Bevezetés a számításelméletbe

1. zárthelyi, 2001. október 31.

1. Adjuk meg az alábbi egyenletekkel megadott S_1, S_2 és S_3 síkok összes metszéspontját a háromdimenziós valós térben.

$$\begin{array}{lrcl} S_1: & x+y+z & = & 6 \\ S_2: & 2x+3y-2z & = & 0 \\ S_3: & 5x+7y-3z & = & 6 \end{array}$$

Megoldás:

A kérdezett közös pontok a fenti három egyenletből álló egyenletrendszer megoldását adó (x, y, z) valós számhármasokkal, mint koordinátákkal megadható pontok.

A Gauss-eliminációs eljárással a következő mátrixokhoz jutunk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & -3 & 6 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -12 \\ 0 & 2 & -8 & -24 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

amiből a redukált lépcsős alak azonnal adódik:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 18 \\ 0 & 1 & -4 & -12 \end{array}\right)$$

Innen a megoldás leolvasható: $x = 18 - 5z, y = -12 + 4z$, miközben z tetszőlegesen megválasztható valós szám.

2. Igaz-e, hogy minden véges dimenziós vektortérnek véges sok altere van?

Megoldás:

Nem igaz, megadunk egy ellenpéldát: a háromdimenziós valós térnek például minden ezen térben elhelyezkedő, az origón áthaladó sík altere, ilyen pedig végtelen sok van, miközben a tér dimenziója véges.

3. Legyenek S_1 és S_2 az n-dimenziós valós tér olyan alterei, melyekre $\forall \mathbf{x} \in S_1$ és $\forall \mathbf{y} \in S_2$ vektorok esetén teljesül, hogy $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineárisan független (feltételezve, hogy egyikük sem egyenlő a $\mathbf{0}$ vektorral).

Legyenek $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)} \in S_1$ lineárisan független vektorok, és $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(m)} \in S_2$ szintén lineárisan független vektorok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(m)}$ vektorokból álló (összesen tehát $(k+m)$ vektort tartalmazó) vektorrendszer is lineárisan független.

Megoldás:

Indirekt módon tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, ekkor léteznek olyan λ_i és μ_j $(1 \leqslant i \leqslant k; 1 \leqslant j \leqslant m)$ nem mind 0 skalárok, hogy $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}^{(i)} + \sum_{i=1}^{m} \mu_j \mathbf{y}^{(j)} = \mathbf{0}$.

Az első szumma értéke legyen $\mathbf{x}$, a másodiké $\mathbf{y}$, ekkor $\mathbf{x} \in S_1$ és $\mathbf{y} \in S_2$.

Ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, akkor egyben $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, és legalább az egyikük nemtriviális módon lett felírva a maga alterében, ami ellentmond annak, hogy az $\mathbf{x}^{(i)}$ és az $\mathbf{y}^{(j)}$ vektorok is lineárisan függetlenek.

Ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, akkor egyben $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, és akkor e két vektor nem lesz lineárisan független egymástól, ellentmondva azon feltételnek, hogy egy S_1-beli és egy S_2-beli vektor mindig lineárisan független egymástól.

Ez az ellentmondás bizonyítja az állítást.

4. Adjuk meg az összes olyan $\mathbf{B}$ mátrixot, amire az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix esetén $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ teljesül.

Megoldás:

A feltétel szerint a $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ egyenlőség mindkét oldalán értelmes mátrixszorzás áll, így $\mathbf{B}$ mérete feltétlenül 2x2.

Legyen a keresett $\mathbf{B}$ mátrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y} \\ \mathrm{z} & \mathrm{t} \end{pmatrix}$. Az $\mathbf{AB}$ és $\mathbf{BA}$ szorzatok összevetéséből megállapítható, hogy a következő egyenlőségeknek kell teljesülniük:

$$x = x - y, \qquad y = 0, \qquad -x = z - t, \qquad -y = 0.$$

Az első, a második és a negyedik egyenlet kielégítésének (szükséges és elégséges) feltétele egyaránt $y = 0$.

A harmadik egyenlet kielégítésének (szükséges és elégséges) feltétele $t = x + z$.

A kért tulajdonsággal rendelkező mátrixok tehát pontosan azok, amelyek a következő alakban írhatók fel:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} & 0 \\ \mathrm{z} & \mathrm{x{+}z} \end{pmatrix}.$$

5. Adjuk meg $Im\mathcal{A}$ és $Ker\mathcal{A}$ egy-egy bázisát, ha az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés $\mathbf{A}$ mátrixa a következő:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

Az $\mathbf{A}$ mátrix első és harmadik, valamint második és negyedik oszlopa azonos, így $r(\mathbf{A}) \leqslant 2$.

A képtér egy bázisát megadja a leképezés mátrixának oszlopaiból álló maximális lineárisan független rendszer.

$Im\mathcal{A}$ bázisának jó lesz tehát az $(1,1,3)^T$ és $(1,2,4)^T$ oszlopvektorokból álló kételemű vektorrendszer.

Mivel egy négydimenziós vektortérből képezünk egy kétdimenziós képtérbe, a Dimenziótétel alapján $dim(Ker\mathcal{A}) = 4 - 2 = 2$.

Az $\mathbf{A}$ mátrix alakjáról leolvasható, hogy a magtérnek eleme lesz minden $(a, b, -a, -b)^T$ alakú vektor. Mivel ezek egy kétdimenziós tér összes elemét adják, más vektor nem is tartozik a magtérbe.

$Ker\mathcal{A}$ bázisának jó lesz tehát két lineárisan független, fenti alakú vektor, például $(1, 1, -1, -1)^T$ és $(1, 2, -1, -2)^T$.

6. Hogyan változik meg egy n-szer n-es valós elemű mátrix determinánsa, ha minden elemét az ellentettjére cseréljük?

Megoldás:

A mátrix elemeit ellentettjükre cserélve a determinánst definiáló összegben szereplő minden szorzat minden tényezője az ellentettjére változik.

Maguk a szorzatok tehát $(-1)^n$-szeresükre változnak.

Mivel az összes szorzattal ez történik, ezek összege, tehát maga a determináns is $(-1)^n$-szeresére változik. (Vagyis páros n esetén nem változik, páratlan n esetén az ellentettjére vált.)

7. Invertálhatók-e az alábbi mátrixok? Igen válasz esetén az inverzet is adjuk meg!

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

(a) A válasz: nem. Ez belátható például a determináns kiszámításával (a szorzások részletezése nélkül): $140 + 40 + 30 - 70 - 120 - 20 = 0$.

(b) Igen. Ez is belátható a determináns kiszámításával (a szorzások részletezése nélkül): $2 - 24 \neq 0$. Az inverz kereshető

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{x} & \mathrm{y} \\ 0 & \mathrm{z} & \mathrm{t} \end{pmatrix}$$

alakban. Látható ugyanis, hogy a $\mathbf{B}$ mátrix által megvalósított lineáris leképezés során a vektorok első koordinátája semmilyen kihatással nincs a másik két koordinátára és viszont, és ennek az inverzben is ugyanígy kell lennie.

Az inverz keresett alakjában szereplő változókra a következő egyenlőségeknek kell teljesülni:

$$2x + 6z = 1, \qquad 4x + z = 0, \qquad 2y + 6t = 0, \qquad 4y + t = 1.$$

A másik irányból szorozva egy kicsit más, az előbbivel egyenértékű egyenletrendszer adódik:

$$2x + 4y = 1, \qquad 6x + y = 0, \qquad 2z + 4t = 0, \qquad 6z + t = 1.$$

A fenti egyenletrendszert (bármelyiket a kettő közül) megoldva a következő adódik: $x = -\frac{1}{22}, y = \frac{3}{11}, z = \frac{2}{11}, t = -\frac{1}{11}$.

8. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges (de egymással összeszorozható) $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokra

$$r(\mathbf{AB}) \leqslant \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}.$$

Megoldás:

Az $\mathbf{A}$ mátrixot tekinthetjük úgy, mint egy, a $\mathbf{B}$ oszlopai által generált V_B vektortérből való $\mathcal{A}$ leképezés mátrixát.

Az $\mathbf{AB}$ szorzatmátrix oszlopai által generált vektortér ekkor éppen $Im\mathcal{A}$, vagyis $r(\mathbf{AB}) = dim(Im\mathcal{A})$.

A Dimenziótétel szerint $dim(Im\mathcal{A}) = dim(V_B) - dim(Ker\mathcal{A})$, amiből következik, hogy $dim(Im\mathcal{A}) \leqslant dim(V_B)$. Ugyanakkor $dim(V_B)$ definíció szerint egyenlő $r(\mathbf{B})$-vel, vagyis az előbbi egyenlőtlenség úgy is írható, hogy $r(\mathbf{AB}) \leqslant r(\mathbf{B})$.

Ugyanezt az okfejtést megismételve úgy, hogy oszlopok helyett sorokat mondunk, és az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrix szerepét felcseréljük, kapható, hogy $r(\mathbf{AB}) \leqslant r(\mathbf{A})$. Ezzel tehát beláttuk, hogy $r(\mathbf{AB}) \leqslant \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$.