H| = |G|/|H| = 2001/69 = 29$, ami prímszám. Ismeretes, hogy minden prímrendű csoport ciklikus. A G/H faktorcsoport tehát ciklikus, ezért kommutatív.