

Wiener Gábor

# GRÁFOK HOSSZÚ KÖREI ÉS ÚTJAI

## HABILITÁCIÓS TÉZISEK



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Villamosmérnöki és Informatikai Kar  
2015.



# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b>	<b>5</b>
<b>Tézispontok</b>	<b>9</b>
<b>1. Első téziscsoport: hypohamiltonian és hypotraceable gráfok</b>	<b>11</b>
1.1. Síkbarajzolható hypohamiltonian és hypotraceable gráfok . . . . .	11
1.2. 3-reguláris síkbarajzolható hypohamiltonian és hypotraceable gráfok . . . . .	13
<b>2. Második téziscsoport: minimális levélszámú feszítőfák</b>	<b>14</b>
2.1. Maximális belső csúcsszámú feszítőfák . . . . .	14
<b>3. Harmadik téziscsoport: Levél-kritikus és levél-stabil gráfok</b>	<b>17</b>
3.1. Konstruksiók . . . . .	17
3.2. 2 összefüggőségi számú levél-kritikus gráfok . . . . .	18
3.3. Út-kritikus és pókszerű gráfok . . . . .	19
3.4. Adott csúcsokat elkerülő leghosszabb utak . . . . .	20
<b>4. Negyedik téziscsoport: Hipergráfok nyomai</b>	<b>21</b>
4.1. Élek maximális multiplicitása . . . . .	22
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>23</b>



# Bevezetés

Jelen téziszfüzet a szerzőnek a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Villamosmérnöki és Informatikai Karán indított habilitációs eljárásához készült. Célja, hogy a szerző (részben társszerzőkkel közös), a PhD fokozat megszerzését követő tudományos eredményeinek egy részét egységes keretben mutassa be. Az eredményeket 11 tézispontban rendszerezük, ezt követi a feldolgozott témakör áttekintése és az egyes eredmények bővebb kifejtése. Terjedelmi okokból bizonyításokat nem közlünk. A téziszfüzet kibővített változata megtalálható a szerző honlapján, ebben szinte minden vonatkozó bizonyítás szerepel (angol nyelven), kivételt csak a nagyon technikai, illetve más bizonyításokhoz rendkívül hasonló esetek képeznek. Természetesen ez utóbbi bizonyítások is megtalálhatók a szerző idevágó publikációiban. A tézisek a szerző [4, 39, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61] publikációira épülnek, melyek közül [4] és [60] társszerzője Makoto Araya, [39] társszerzője Salamon Gábor. A [4, 56, 57, 58, 59, 60] publikációk az elmúlt 5 évben jelentek meg, [61] pedig megjelenés alatt áll.

A gráfelméletben központi szerepet játszik a Hamilton-kör és a Hamilton-út probléma, vagyis annak eldöntése, hogy egy adott gráfnak van-e Hamilton-köre, illetve -útja. Egyikükre sem ismert jól használható szükséges és elégséges feltétel, sőt mindkét probléma *NP*-teljes. Hasonlóan nehezek a gráfok egyéb hosszú köreivel és útjaival, illetve speciális feszítőfáival kapcsolatos problémák is; ezek egy része speciális esetként tartalmazza a Hamilton-kör, illetve -út problémát. A kapcsolódó kutatások ennek, és a téma fontosságának köszönhetően meglehetősen szerteágazók, itt három különböző aspektusból vizsgáljuk a kérdést.

## Első téziscsoport: hypohamiltonian és hypotraceable gráfok

Az első fejezetben olyan gráfokkal foglalkozunk, melyek maguk nem rendelkeznek Hamilton-körrel (-úttal), de bármely csúcsukat elhagyva már olyan gráfot kapunk, melynek van Hamilton-köre (-útja). Ezek az úgynevezett hypohamiltonian (hypotraceable) gráfok. (Magyar nyelvű terminológia hiányában az angol elnevezéseket használjuk.) A legkisebb hypohamiltonian gráf a jól ismert Petersen-gráf. A téma vizsgálata Sousselier 1963-as cikkével [43] kezdődött, melyben a Petersen-gráf egy általánosítása segítségével végtelen sok hypohamiltonian gráfot talált. 1964-ben Herz, Gaudin és Rossi [21] belátta, hogy a Petersen-gráfnál kisebb hypohamiltonian gráf nem létezik. 1997-re sikerült meghatározni, hogy pontosan mely csúcsmokra létezik hypohamiltonian gráf (elsősorban Chvátal [10] és Thomassen [46] munkájának köszönhetően, az *i*-re a pontot Aldred, McKay és Wormald [2] tette fel). Grötschel 1977-ben megmutatta, hogy a hypohamiltonian gráfok használhatók az utazóügynök probléma egészértékű programozási megoldásához (a Gomory-féle cutting-plane módszert használva), így alkalmazásaik rendkívül szerteágazók, a hálózatok és chippek tervezésétől a DNS-szekvenálásig. Hatékony megoldást elsősorban kis méretű hypohamiltonian gráfok esetén kaphatunk. Bár számos cikk foglalkozik hypohamiltonian gráfokkal (kiváló, bár nem kimondottan friss összefoglaló Holton és Sheehan cikke [23]), valójában elég keveset tudunk róluk. Nem ismert pél-

dául, hogy létezik-e négyszeresen összefüggő hypohamiltonian gráf, sőt az sem, hogy létezik-e olyan, amelynek nincs 3 fokú csúcsa, nyilvánvaló ugyanakkor, hogy minden hypohamiltonian gráf háromszorosan összefüggő. A hypotractable gráfokról még ennél is jóval kevesebbet tudunk. Sokáig azt sejtették, hogy ilyenek nem is léteznek [27], sőt egy ideig az is kérdéses volt, hogy létezik-e olyan gráf, melyben egyik csúcson sem megy át az összes leghosszabb út. A kérdést 1966-ban vetette fel Gallai [15] és 1969-ben válaszolta meg – igenlően – Walther [54]. Az első, 40 csúcsú hypotractable gráfot Horton találta 1976-ban [63, 48], a legkisebb ismert hypotractable gráfnak 34 csúcsa van, ez Thomassen nevéhez fűződik [46]. Nem ismert érdemi alsó becslés a legkisebb hypotractable gráf méretére. Ennek az az egyik magyarázata, hogy az összes ismert hypotractable gráf hypohamiltonian gráfok segítségével készült, lényegében Thomassen két módszerét használva [46, 48]. Az ugyanakkor ismert, hogy ha  $n \geq 42$ , akkor létezik  $n$  csúcsú hypotractable gráf [46].

Az 1976-ig ismert hypohamiltonian gráfok jórészt a Petersen-gráf általánosításaként, illetve Chvátal úgynevezett flip-flopjainak segítségével [10] álltak elő és egyikük sem volt síkbarajzolható. Ez motiválta Chvátalt, amikor felvetette, hogy egyáltalán léteznek-e síkbarajzolható hypohamiltonian gráfok és ha igen, léteznek-e ilyenek, amelyek még 3-regulárisak is. Az első síkbarajzolható hypohamiltonian gráfot 1976-ban találta Thomassen [48], ennek 105 csúcsa volt, 1979-ben pedig Hatzel [20] talált egy 57 csúcsú hypohamiltonian síkgráfot. 1993-ban Holton és Sheehan [23] tette fel a kérdést, hogy létezik-e ennél kisebb hypohamiltonian síkgráf. C. Zamfirescu és T. Zamfirescu [64] 2007-ben talált egy 48 csúcsú példát, a szerző pedig (Makoto Arayával közösen) 2011-ben egy 42 csúcsút [60]. A legkisebb ismert hypohamiltonian síkgráf mérete 40, ezt Jooyandeh, McKay, Östergård, Pettersson és C. Zamfirescu találta 2014-ben [26].

A síkbarajzolható esetben még kevesebbet tudunk a hypohamiltonian és hypotractable gráfokról. 2011-ig még az sem volt ismert, hogy minden kellően nagy  $n$ -re létezik-e  $n$  csúcsú hypohamiltonian, illetve hypotractable síkgráf. Holton és Sheehan meg is említi az előbbi a terület megoldatlan problémái között [23]. 2011-ben Makoto Arayával közösen sikerült megválaszolnunk e kérdéseket: megmutattuk, hogy minden  $n \geq 76$  esetén létezik  $n$  csúcsú síkbarajzolható hypohamiltonian gráf, illetve minden  $n \geq 180$  esetén létezik  $n$  csúcsú síkbarajzolható hypotractable gráf [60]. A becsléseket 2014-ben 42-re, illetve 156-ra javították Jooyandeh és szerzőtársai [26].

A síkbarajzolható 3-reguláris gráfok Hamilton-köreinek problémája több, mint fél évszázadon át a gráfelmélet egyik központi kérdése volt, hiszen Tait sejtéséből, miszerint minden háromszorosan összefüggő, 3-reguláris síkgráfnak van Hamilton-köre, következett volna a híres négy szín sejtés [45]. Bár Tait sejtését 1946-ban megcáfolta Tutte [52], 1968-ig, a Grinberg-tétel [17] felfedezéséig nagyon nehéz volt további ellenpéldákat találni. Chvátal 1973-as, 3-reguláris hypohamiltonian síkgráfokra vonatkozó fent említett kérdése ennek megfelelően cseppet sem tűnt könnyűnek. Az első 3-reguláris, síkbarajzolható, hypohamiltonian gráfot Thomassen találta 1981-ben, ennek 94 csúcsa van [50]. 2011-ig nem is sikerült ennél kisebb példát találni és az sem volt ismert, hogy minden kellően nagy páros  $n$  esetén létezik-e  $n$  csúcsú 3-reguláris, hypohamiltonian síkgráf. Mindkét kérdés szerepel Holton és Sheehan cikkében [23] a megoldatlan problémák között. Aldred, Bau, Holton és McKay 2000-es cikkéből [1] ugyanakkor következett, hogy nincs 42 vagy kevesebb csúcsú ilyen gráf. Makoto Arayával közösen 2011-ben sikerült mindkét kérdést megválaszolnunk: mutattunk egy 70 csúcsú 3-reguláris hypohamiltonian síkgráfot, melynél kisebb ma sem ismert és bebizonyítottuk, hogy minden  $n \geq 86$  esetén létezik  $n$  csúcsú 3-reguláris hypohamiltonian síkgráf [4]. A 86-os korlátot 2015-ben 74-re javították [65].

## Második téziscsoport: minimális levélszámú feszítőfák

A második fejezetben egy feszítőfa-optimalizálási problémára adunk közelítő algoritmusokat. A feszítőfa-optimalizálási problémák tipikusan gyakorlatban felmerülő feladatokkal állnak szoros kapcsolatban, mint például hálózatok tervezése, routing [38, 16, 36, 42, 5]. A cél egy összefüggő gráf valamilyen célfüggvény szerint optimális feszítőfájának megtalálása; nagyon gyakori, hogy a gráf egy Hamilton-útja (ha létezik) az optimális feszítőfa, ilyenkor a feladat persze  $NP$ -nehéz, ezért a pontos (de lassú) megoldások helyett a közelítő algoritmusok kerülnek előtérbe. Az általunk vizsgált MINLST (Minimum Leaf Spanning Tree) probléma is ide tartozik: a cél olyan feszítőfa megtalálása, melynek a lehető legkevesebb levele (vagyis 1 fokú csúcsa) van. Lu és Ravi 1996-ban megmutatta [35], hogy erre az optikai hálózatok, vízgazdálkodási rendszerek tervezésekor is hasznos problémára még konstans faktorú közelítő algoritmust sem lehet adni (hacsak  $P = NP$  nem teljesül). Optimalizálási szempontból a MINLST feladat nyilván ekvivalens azzal a problémával, amikor olyan feszítőfát keresünk, melynek a lehető legtöbb belső csúcsa (azaz nem levele) van. Ez a probléma (Maximum Internal node Spanning Tree – MAXIST) azonban már approximálható: 2008-ban Salamon Gáborral közösen lineáris idejű 2-approximációt sikerült megadnunk, melynek finomításával  $\frac{3}{2}$ -approximációt kaptunk karom-mentes gráfokra és lineáris futásidejű  $\frac{6}{5}$ -approximációt 3-reguláris gráfokra [39]. A cikk közlése óta az approximációs faktort számos alkalommal javították, a legjobb ismert faktor általános gráfokra  $\frac{3}{2}$  [32], 1 fokú csúcs nélküli gráfokra pedig  $\frac{4}{3}$  [33].

## Harmadik téziscsoport: levél-kritikus és levél-stabil gráfok

A harmadik fejezetben az első két fejezet megközelítéseit egyesítve a hypohamiltonian és hypotraceable tulajdonságokat kiterjesztjük az említett feszítőfa-optimalizálási problémára és egy útfedéssel kapcsolatos problémára is. Az egyesített megközelítés hatékonyságát mutatja, hogy a segítségével sikerült megválaszolni Gargano, Hammar, Hell, Stacho és Vaccaro egy nyitott kérdését [16]. Egy összefüggő gráf minimális levélszámát a feszítőfái levélszámának minimumaként definiáljuk, azzal a kiegészítéssel, hogy ha a gráfnak van Hamilton-köre, akkor a kérdéses szám nem 2, hanem 1. Egy gráfot  $l$ -levél-kritikusnak nevezünk, ha a minimális levélszáma  $l$  és bármely csúcsát elhagyva a minimális levélszám  $l - 1$ . Könnyen látható, hogy a 2-levél-kritikus gráfok épp a hypohamiltonian gráfok, a 3-levél-kritikus gráfok pedig a hypotraceable gráfok. A 3.1 alfejezetben megmutatjuk, hogy nem csak  $l = 2$  és  $l = 3$ , hanem tetszőleges  $l \geq 2$  egész esetén léteznek  $l$ -levél-kritikus gráfok, sőt minden elegendően nagy  $n$  esetén létezik  $n$  csúcsú síkbarajzolható, 3-reguláris,  $l$ -levél-kritikus gráf is [57, 58, 61]. Említettük már, hogy a hypohamiltonian és hypotraceable gráfok szerkezetéről nagyon keveset lehet tudni, az egyik ilyen eredmény Thomassen hypotraceable 2-töredékeket karakterizáló lemmája [46]. Ennek egy levél-kritikus gráfokra vonatkozó általánosítását bizonyítjuk be a 3.2 alfejezetben [57, 58, 61].

A következő definíciók Garganótól és szerzőtársaitól származnak [16]. Egy fát póknak nevezünk, ha legfeljebb egy olyan csúcsa van, melynek foka nagyobb, mint 2; a pók középpontja a 2-nél nagyobb fokú csúcs (ha van ilyen, egyébként tetszőleges csúcs tekinthető a középpontnak). Egy gráf pókszerű, ha bármely  $v$  csúcsához létezik a gráfnak olyan feszítő pókjja, melynek középpontja  $v$ . Nyilvánvaló, hogy a Hamilton-úttal rendelkező gráfok pókszerűek és könnyen látható, hogy ugyanez igaz a hypotraceable gráfokra is. Garganoék (egyik) kérdése az volt, hogy léteznek-e egyéb pókszerű gráfok is. A 3.3 alfejezetben először megmutatjuk, hogy a korábban talált levél-kritikus gráfok közül bizonyosak út-kritikusak is (vagyis bármely csúcsukat elhagyva a csúcsok fedéséhez szükséges diszjunkt utak száma eggyel csökken – korábban

ilyen gráfok csak a két úttal fedhető esetben voltak ismertek) [59, 61], majd ezt a tulajdonságot felhasználva Hamilton-út nélküli, nem hypotractable, pókszerű gráfokat konstruálunk. Sőt, azt is megmutatjuk, hogy tetszőleges  $H$  gráf esetén létezik olyan Hamilton-út nélküli, nem hypotractable, pókszerű gráf, mely feszített részgráfként tartalmazza  $H$ -t [59, 61].

## Negyedik téziscsoport: hipergráfok nyomai

A negyedik fejezet olyan, hipergráfok nyomairól szóló tételeket tartalmaz, melyek hálózatok hibátűréséhez, precízebben a hiperkocka bizonyos (hibás) csúcsait elkerülő hosszú útjaihoz és köreihez kapcsolódnak. Hipergráfok nyomait régóta vizsgálják; Vapnik és Chervonenkis [53] klasszikus cikke 1971-ben jelent meg. Ebben a cikkben implicit formában már szerepel a többnyire Sauer tételeként ismert állítás [40], mely szerint minden  $n$  elemű alaphalmazon adott, legalább  $\sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} + 1$  különböző halmazt tartalmazó halmazrendszernek van olyan  $r$  elemű  $R$  halmazon vett nyoma, amely  $R$  minden részhalmazát tartalmazza. A Sauer-tételnek és Bondy egy tételének [7] közös általánosítását adjuk a 4.1 alfejezetben [55], melyből Turán tételét [51] használva következik a 4.1 alfejezet fő eredménye:  $m \geq 2n$  esetén minden  $n$  elemű alaphalmazon adott,  $m$  halmazt tartalmazó halmazrendszernek van olyan  $\lceil \frac{n^2}{2m-n-2} \rceil$  elemű halmazon vett nyoma, melyben minden halmaz multiplicitása legfeljebb  $\lceil \frac{n^2}{2m-n-2} \rceil + 1$  [55]. Ezt a tételt használta Fink és Gregor [13] annak bizonyítására, hogy elegendően nagy  $n$  esetén az  $n$ -dimenziós hiperkockából egy legfeljebb  $\frac{n^2}{10} + \frac{n}{2} + 1$  elemű  $X$  csúcshalmazt törölve, a kapott gráfnak van  $2^n - 2|X|$  hosszú köre. Ez volt az első olyan eredmény, amelyben négyzetes nagyságrendű hibás csúcsot engedtek meg. Hasonló, négyzetes nagyságrendű eredményt bizonyított az említett tétel segítségével Dvořák és Koubek [12] körök helyett utakról. A 4.1 alfejezet fő eredményét 2015-ben Dvořák arra is fel tudta használni, hogy megmutassa: az  $n$ -dimenziós hiperkocka minden legfeljebb  $\frac{n^2}{12} + \frac{n}{4}$  élű párosítása kiterjeszthető olyan körré, mely a hiperkocka csúcsainak legalább a háromnegyedét tartalmazza (ebben a témában is ez az első négyzetes becslés) [11].

## Jelölések

A disszertációban szereplő gráfok mind véges, egyszerű, irányítatlan, összefüggő gráfok. A  $G$  gráf csúcshalmazát  $V(G)$ , élhalmazát  $E(G)$  jelöli, a  $v$  csúcs fokát a  $G$  gráfban pedig  $d_G(v)$  (ha világos, hogy melyik gráfról van szó, akkor egyszerűen  $d(v)$ ).  $G - X$  jelöli azt a gráfot, amit  $G$ -ből az  $X$  csúcshalmaz törlésével kapunk,  $G - v := G - \{v\}$ .



# Tézispontok

Alább következnek a tézisek felsorolása, melyeket a következő fejezetekben részletesen is kifej-tünk.

## Első téziscsoport

1. Minden elegendően nagy  $n$  egész esetén létezik  $n$  csúcsú síkbarajzolható hypohamiltonian, illetve hypotraceable gráf (sőt, az első esetben  $n \geq 76$ , a másodikban  $n \geq 180$  elég) – a hypohamiltonian eset Holton és Sheehan egy 1993-as problémájának [23] megoldása. (1.5. Tétel és 1.6. Tétel. A 76-os korlátot azóta 42-re, a 180-as korlátot 156-ra javították [25, 26].) (Forrás: [60], közös eredmények Makoto Arayával.)
2. A legkisebb síkbarajzolható hypohamiltonian gráfnak legfeljebb 42, a legkisebb síkbarajzolható hypotraceable gráfnak legfeljebb 162 csúcsa van. (1.2. Tétel és 1.4. Következmény. A becsléseket azóta 40-re és 154-re javították [25, 26].) (Forrás: [60], közös eredmények Makoto Arayával.)
3. Minden elegendően nagy páros  $n$  egész esetén létezik  $n$  csúcsú 3-reguláris, síkbarajzolható hypohamiltonian, illetve hypotraceable gráf (sőt, az első esetben  $n \geq 86$ , a második esetben  $n \geq 356$  elég) – a hypohamiltonian eset Holton és Sheehan egy 1993-as problémájának [23] megoldása. (1.9. Tétel és 1.10. Következmény. A 86-os korlátot azóta 74-re javították [65].) (Forrás: [4], közös eredmények Makoto Arayával.)
4. A legkisebb síkbarajzolható, 3-reguláris hypohamiltonian gráfnak legfeljebb 70, a legkisebb síkbarajzolható, 3-reguláris hypotraceable gráfnak legfeljebb 340 csúcsa van – a hypohamiltonian eset ugyancsak Holton és Sheehan egy 1993-as problémájának [23] megoldása. (1.8. Tétel és 1.10. Tétel.) (Forrás: [4], közös eredmények Makoto Arayával.)

## Második téziscsoport

5. Lineáris futásidejű 2-approximációs algoritmus a MAXIST problémára (maximális belső csúcsú feszítőfa keresése),  $\frac{3}{2}$ -approximáció karom-mentes gráfokra, lineáris futásidejű  $\frac{6}{5}$ -approximáció 3-reguláris gráfokra. (1. Algoritmus, 2.2. Tétel, 2. Algoritmus, 2.3. és 2.4. Tétel. Azóta az approximációs faktort általános gráfokra előbb  $\frac{5}{3}$ -ra [29], majd  $\frac{3}{2}$ -re [32], 1 fokú csúcs nélküli gráfokra  $\frac{7}{4}$ -re [37],  $\frac{5}{3}$ -ra [29],  $\frac{3}{2}$ -re [32], majd  $\frac{4}{3}$ -ra [33] javították. Forrás: [39], közös eredmények Salamon Gáborral.)

## Harmadik téziscsoport

6. Minden  $l \geq 2$  egészre léteznek  $l$ -levél-kritikus és  $l$ -levél-stabil gráfok, sőt minden elegendően nagy  $n$ -re létezik  $n$  csúcsú  $l$ -levél-kritikus és  $l$ -levél-stabil gráf. (3.5. Tétel, 3.6. Tétel, Megjegyzés, 18. oldal. Forrás: [57, 58, 61])

7.  $l$ -levél-kritikus 2-töredékek karakterizációja (Thomassen hypotraceable 2-töredékeket karakterizáló lemmájának [48] általánosítása). (3.12. Tétel. Forrás: [57, 58, 61]).
8. Minden  $\mu \geq 2$  egészre léteznek  $\mu$ -út-kritikus gráfok, sőt minden elegendően nagy  $n$ -re létezik  $n$  csúcsú  $\mu$ -út-kritikus gráf. (3.16. Tétel. Forrás: [59])
9. Léteznek olyan nem hypotraceable pókszerű gráfok, melyeknek nincs Hamilton-útja – Gargano, Hammar, Hell, Stacho és Vaccaro 2002-es problémájának [16] megoldása. Sőt, tetszőleges  $H$  gráfhoz létezik olyan Hamilton-út nélküli, nem hypotraceable pókszerű gráf, mely  $H$ -t feszített részgráfként tartalmazza. (3.17. Tétel, Megjegyzés, 20. oldal. Forrás: [58, 59, 61].)

### Negyedik tésziscsoport

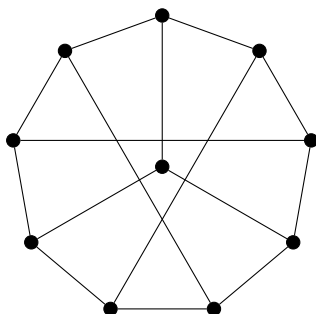
10. Az  $(n, m) \triangleright (r, s)$  reláció karakterizációja a letömrítési technika segítségével – Bondy [7] és Sauer [40] tételeinek egy közös általánosítása. (4.6. Tétel. Forrás: [55].)
11.  $m \geq 2n$  és  $r = \lceil \frac{n^2}{2m-n-2} \rceil$  esetén  $(n, m) \triangleright (r, r+1)$ . Sőt, minden  $\mathcal{A} \in MSH(n, m)$  esetén létezik olyan  $\lceil \frac{n^2}{2m-n-2} \rceil$  elemű  $X \subseteq [n]$  halmaz, melyre  $\mathcal{A}$ -t az  $[n] - X$  halmazra megszorítva, a kapott hipergráfban minden él multiplicitása legfeljebb  $\lceil \frac{n^2}{2m-n-2} \rceil + 1$ . (4.8. Tétel, 4.9. Tétel. Forrás: [55, 56].)

# 1. fejezet

## Első téziscsoport: hypohamiltonian és hypotraceable gráfok

**1.1 Definíció** Egy gráf hypohamiltonian, ha nincsen Hamilton-köre, de bármely csúcsát törölve, a kapott gráfnak már van. Egy gráf hypotraceable, ha nincsen Hamilton-útja, de bármely csúcsát törölve, a kapott gráfnak már van.

A legismertebb és egyben legkisebb [21] ilyen gráf a Petersen-gráf, melyről jól ismert, hogy nincs Hamilton-köre, az 1.1. ábrán látható lerajzolásán pedig jól látszik, hogy a középső csúcs törlésével (és így szimmetriaokokból bármely csúcs törlésével) kapott gráfban már van Hamilton-kör.



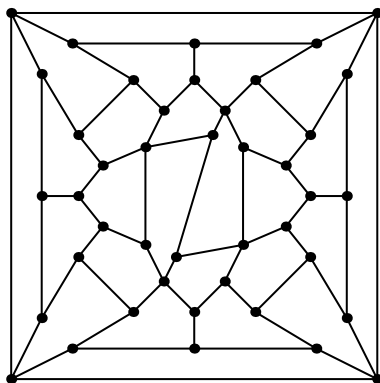
1.1. ábra: A Petersen-gráf

### 1.1. Síkbarajzolható hypohamiltonian és hypotraceable gráfok

Legyen  $\Gamma$  az 1.2. ábrán látható gráf.

**1.2 Tétel (Araya-Wiener, 2011 [60])**  $\Gamma$  síkbarajzolható hypohamiltonian gráf.

$\Gamma$  síkbarajzolhatósága magától értetődő, a csúcsok törlésével kapott gráfokban Hamilton-kört találni szintén nem nehéz. Annak igazolása azonban, hogy magának a gráfnak nincs Hamilton-köre, már nem ilyen egyszerű, a bizonyítás Grinberg tételén [17] alapul.



1.2. ábra: A  $\Gamma$  gráf

**1.3 Tétel (Grinberg, 1968 [17])** *Tegyük fel, hogy egy síkgráfnak van egy  $H$  Hamilton-köre és hogy az  $i$  élű tartományok közül  $f_i$  darab található  $H$ -n belül,  $g_i$  pedig  $H$ -n kívül. Ekkor*

$$\sum_i (i-2)(f_i - g_i) = 0.$$

Az 1.2 tétel alábbi egyszerű következménye C. Zamfirescu és T. Zamfirescu legkisebb ismert síkbarajzolható hypotractable gráfok méretére vonatkozó 186-os becslésének [64] javítása.

**1.4 Következmény (Araya-Wiener, 2011 [60])** *Létezik 162 csúcsú, síkbarajzolható, hypotractable gráf.*

A következmény bizonyításához az 1.2 tételen kívül Thomassen egy módszerére [46] van szükség. A következő tétel a fejezet legfontosabb eredménye, mely Chvátal tételének (minden elegendően nagy  $n$  esetén létezik  $n$  csúcsú hypohamiltonian gráf [10]) kiterjesztése a síkbarajzolható esetre.

**1.5 Tétel (Araya-Wiener, 2011 [60])** *Minden  $n \geq 76$  egész esetén létezik  $n$  csúcsú, síkbarajzolható, hypohamiltonian gráf.*

Az 1.5. Tétel segítségével Thomassen tételét (minden elegendően nagy  $n$  esetén létezik  $n$  csúcsú hypotractable gráf [46]) is ki tudjuk terjeszteni a síkbarajzolható esetre.

**1.6 Tétel (Araya-Wiener, 2011 [60])** *Minden  $n \geq 180$  egész esetén létezik  $n$  csúcsú, síkbarajzolható, hypotractable gráf.*

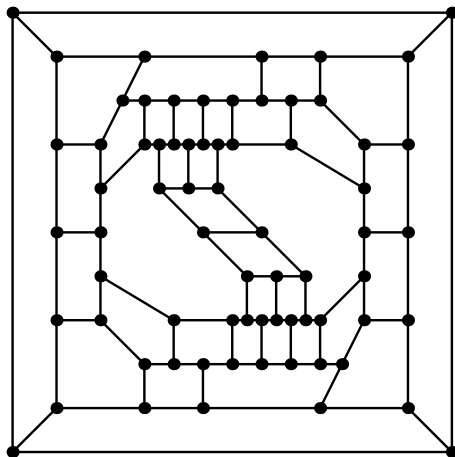
A Bevezetésben már esett szó Gallai kérdéséről (igaz-e, hogy egy összefüggő gráf összes leghosszabb útjainak van közös csúcsa [15]). Walther választát [54] követően T. Zamfirescu [62] és Grünbaum [19] a problémához kapcsolódó gráfcsaládokat, illetve számokat definiáltak, melyek közül számunkra most a  $\overline{C}_k^j$  és  $\overline{P}_k^j$  számok érdekesek (később foglalkozunk más ilyen számokkal és családokkal is).  $\overline{C}_k^j$  ( $\overline{P}_k^j$ ) jelöli a legkisebb olyan  $n$  számot, melyre létezik olyan  $n$  csúcsú, síkbarajzolható,  $k$ -összefüggő gráf, melyben bármely  $j$  csúcshoz létezik azokat elkerülő leghosszabb kör (út).

Az 1.2 tétel felhasználható a  $\overline{C}_3^1$ ,  $\overline{C}_3^2$ ,  $\overline{P}_3^1$ , and  $\overline{P}_3^2$  számokra vonatkozó becslések javítására is. A 2011-ben ismert legjobb becslések az alábbiak voltak:  $\overline{C}_3^1 \leq 48$ ,  $\overline{C}_3^2 \leq 4277$ ,  $\overline{P}_3^1 \leq 188$  és  $\overline{P}_3^2 \leq 16926$ .

**1.7 Következmény (Araya-Wiener, 2011 [60])**  $\overline{C}_3^1 \leq 42$ ,  $\overline{C}_3^2 \leq 3701$ ,  $\overline{P}_3^1 \leq 164$ ,  $\overline{P}_3^2 \leq 14694$ .

## 1.2. 3-reguláris síkbarajzolható hypohamiltonian és hypotraceable gráfok

Legyen  $G$  az 1.3. ábrán látható gráf.



1.3. ábra: A  $G$  gráf

**1.8 Tétel (Araya-Wiener, 2011 [60])**  $G$  3-reguláris síkbarajzolható hypohamiltonian gráf.

$G$  3-regularitása és síkbarajzolhatósága magától értetődő, a csúcsok törlésével kapott gráfokban Hamilton-kört találni pedig nem nehéz. Annak bizonyítása azonban, hogy magának a gráfnak nincs Hamilton-köre, most is Grinberg tételén [17] alapul. A következő tétel az 1.5 Tétel 3-reguláris esetre vonatkozó változata.

**1.9 Tétel (Araya-Wiener, 2011 [4])** Minden  $n \geq 86$  páros szám esetén létezik  $n$  csúcsú, 3-reguláris, síkbarajzolható, hypohamiltonian gráf.

**1.10 Következmény (Araya-Wiener, 2011 [4])** Létezik 340 csúcsú, 3-reguláris, síkbarajzolható, hypotraceable gráf és minden  $n \geq 356$  páros szám esetén létezik  $n$  csúcsú, 3-reguláris, síkbarajzolható, hypotraceable gráf.

**1.11 Következmény (Araya-Wiener, 2011 [4])**  $\overline{C}_3^2 \leq 2765$ ,  $\overline{P}_3^2 \leq 10902$ .

## 2. fejezet

# Második téziscsoport: minimális levélszámú feszítőfák

A MINLST és a MAXIST probléma bemenete is egy összefüggő gráf, a feladat az első esetben egy minimális levélszámú feszítőfa megadása, míg a második esetben a belső csúcsok (nem levelek) számát kell maximalizálnunk. Bár a két probléma optimális megoldása ugyanolyan nehéz, megmutatjuk, hogy szemben a MINLST-vel, a MAXIST jól approximálható.

### 2.1. Maximális belső csúcsszámú feszítőfák

Először leírjuk a lineáris futásidejű ILST (Independent Leaves Spanning Tree) algoritmust, mely vagy olyan feszítőfát talál, melynek csak két levele van (vagyis Hamilton-út) vagy a levelei független ponthalmazt alkotnak. Az ilyen feszítőfákról nem nehéz megmutatni, hogy legalább feleannyi belső csúcst tartalmaznak, mint az optimális.

Az algoritmus alapja a jól ismert mélységi bejárás (DFS), a továbbiakban használjuk a DFS leírásában szereplő szokásos elnevezéseket, ld. pl. [31]. Egy  $F$  DFS-fa egy csúcsát  $d$ -levélnek nevezzük, ha nincs gyereke. A  $d$ -levelek természetesen levelei  $F$ -nek és  $F$  egyetlen olyan levele, amely nem  $d$ -levél, a gyökér lehet. Mivel irányítatlan gráf DFS-fájához nem tartozhat keresztél, a  $d$ -levelek függetlenek, előfordulhat azonban, hogy egy vagy több  $d$ -levél szomszédos a gyökérrel. Ilyenkor az algoritmus a DFS futtatása után két alkalmas él cseréjével gondoskodik arról, hogy a levelek csakugyan függetlenek legyenek:

---

**Algoritmus:** ILST (Independent Leaves Spanning Tree)

---

**Input:**  $G = (V, E)$  irányítatlan gráf

**Output:**  $T$  feszítőfa, melynek levelei függetlenek

$T \leftarrow \text{DFS}(G)$  ; //  $G$  tetszőleges DFS-fája

$r \leftarrow T$  gyökere;

**if**  $T$  nem Hamilton-út és  $d_T(r) = 1$  és  $l$   $d$ -levél, melyre  $(r, l) \in E(G)$  **then**

    //  $r$  levél és szomszédos egy másik  $l$  levéllel

$x \leftarrow$  az  $l$ -hez legközelebbi elágazás ( $\geq 3$  fokú csúcs)  $T$ -ben;

$y \leftarrow x$  szomszédja az  $(l, x)$  úton;

    Adjuk hozzá az  $(l, r)$  élet  $T$ -hez;

    Töröljük az  $(x, y)$  élet  $T$ -ből;

**return**  $T$ ;

---

**2.1 Állítás** Az *ILST* algoritmus kimenete vagy Hamilton-út vagy olyan feszítőfa, melynek levelei függetlenek.

Világos, hogy az *ILST* lineáris idejű és nem nehéz belátni, hogy egy független levelű feszítőfa legalább feleannyi belső csúcsot tartalmaz, mint az optimum. Mindebből már következik az alábbi tétel.

**2.2 Tétel (Salamon-Wiener, 2008 [39])** Az *ILST* algoritmus 2-approximáció a *MAXIST* problémára.

A mélységi bejárás során (és így persze az *ILST* algoritmus esetében is) az aktuális csúcs még meg nem látogatott szomszédai közül tetszőlegesen választunk. Az alábbiakban a DFS egy olyan finomítását írjuk le, melyben ezen csúcsok közül azt választjuk, amelyiknek a legkevesebb még meg nem látogatott szomszédja van. Az így kapott RDFS (Refined Depth First Search) algoritmus az *ILST*-nél sokkal jobb approximációs faktort biztosít karommentes, illetve 3-reguláris gráfok esetén. Az RDFS kimenetét RDFS-fának fogjuk nevezni.

---

**Algoritmus: RDFS (Refined Depth First Search)**

---

**Input:**  $G = (V, E)$  irányítatlan gráf

**Output:**  $G$  egy  $T$  RDFS-fája

**begin**

$T \leftarrow (V, \emptyset);$

**foreach**  $v \in V(G)$  **do**

$\text{dfs}[v] \leftarrow 0;$  //  $v$  DFS-száma

$\text{actdeg}[v] \leftarrow d_G(v);$  //  $v$  meg nem látogatott szomszédainak száma

$k \leftarrow 0;$

// a már meglátogatott csúcsok száma

$r \leftarrow G$  egy véletlenszerűen választott csúcsa;

RDFSNode( $r$ );

**return**  $T;$

// Bejárás a  $v$  csúcsból

**function** RDFSNode( $v$ )

**begin**

$k \leftarrow k + 1;$

$\text{dfs}[v] \leftarrow k;$

**foreach**  $v$ -nek a  $w$  szomszédjára **do**  $\text{actdeg}[w] \leftarrow \text{actdeg}[w] - 1;$

**while**  $\text{actdeg}[v] > 0$  **do**

// Finomítjuk a DFS-t a csúcs választásával

// a következő meglátogatandó csúcs.

$\Delta$   $w \leftarrow v$  olyan szomszédja, mely még nincs meglátogatva és minimális rá az

$\text{actdeg}[\cdot]$  érték;

Adjuk hozzá a  $(v, w)$  élet  $T$ -hez;

RDFSNode( $w$ );

---

Könnyen látható, hogy az RDFS futásideje polinomiális: az algoritmust a szokványos DFS-től csak a ( $\Delta$ ) sor különbözteti meg, ahol legfeljebb  $\Delta(G)$  lépésben megtaláljuk a minimumot ( $\Delta(G)$  a  $G$  maximális fokszáma). Ezt a sort legfeljebb egyszer hajtjuk végre  $G$  minden élére, így az algoritmus teljes futásideje  $O(\Delta(G)|E|)$ .

**2.3 Tétel (Salamon-Wiener, 2008 [39])** Az *RDFS* algoritmus  $\frac{3}{2}$ -approximáció a *MAXIST* problémára karom-mentes bemenetek esetén.

**2.4 Tétel (Salamon-Wiener, 2008 [39])** Az *RDFS* algoritmus  $\frac{6}{5}$ -approximáció a *MAXIST* problémára 3-reguláris bemenetek esetén.

**Megjegyzés** 3-reguláris gráfok esetén a fenténél valamivel több teljesül: az *RDFS*-fák leveleinek száma ilyenkor legfeljebb  $\frac{n}{6} + \frac{4}{3}$ .



## 3. fejezet

# Harmadik téziscsoport: Levél-kritikus és levél-stabil gráfok

**3.1 Definíció** A  $G$  gráf leveleinek számát  $l(G)$  jelöli. A  $G$  gráf  $ml(G)$ -vel jelölt minimális levél-száma  $k$ , ha  $G$ -nek létezik  $k$  levelű feszítőfája, de nem létezik  $k$ -nál kevesebb levelű feszítőfája, sem Hamilton-köre. A Hamilton-körrel rendelkező gráfok minimális levélszáma legyen  $l$ .

**3.2 Definíció** A  $G$  gráf  $l$ -levél-kritikus, ha  $ml(G) = l$ , de bármely  $v$  csúcsra  $ml(G - v) = l - 1$ . A  $G$  gráf  $l$ -levél-stabil, ha  $ml(G) = l$  és bármely  $v$  csúcsra  $ml(G - v) = l$ .

### 3.1. Konstrukciók

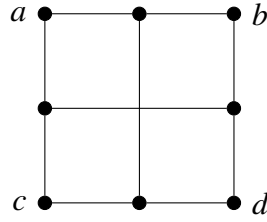
A levél-kritikus és levél-stabil gráfok konstruálásához az alábbi definíciókra lesz szükségünk.

**3.3 Definíció** Egy  $G$  gráf  $(a, b)$  csúcspárját jó párnak nevezzük, ha van  $a$  és  $b$  között Hamilton-út  $G$ -ben. Egy csúcspárból álló  $((a, b), (c, d))$  párt pedig akkor nevezünk jónak, ha létezik  $G$ -nek olyan feszítő részgráfja, mely egy  $a$  és  $b$ , illetve egy  $c$  és  $d$  közti pontdiszjunkt útból áll.

**3.4 Definíció (Hsu, Lin [24])** A  $(H, a, b, c, d)$  ötös J-cell, ha  $H$  gráf,  $a, b, c, d$  pedig  $H$  csúcsai és fennállnak az alábbiak.

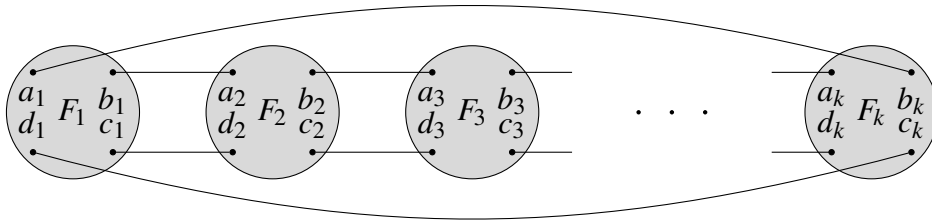
1. Az  $(a, d)$  és  $(b, c)$  párok jók a  $H$  gráfban.
2. Az  $(a, b)$ ,  $(a, c)$ ,  $(b, d)$ ,  $(c, d)$ ,  $((a, b), (c, d))$ ,  $((a, c), (b, d))$  párok egyike sem jó a  $H$  gráfban.
3. Minden  $v \in V(H)$  esetén létezik jó az  $(a, b)$ ,  $(a, c)$ ,  $(b, d)$ ,  $(c, d)$ ,  $((a, b), (c, d))$ ,  $((a, c), (b, d))$  párok között a  $H - v$  gráfban.

Érdeemes megemlíteni, hogy a Chvátal által (új hypohamiltonian gráfok konstruálásához) használt ún. flip-flopok (ld. 6. oldal és [10]) speciális J-cellek: flip-flopok esetében az  $((a, d), (b, c))$  pár is jó kell legyen  $H$ -ban és minden  $v \in V(H)$  esetén az  $(a, c)$ ,  $(b, d)$ ,  $((a, b), (c, d))$ ,  $((a, c), (b, d))$  párok közt kell legyen legalább egy jó  $(H - v)$ -ben. Már Thomassen megfigyelte, hogy egy hypohamiltonian gráf két szomszédos 3 fokú csúcsát törölve J-cellt kapunk [48] (ő nem nevezte el ugyanakkor ezt a gráftípust) és nem nehéz belátni, hogy egy J-cellhez egy  $u$  és egy  $v$  csúcsot, továbbá az  $(u, a)$ ,  $(u, d)$ ,  $(v, c)$ ,  $(v, d)$ ,  $(u, v)$  éleket adva hypohamiltonian gráfot kapunk (ezt flip-flopokra mutatta meg Chvátal [10], de a bizonyítás J-cellekre is működik). Mindebből következik, hogy a legkisebb J-cellt (amely egyébként flip-flop is) a Petersen-gráfból kapjuk, két szomszédos csúcs törlésével (3.1. ábra).



3.1. ábra: A legkisebb J-cell

Legyenek most  $F_i = (H_i, a_i, b_i, c_i, d_i)$  J-cellek minden  $i = 1, 2, \dots, k$  esetén. Legyen  $G_k$  az a gráf, mely tartalmazza a  $H_1, H_2, \dots, H_k$  gráfok egy-egy csúcsdiszjunkt példányát és a  $(b_i, a_{i+1}), (c_i, d_{i+1})$  éleket minden  $i = 1, 2, \dots, k-1$  esetén, továbbá a  $(b_k, a_1), (c_k, d_1)$  éleket. A konstrukció a 3.2. ábrán látható.



3.2. ábra: A  $G_k$  gráf konstrukciója

**3.5 Tétel (Wiener, 2015 [57, 58])** Minden  $l \geq 2$  esetén a  $G_{2l+1}$  gráf  $(l+1)$ -levél-kritikus.

**3.6 Tétel (Wiener, 2015 [57, 58])** Minden  $l \geq 2$  esetén a  $G_{2l}$  gráf  $l$ -levél-stabil.

**Megjegyzés** A J-cellek alkalmas választásával elérhető, hogy a kapott levél-kritikus és levél-stabil gráfok további tulajdonságokkal is rendelkezzenek. Egy  $(H, a, b, c, d)$  J-cellt 3-regulárisnak nevezünk, ha az  $a, b, c, d$  csúcsok foka 2, a többi csúcs foka pedig 3. Nyilvánvaló, hogy ha a  $G_k$  konstrukciójában szereplő összes J-cell 3-reguláris, akkor  $G_k$  is az. Szintén magától értetődő, hogy ha a J-cellek síkbarajzolhatóak, akkor  $G_k$  is síkbarajzolható lesz. Mivel egy hypohamiltonian gráf két szomszédos 3 fokú csúcsát törölve J-cellt kapunk és szomszédos 3 fokú csúcsokat tartalmazó  $n$  csúcsú hypohamiltonian gráfok minden kellően nagy  $n$  esetén léteznek [60], a fenti konstrukció segítségével minden kellően nagy  $n$  és tetszőleges  $l \geq 3$  esetén tudunk  $n$  csúcsú síkbarajzolható  $l$ -levél-kritikus és  $(l-1)$ -levél-stabil gráfot találni. Mivel 3-reguláris hypohamiltonian gráfokból kapott J-cellek 3-regulárisak és minden kellően nagy páros  $n$  esetén létezik  $n$  csúcsú síkbarajzolható, 3-reguláris hypohamiltonian gráf [4], minden kellően nagy páros  $n$  és  $l \geq 2$  esetén létezik  $n$  csúcsú, 3-reguláris, síkbarajzolható  $l$ -levél-kritikus és  $(l-1)$ -levél-stabil gráf is. A legkisebb  $l$ -levél-kritikus, illetve  $l$ -levél-stabil gráf, melyet a konstrukció segítségével kaphatunk  $16l - 8$ , illetve  $16l$  csúcsú (ehhez az összes  $F_i$ -nek a 3.1. ábrán látható J-cellel izomorfnek kell lennie).

## 3.2. 2 összefüggőségi számú levél-kritikus gráfok

A hypohamiltonian és hypotractable gráfok struktúrájáról nagyon keveset lehet tudni, ez természetesen igaz lesz a levél-kritikus és a levél-stabil gráfokra is (bár azt könnyű belátni, hogy

minden levél-kritikus gráf kétszeresen összefüggő és háromszorosan élösszefüggő). Ebben az alfejezetben Thomassen egy lemmájának általánosításaként a levél-kritikus 2-töredékek egy karakterizációját adjuk meg.

**3.7 Definíció** Egy  $G$  gráf összefüggőségi száma  $k$ , ha  $G$   $k$ -összefüggő, de nem  $(k + 1)$ -összefüggő.

**3.8 Definíció** Legyen a  $G$  gráf összefüggőségi száma  $k$  és legyen  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  a  $G$  egy vágása. Legyen továbbá  $H$  a  $G - X$  gráf komponenseinek egyike. Ekkor a  $H + X$  gráfot a  $G$  egy  $k$ -töredékének nevezzük.

**3.9 Definíció** Legyen  $G$  egy gráf,  $a, b \in V(G)$ .  $G$  egy  $F$  részgráfját  $(G, a, b)$ -szépnek nevezzük, ha az alábbi három tulajdonság közül legalább az egyik érvényes rá.

1.  $F$  fa, melyre  $l(F) \leq ml(G - a) - 1$ .
2.  $F$  fa, melyre  $l(F) \leq ml(G - a)$  és  $a$  vagy  $b$  levele  $F$ -nek.
3.  $F$  két komponensű erdő, melyre  $l(F) \leq ml(G - a) + 1$ ,  $a$  és  $b$   $F$  különböző komponenseiben vannak és mindketten levelei  $F$ -nek.

A fentieket használva az alábbi lemma bizonyítható a levél-kritikus gráfok 2-töredékeiről.

**3.10 Lemma** Legyen  $G_1$  egy  $(l + 1)$ -levél-kritikus gráf 2-töredéke, mely az  $\{a, b\}$  vágáshoz tartozik. Ekkor  $G_1$ -nek nincs  $(G_1, a, b)$ -szép feszítőerdője, de bármely  $v \in V(G_1)$  esetén  $(G_1 - v)$ -nek már van  $(G_1, a, b)$ -szép feszítőerdője.

A 3.10. Lemmában szereplő tulajdonság karakterizálja is a levél-kritikus 2-töredékeket. Ennek belátásához meg kell mutatnunk, hogy az említett tulajdonsággal rendelkező gráfok mind egy alkalmas levél-kritikus gráf 2-töredékei. Az alábbi lemma ennél picivel többet mond ki.

**3.11 Lemma (Wiener, 2015 [57, 58, 61])** Legyen a  $G$  gráf összefüggőségi száma 2 és legyen  $\{a, b\}$  a  $G$  egy vágása. Legyenek  $G_1$  és  $G_2$  az  $\{a, b\}$  vágáshoz tartozó 2-töredékei  $G$ -nek. Tegyük fel továbbá, hogy  $G_i$ -nek nincs  $(G_i, a, b)$ -szép feszítőerdője, de bármely  $v \in V(G_i)$  esetén  $(G_i - v)$ -nek már van  $(G_i, a, b)$ -szép feszítőerdője  $i = 1, 2$  esetén. Ekkor a  $G$  gráf  $l$ -levél-kritikus, ahol  $l = ml(G_1 - a) + ml(G_2 - a) - 1$ .

A Thomassen [46] cikkének 5.1 Lemmáját általánosító alábbi tétel már könnyen következik a 3.10. és 3.11. Lemmákból.

**3.12 Tétel (Wiener, 2015 [57, 58, 61])** Legyen  $G$  egy gráf,  $a, b \in V(G)$ .  $G$  egy levél-kritikus gráf  $\{a, b\}$  vágásához tartozó 2-töredéke akkor és csak akkor, ha  $G$ -nek nincs  $(G, a, b)$ -szép feszítőerdője, de bármely  $v \in V(G)$  esetén  $(G - v)$ -nek van  $(G, a, b)$ -szép feszítőerdője.

### 3.3. Út-kritikus és pókszerű gráfok

**3.13 Definíció** Egy  $G$  gráf  $\mu(G)$ -vel jelölt útfedési száma a csúcsok fedéséhez szükséges pont-diszjunkt utak minimális száma (az egy csúcsú út is útnak számít).

**3.14 Definíció** Legyen  $\mu \geq 2$  tetszőleges egész. A  $G$  gráf  $\mu$ -út-kritikus, ha  $\mu(G) = \mu$  és  $\mu(G - v) = \mu - 1$  teljesül minden  $v \in V(G)$  esetén.

**3.15 Definíció (Gargano, Hammar, Hell, Stacho és Vaccaro [16])** A  $G$  gráf  $F$  feszítőfája feszítő pók, ha legfeljebb egy olyan csúcsa van, melynek foka nagyobb, mint 2. Ilyenkor  $F$  középpontja a 2-nél nagyobb fokú csúcs (ha van ilyen, egyébként tetszőleges csúcs tekinthető a középpontnak). Egy  $G$  gráfot pókszerűnek nevezünk, ha bármely  $v$  csúcsához létezik  $G$ -nek olyan feszítő pókjá, melynek középpontja  $v$ .

**3.16 Tétel (Wiener, 2015 [59, 61])** Legyen  $k$  tetszőleges természetes szám. Ekkor bármely  $v \in V(G_{4k+5})$  esetén teljesül, hogy  $\mu(G_{4k+5} - v) = \mu(G_{4k+5}) - 1 = k + 1$ , vagyis a  $G_{4k+5}$  gráf  $(k + 2)$ -út-kritikus.

A 3.16 tétel segítségével könnyen készíthetünk Hamilton-út nélküli, nem hypotraceable, pókszerű gráfokat. Legyen  $G_k^j$  az a gráf, melyet  $G_k$ -ből úgy kapunk, hogy hozzáveszünk  $j$  új csúcsot és minden új csúcsot összekötünk  $G_k$  összes csúcsával.

**3.17 Tétel (Wiener, 2015 [58, 59, 61])** Bármely  $k \geq 1$  esetén  $G_{4k+5}^k$  olyan pókszerű gráf, melynek nincs Hamilton-útja és nem is hypotraceable.

**Megjegyzés** A bizonyítás ismeretében nem nehéz végiggondolni, hogy ha az új csúcsok közé tetszőlegesen éleket húzunk be, akkor a gráf továbbra sem tartalmaz Hamilton-kört és hypotraceable sem lesz, ugyanakkor a pókszerű tulajdonságot megtartja. Ily módon könnyűszerrel konstruálhatunk olyan Hamilton-út nélküli, nem hypotraceable, pókszerű gráfot, mely feszített részgráfként tartalmaz egy előre megadott  $H$  gráfot.

## 3.4. Adott csúcsokat elkerülő leghosszabb utak

A Bevezetésben esett már szó Gallai kérdéséről (igaz-e, hogy minden összefüggő gráf leghosszabb útjainak van közös csúcsa) és Walther válaszáról [54], a 12. oldalon pedig az ezekhez kapcsolódó, T. Zamfirescu által definiált [62]  $\overline{C}_k^j$  és  $\overline{P}_k^j$  számokról is. Az 1.1. és 1.2. alfejezetekben új felső becsléseket adtunk a  $\overline{C}_3^1$ ,  $\overline{C}_3^2$ ,  $\overline{P}_3^1$ ,  $\overline{P}_3^2$  számokra. Jelen alfejezetben a Gallai kérdéséhez és Walther válaszához szintén szorosan kötődő, Grünbaum által definiált [19]  $\Pi(j, m)$  gráfcsaládokról lesz szó. Egy gráf akkor tartozik  $\Pi(j, m)$ -hez, ha bármely  $j$  darab csúcsához létezik olyan leghosszabb útja, mely az adott  $j$  csúcsot elkerüli és a leghosszabb utak pontosan  $m$  csúcsot nem tartalmaznak a gráfból. Így például  $\Pi(1, 1)$  a hypotraceable gráfok családja. Walther [54] minden  $m \geq 4$  esetén konstruált  $\Pi(1, m)$ -beli gráfokat, T. Zamfirescu [63] pedig  $\Pi(1, m)$ -beli kétszeresen összefüggő síkgráfokat, illetve háromszorosan összefüggő gráfokat is, minden  $m \geq 1$ -re. Sőt, ha T. Zamfirescu konstrukciójában a Horton-gráf helyett Thomassen valamely háromszorosan összefüggő hypotraceable gráfját [48] használjuk, akkor  $\Pi(1, m)$ -beli, háromszorosan összefüggő síkgráfokat is kaphatunk. Az alábbi tétel szerint a 3.1. alfejezetben megadott levél-kritikus és levél-stabil gráfok is  $\Pi(1, m)$ -beliek.

**3.18 Tétel (Wiener, 2015 [58, 61])**  $G_{k+4} \in \Pi(1, k)$  minden  $k \geq 1$  esetén.

Ha a  $G_k$  gráfok konstrukciója során mindegyik  $F_i$  J-cellt a 3.1. ábrán látható 8 csúcsú flip-flopnak választjuk, akkor a kapott  $G_k$  gráfok a legkisebb ismert példákat adják háromszorosan összefüggő  $\Pi(1, m)$ -beli gráfokra. Ha az  $F_i$ -ket a Jooyandeh és szerzőtársai [26] által konstruált 40 csúcsú hypohamiltonian gráfokból kapott J-celleknek választjuk, akkor pedig a legkisebb ismert háromszorosan összefüggő  $\Pi(1, m)$ -beli síkgráfokat kapjuk.

## 4. fejezet

# Negyedik téziscsoport: Hipergráfok nyomai

Az első  $n$  pozitív egész szám halmazát  $[n]$  jelöli, egy  $X \subseteq [n]$  halmaz komplementerét pedig  $\bar{X}$ . A  $(V, \mathcal{E})$  pár *hipergráf*, ha  $V$  tetszőleges halmaz (a hipergráf *alaphalmaza*),  $\mathcal{E}$  (a hipergráf *élhalmaza*) pedig egy olyan multihalmaz, melynek minden eleme  $V$  egy részhalmaza. A hipergráfok alaphalmaza (hacsak kifejezetten mást nem mondunk) mindig  $[n]$ . Egy hipergráf *egyszerű*, ha nem tartalmaz többszörös éleket, vagyis ha  $\mathcal{E}$  halmaz is. Az egyszerű hipergráfokat *halmazrendszereknek* is fogjuk hívni, továbbá ha ez nem okozhat félreértést, akkor a hipergráfokat az élhalmazukkal azonosítjuk.

**4.1 Definíció** Legyen  $\mathcal{H} = ([n], \mathcal{E})$  hipergráf. Egy  $X \subseteq [n]$  halmaz  $m_{\mathcal{H}}(X)$ -szel jelölt multiplicitása  $\mathcal{H}$ -ban az  $X$  megjelenéseinek száma az  $\mathcal{E}$  élhalmazban. A  $\mathcal{H}$  hipergráf *leszálló*, ha  $A \in \mathcal{E}$  és  $B \subseteq A$  esetén  $B \in \mathcal{E}$  is mindig teljesül. Tetszőleges  $R \subseteq [n]$  esetén a  $\mathcal{H}$  hipergráf  $R$ -en vett nyoma az a hipergráf, melynek alaphalmaza  $R$ , élhalmaza pedig a  $\{H \cap R : H \in \mathcal{E}\}$  multihalmaz.  $\mathcal{H}$ -nak az  $R$ -en vett nyomát  $\mathcal{H}|_R$  jelöli. Egy  $r$  elemű halmazon vett nyomot  $r$ -nyomnak is fogunk hívni.

**4.2 Definíció (Frankl [14])** Az  $(n, m) \rightarrow (r, s)$  reláció pontosan akkor teljesül, ha minden  $(n$  elemű alaphalmazon megadott)  $m$  élű, egyszerű hipergráfnak van olyan  $r$ -nyoma, melynek legalább  $s$  különböző éle van.

Bondy [7] mutatta meg, hogy  $(n, m) \rightarrow (n-1, m)$  teljesül, ha  $m \leq n$ , Bollobás [6] pedig azt bizonyította, hogy  $(n, m) \rightarrow (n-1, m-1)$  teljesül, ha  $m \leq \lceil \frac{3}{2}n \rceil$ . Sauer [40] (és tőle függetlenül Vapnik és Chervonenkis [53], illetve Perles és Shelah [41]) igazolta, hogy  $(n, m) \rightarrow (r, 2^r)$  teljesül, ha  $m > \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i}$ . Frankl [14] és tőle függetlenül Alon [3] bizonyította e három tétel egy közös általánosítását. Azt mutatták meg, hogy  $(n, m) \rightarrow (r, s)$  akkor és csak akkor teljesül, ha minden  $(n$  elemű alaphalmazon megadott)  $m$  élű, egyszerű, *leszálló*  $\mathcal{H}$  hipergráfhoz létezik olyan  $r$  elemű  $R \subseteq [n]$  halmaz, melyre  $\mathcal{H}|_R$  legalább  $s$  különböző éle tartalmaz. (Alon valójában egy picivel még általánosabb tételt bizonyított.) Nem nehéz végiggondolni, hogy Bondy, Bollobás, illetve Sauer tételei csakugyan következnek a Frankl-Alon tételből.

Valamennyi felsorolt tétel a nyomként kapott hipergráf különböző éleinek számáról szól, a nyomok más függvényeiről keveset tudunk. A következő alfejezetben megmutatjuk, hogy a nyomokban szereplő élek maximális multiplicitása karakterizálható a Frankl-Alon tételhez hasonlóan, *leszálló* hipergráfok segítségével. Azt is belátjuk, hogy ebből a karakterizációból is azonnal következik a Bondy- és a Sauer-tétel, illetve megadunk egy további fontos következményt is.

## 4.1. Élek maximális multiplicitása

**4.3 Definíció** Legyenek  $n, m, r, s$  pozitív egészek. Az  $(n, m) \triangleright (r, s)$  reláció pontosan akkor teljesül, ha bármely  $m$  elemű  $\mathcal{H} \subseteq 2^{[n]}$  halmazrendszerhez létezik egy  $r$  elemű  $X \subseteq [n]$  halmaz, melyre  $\forall S \subseteq \bar{X} : m_{\mathcal{H}|_{\bar{X}}}(S) \leq s$ .

Például  $(n, m) \triangleright (1, 2)$  nyilván teljesül minden  $m$ -re és  $n$ -re. Sőt,  $(n, m) \triangleright (1, 1)$  teljesül minden  $m \leq n$  esetén, ez éppen Bondy tétele. Azt sem nehéz megmutatni, hogy  $(n, n+1) \not\triangleright (1, 1)$  (az egyelemű halmazokat és az üres halmazt tartalmazó rendszer jó ellenpélda lesz). Általánosabban, az  $(n, m) \triangleright (r, 2^r)$  és  $(n, \sum_{i=0}^r \binom{n}{i}) \not\triangleright (r, 2^r - 1)$  állítások is hasonlóan ellenőrizhetők. Az alábbiakban a  $\triangleright$  reláció néhány további, könnyen bizonyítható tulajdonságát adjuk meg.

**4.4 Állítás** Legyenek  $n, m, r, s$  pozitív egészek.

1.  $(n, m) \triangleright (r, s) \Rightarrow (n, m) \triangleright (r, s+1)$ .
2.  $(n, m) \triangleright (r, s) \Rightarrow (n, m-1) \triangleright (r, s)$ .
3.  $(n, m) \triangleright (n-1, m-1)$ . □

A  $\triangleright$  reláció karakterizálásához az alábbi lemmára lesz szükségünk.

**4.5 Lemma** Az  $(n, m) \triangleright (r, s)$  reláció akkor és csak akkor teljesül, ha minden  $m$  elemű  $\mathcal{H} \subseteq 2^{[n]}$  leszálló halmazrendszerhez létezik  $r$  elemű  $X \subseteq [n]$  halmaz, melyre  $\forall S \subseteq \bar{X} : m_{\mathcal{H}|_{\bar{X}}}(S) \leq s$ .

Érdeemes megfigyelni, hogy Bondy tétele már ebből a lemmából is azonnal következik.

**4.6 Tétel (Wiener, 2007 [55])** Az  $(n, m) \triangleright (r, s)$  reláció akkor és csak akkor teljesül, ha minden  $m$  elemű  $\mathcal{H} \subseteq 2^{[n]}$  leszálló halmazrendszerhez létezik  $r$  elemű  $X \subseteq [n]$  halmaz, melyre  $\mathcal{H}|_X$  legfeljebb  $s$  különböző élet tartalmaz.

**4.7 Következmény (Wiener, 2007 [55])** Bármely  $r \leq n$  pozitív egészekre teljesül  $(n, \sum_{i=0}^r \binom{n}{i}) - 1) \triangleright (r, 2^r - 1)$ .

Már esett arról szó, hogy  $(n, \sum_{i=0}^r \binom{n}{i}) \not\triangleright (r, 2^r - 1)$ , így a 4.7. Következmény éles. Érdeemes azt is megfigyelni, hogy a 4.7. Következmény és Sauer tétele ekvivalensek: a  $\mathcal{H}|_R$  nyom akkor és csak akkor tartalmaz  $2^{|R|}$  különböző élet, ha a  $\bar{\mathcal{H}}|_R$  nyom nem tartalmaz  $2^{n-|R|}$  multiplicitású élet. A 4.6. tétel egy további egyszerű következménye, hogy a  $\triangleright$  reláció tranzitív.

Bondy tétele szerint  $(n, m) \triangleright (1, 1)$  minden  $m \leq n$  esetén teljesül, ugyanakkor  $(n, n+1) \not\triangleright (1, 1)$ . A 4.4. Állítás 2. pontja szerint ebből  $(n, m) \not\triangleright (1, 1)$  következik minden  $m > n$  esetén. Ebből és az  $(r, r) \triangleright (1, 1)$  állításból, a  $\triangleright$  reláció tranzitivitása alapján következik, hogy  $(n, m) \not\triangleright (r, r)$  bármely  $m > n$  esetén.

Így tehát  $m > n$  esetén a legkisebb olyan  $s$ , melyre  $(n, m) \triangleright (r, s)$  teljesülhet valamely alkalmas  $r$  esetén,  $s = r + 1$ . Ha azon  $r$  számokat keressük, melyekre  $(n, m) \triangleright (r, r+1)$  teljesül (rögzített  $m$  és  $n$  esetén,  $m > n$ ) csak a legnagyobb ilyen  $r$  számot kell megtalálnunk, hiszen a 4.4. Állítás 3. pontja szerint minden  $r$ -nél kisebb pozitív egészre is teljesül a reláció. Az alábbi tétel erre a maximumértékre ad becslést, mely végtelen sok  $m$  és  $n$  értékre lesz éles.

**4.8 Tétel (Wiener, 2007 [55])** Legyenek  $m$  és  $n$  pozitív egészek, melyekre  $m \geq 2n$  és legyen  $r = \lceil \frac{n^2}{2m-n-2} \rceil$ . Ekkor  $(n, m) \triangleright (r, r+1)$ .

E tételnek egy valamivel erősebb alakját is kimondjuk, de ehhez szükség van a következő definícióra. Egy  $\mathcal{H}$  hipergráf *minimális egyszerű* hipergráf, ha egyszerű, de a csúcsok bármely  $X$  valódi részhalmaza esetén  $\mathcal{H}$ -nak az  $X$ -re vett megszorítása már nem egyszerű. Az  $[n]$  alaphalmazon vett  $m$  élű minimális egyszerű hipergráfok halmazát  $MSH(n, m)$  jelöli.

**4.9 Tétel (Wiener, 2013 [56])** Legyen  $\mathcal{A} \in MSH(n, m)$ . Ekkor létezik olyan  $\left\lceil \frac{n^2}{2m-n-2} \right\rceil$  elemű  $X \subseteq [n]$  halmaz, hogy az  $\mathcal{A}$ -ból  $X$  elemeinek törlésével kapott hipergráfban (vagyis  $\mathcal{A}$ -nak az  $\bar{X}$ -en vett nyomában) minden élnek legfeljebb  $\left\lceil \frac{n^2}{2m-n-2} \right\rceil + 1$  a multiplicitása.

## Irodalomjegyzék

- [1] R. E. L. Aldred, S. Bau, D. A. Holton, B. D. McKay, Nonhamiltonian 3-connected cubic planar graphs. *SIAM J. Disc. Math.* 13 (2000), 25–32.
- [2] R. E. L. Aldred, B. D. McKay, N. C. Wormald, Small Hypohamiltonian Graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 23 (1997), 143–152.
- [3] N. Alon, On the density of sets of vectors, *Discrete Mathematics* 46 (1983), 199–202.
- [4] M. Araya, G. Wiener, On Cubic Planar Hypohamiltonian and Hypotraceable Graphs, *Electronic Journal of Combinatorics* 18, P85. (2011)
- [5] D. Binkele-Raible, H. Fernau, S. Gaspers, M. Liedloff, Exact and Parameterized Algorithms for Max Internal Spanning Tree, *Algorithmica* 65 (2009), 95–128.
- [6] B. Bollobás, unpublished, see in [34] Problem 13.10.
- [7] J. A. Bondy, Induced subsets, *Journal of Combinatorial Theory Ser. B* 12 (1972), 201–202.
- [8] J. Bosák, Hamiltonian lines in cubic graphs. *Theory of Graphs (Internat. Sympos., Rome, 1966)* Gordon and Breach, New York; Dunod, Paris (1967), 35–46.
- [9] J. B. Collier, E. F. Schmeichel, Systematic searches for hypohamiltonian graphs, *Networks* 8 (1978), 193–200.
- [10] V. Chvátal, Flip-flops in hypohamiltonian graphs, *Can. Math. Bull.* 16 (1973), 33–41.
- [11] T. Dvořák, Matchings of quadratic size extend to long cycles in hypercubes, arxiv preprint, <http://arxiv.org/abs/1511.06568> (2015)
- [12] T. Dvořák, V. Koubek, Long paths in hypercubes with a quadratic number of faults, *Information Sciences* 179 (2009), 3763–3771.
- [13] J. Fink, P. Gregor, Long paths and cycles in hypercubes with faulty vertices, *Information Sciences* 179 (2009), 3634–3644.

- [14] P. Frankl, On the trace of finite sets, *Journal of Combinatorial Theory Ser. A* 34 (1983), 41–45.
- [15] T. Gallai, On directed paths and circuits, *Theory of Graphs*, P. Erdős and G. Katona (Editors), Academic Press, New York (1968), 115–118.
- [16] L. Gargano, M. Hammar, P. Hell, L. Stacho, U. Vaccaro, Spanning spiders and light-splitting switches, *Discrete Mathematics* 285 (2004), 83–95. (Earlier versions: L. Gargano, P. Hell, L. Stacho, U. Vaccaro, Spanning trees with bounded number of branch vertices, *ICALP02, Lecture Notes in Computer Science* 2380 (2002), 355–365. and L. Gargano, M. Hammar, There are spanning spiders in dense graphs (and we know how to find them), *ICALP03, Lecture Notes in Computer Science* 2719 (2003), 802–816.)
- [17] E. J. Grinberg, Plane homogeneous graphs of degree three without Hamiltonian circuits, *Latvian Math. Yearbook, Izdat. Zinatne, Riga* 4 (1968), 51–58. (In Russian)
- [18] B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, John Wiley and Sons, New York, 1967.
- [19] B. Grünbaum, Vertices missed by longest paths or circuits, *Journal of Combinatorial Theory Ser. A* 17 (1974), 31–38.
- [20] W. Hatzel, Ein planarer hypohamiltonscher Graph mit 57 Knoten, *Math. Ann.* 243 (1979), 213–216.
- [21] J. C. Herz, T. Gaudin, P. Rossi, Solution du problème No. 29, *Revue Francaise de Recherches Opérationelle* 8 (1964), 214–218.
- [22] D. A. Holton, B. D. McKay, The smallest non-hamiltonian 3-connected cubic planar graphs have 38 vertices, *Journal of Combinatorial Theory Ser. B* 45 (1988), 315–319.
- [23] D. A. Holton and J. Sheehan, *Hypohamiltonian graphs, The Petersen Graph*, Cambridge University Press, New York, 1993.
- [24] L.-H. Hsu and C.-K. Lin, *Graph Theory and Interconnection Networks*, CRC Press, Boca Raton, 2008.
- [25] M. Jooyandeh, *Recursive Algorithms for Generation of Planar Graphs*, PhD thesis, Australian National University (2014)
- [26] M. Jooyandeh, B. D. McKay, P. R. J. Östergård, V. H. Pettersson, C. T. Zamfirescu, Planar Hypohamiltonian Graphs on 40 Vertices, arxiv preprint, <http://arxiv.org/abs/1302.2698>, (2013)
- [27] S. F. Kapoor, H. V. Kronk, and D. R. Lick, On detours in graphs, *Canad. Math. Bull.* 11 (1968), 195–201.
- [28] D. Karger, R. Motwani, G. D. S. Ramkumar, On Approximating the Longest Path in a Graph, *Algorithmica* 18 (1997), 82–98.
- [29] M. Knauer, J. Spoerhase, Better Approximation Algorithms for the Maximum Internal Spanning Tree Problem, *Algorithmica* 71 (2013), 797–811.



- [30] J. Lederberg, Systematics of organic molecules, graph theory and Hamiltonian circuits, Instrumentation Research Laboratory Report, no. 1040, Stanford University, Stanford, Calif., 1144 (1966)
- [31] J. van Leeuwen (ed.), Handbook of Theoretical Computer Science A: Algorithms and Complexity, Elsevier, 1990.
- [32] W. Li, J. Chen, J. Wang, Deeper Local Search for Better Approximation on Maximum Internal Spanning Trees, Lecture Notes in Computer Science 8737 (2014), 642–653.
- [33] X. Li, D. Zhu, Approximating the Maximum Internal Spanning Tree Problem via a Maximum Path-Cycle Cover, Lecture Notes in Computer Science 8889 (2014), 467–478.
- [34] L. Lovász, Combinatorial Problems and Exercises, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [35] H.-I. Lu, R. Ravi, The Power of Local Optimization: Approximation Algorithms for Maximum-leaf Spanning Tree (DRAFT), CS-96-05, Department of Computer Science, Brown University, Providence, Rhode Island, 1996.
- [36] H.-I. Lu, R. Ravi, Approximation for maximum leaf spanning trees in almost linear time, J. Algorithms 29 (1998), 132–141.
- [37] G. Salamon, Approximating the Maximum Internal Spanning Tree problem, Theoretical Computer Science 410 (2009), 5273–5284.
- [38] G. Salamon, Degree-Based Spanning Tree Optimization, PhD Thesis, Budapest University of Technology and Economics, [http://doktori.math.bme.hu/Ertekezesek/salamon\\_dissertation.pdf](http://doktori.math.bme.hu/Ertekezesek/salamon_dissertation.pdf) (2010)
- [39] G. Salamon, G. Wiener, On Spanning Trees with Few Leaves, Information Processing Letters 105 (2008), 164–169.
- [40] N. Sauer, On the density of families of sets, Journal of Combinatorial Theory Ser. A 13 (1972), 145–147.
- [41] S. Shelah, A combinatorial problem: stability and order for models and theories in infinitary languages, Pacific J. Math. 41 (1972), 247–261.
- [42] R. Solis-Oba, 2-Approximation algorithm for finding a spanning tree with maximum number of leaves, Lecture Notes in Computer Science 1461 (Proc. of 6th ESA Symposium) (1998), 441–452.
- [43] R. Sousselier, Probleme No. 29: Le Cercle des Irascibles, Revue Française de Recherches Operationelles 7 (1963), 405–406.
- [44] B. Schauerte, C. T. Zamfirescu, Regular graphs in which every pair of points is missed by some longest cycle. An. Univ. Craiova, Ser. Mat. Inf. 33 (2006), 154–173.
- [45] P. G. Tait, Note on a theorem in geometry of position, Trans. Roy. Soc. Edinburgh 29 (1880), 657–660.
- [46] C. Thomassen, Hypohamiltonian and hypotractable graphs, Discrete Mathematics 9 (1974), 91–96.

- [47] C. Thomassen, On hypohamiltonian graphs, *Discrete Mathematics* 10 (1974), 383–390.
- [48] C. Thomassen, Planar and infinite hypohamiltonian and hypotraceable graphs, *Discrete Mathematics* 14 (1976), 377–389.
- [49] C. Thomassen, Hypohamiltonian graphs and digraphs, *Theory and Applications of Graphs*, Lecture Notes in Mathematics No. 642, Springer, Berlin (1978), pp. 557–571.
- [50] C. Thomassen, Planar cubic hypohamiltonian and hypotraceable graphs, *J. Comb. Theory B* 30 (1981), 36–44.
- [51] P. Turán, On an extremal problem in graph theory, *Mat. Fiz. Lapok* 48 (1941), 436–452. (in Hungarian)
- [52] W. T. Tutte, On hamiltonian circuits. *J. London Math. Soc.* 21 (1946), 98–101.
- [53] V. N. Vapnik, A. Ya. Chervonenkis, On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities, *Th. Prob. Appl.* 16 (1971), 264–280.
- [54] H. Walther, Über die Nichtexistenz eines Knotenpunktes, durch den alle längsten Wege eines Graphen gehen, *J. Comb. Theory* 6 (1969), 1–6.
- [55] G. Wiener, Edge Multiplicity and Other Trace Functions, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 29 (2007), 491–495.
- [56] G. Wiener, Rounds in combinatorial search, *Algorithmica* 67 (2013), 315–323.
- [57] G. Wiener, Leaf-critic graphs, *Proc. of the 3rd Bordeaux Graph Workshop* (2014), 101–102.
- [58] G. Wiener, Leaf-critical and leaf-stable graphs, *Proc. of the 9th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and its Applications*, Fukuoka (2015), 267–278.
- [59] G. Wiener, On non-traceable, non-hypotraceable, arachnoid graphs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 49 (2015), 621–627.
- [60] G. Wiener, M. Araya: On planar hypohamiltonian graphs, *Journal of Graph Theory* 67 (2011), 55–68.
- [61] G. Wiener, Leaf-critical and leaf-stable graphs, *Journal of Graph Theory*, megjelenés alatt
- [62] T. Zamfirescu, A two-connected planar graph without concurrent longest paths, *Journal of Combinatorial Theory Ser. B* 13 (1972), 116–121.
- [63] T. Zamfirescu, On longest paths and circuits in graphs, *Math. Scand.* 38 (1976), 211–239.
- [64] C. Zamfirescu and T. Zamfirescu, A planar hypohamiltonian graph with 48 vertices, *Journal of Graph Theory* 55 (2007), 338–342.
- [65] C. T. Zamfirescu, On Hypohamiltonian and Almost Hypohamiltonian Graphs, *Journal of Graph Theory* 79 (2015), 63–81.