Bevezetés a számításelméletbe 1. gyakorlat
8. feladatsor (2002. ápr. 12.)

1. Keresd meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat (vagyis határozd meg a sajátaltereket)!

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

2. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Határozd meg V következő lineáris transzformációinak sajátértékeit, sajátvektorait és a karakterisztikus polinomot!
   (a) origó körüli $+90^o$-os forgatás;
   (b) $\mathcal{O}$ leképezés (minden vektorhoz a $\underline{0}$-t rendeli);
   (c) $x = y$ egyenesre való vetítés.

3. Melyek igazak az alábbi állítások közül (tetszőleges vektortérben)? ($\mathcal{A}^2$ az $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}$ leképezést jelöli, $\mathcal{O}$ pedig a null-leképezést, mely minden vektorhoz a $\underline{0}$-t rendeli)
   (a) Ha $\underline{v}$ sajátvektora $\mathcal{A}$-nak, akkor $\underline{v}$ sajátvektora $\mathcal{A}^2$-nek;
   (b) Ha $\underline{v}$ sajátvektora $\mathcal{A}^2$-nek, akkor $\underline{v}$ sajátvektora $\mathcal{A}$-nak;
   (c) Ha 0 sajátértéke $\mathcal{A}^2$-nek, akkor 0 sajátértéke $\mathcal{A}$-nak;
   (d) Ha $\mathcal{A}^2 = \mathcal{O}$, akkor $\mathcal{A}$-nak a 0 az egyetlen sajátértéke.

4. Végezd el az alábbi műveleteket!

   a) $\sqrt{-5}$ *b)* $\sqrt{2 + \sqrt{12}i}$ *c)* $\sqrt[4]{3 + 3i}$

5. Oldd meg a komplex számok halmazán a következő egyenleteket:
   (a) $z^2 = 2i$
   (b) $z^2 = 7 - 6\sqrt{2}i$
   (c) $z^2 - iz + 2 = 0$ (ZH. 2000. nov.)

6. Ábrázold a komplex számsík azon z pontjainak halmazát, melyre teljesül:
   (a) $-2 < \mathrm{Im} z \leq 1$
   (b) $1 < |z| < 2$
   (c) $|z - i - 1| = \sqrt{2}$

7. Van-e a közönséges síkban ill. térben olyan lineáris transzformáció, melynek nincs valós sajátvektora?

8. ** Berci vett egy doboz Mackósajtot, melyben 6 db 60^o-os körcikk alakú sajt található. Este megevett belőlük hármat, és betette a hűtőbe. Reggel, mikor felnyitotta a dobozt, azt vette észre, hogy ha az egyes sajtcikkek körívre eső csúcsait a körön végighaladva A_1, B_1-gyel, A_2, B_2-vel, ill. A_3, B_3-mal jelöljük, akkor a B_1A_2, B_2A_3 és B_3A_1 szakaszok felezőpontjai szabályos háromszöget alkotnak. (A körcikkek csúcsai továbbra is a kör középpontjában helyezkednek el.) Bizonyítsd be, hogy Berci megfigyelése helyes, függetlenül attól, hogy a sajtok egymással milyen szöget zárnak be! (Ápr. 26-áig beadott helyes megoldások csokit érnek!)