Bevezetés a számításelméletbe 1. gyakorlat
7. feladatsor (2002. ápr. 5.)

1. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris leképezés V_1-ről V_2-be, $\underline{c}_i \in V_1$. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
   (a) Ha $\underline{c}_1, ..., \underline{c}_k$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\mathcal{A}\underline{c}_1, ..., \mathcal{A}\underline{c}_k$ generátorrendszer V_2-ben.
   (b) Ha $\underline{c}_1, ..., \underline{c}_k$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\mathcal{A}\underline{c}_1, ..., \mathcal{A}\underline{c}_k$ generátorrendszer Im$\mathcal{A}$-ban.
   (c) Ha $\mathcal{A}\underline{c}_1, ..., \mathcal{A}\underline{c}_k$ generátorrendszer Im$\mathcal{A}$-ban, akkor $\underline{c}_1, ..., \underline{c}_k$ generátorrendszer V_1-ben.
   (d) Ha $\mathcal{A}\underline{c}_1 = \mathcal{A}\underline{c}_2$, akkor $\underline{c}_1 - \underline{c}_2 \in$ Ker$\mathcal{A}$.

2. Az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris leképezésről a következőket tudjuk:
   - Bármely 4 elem képe lineárisan összefüggő.
   - Bármely 6 lineárisan független V-beli elem között van olyan, amelyiknek a képe nem a nulla.

   Bizonyítsd be, hogy dim$V \leq 8$!

3. Végezd el az alábbi műveleteket a komlex számok halmazán!

$a)$ $(2-i)+(5-4i)$	$b)$ $(4+i)(5-4i)$	$c)$ $\overline{(2+i)^3}$
$d)$ $\dfrac{4+i}{5-2i}$	$e)$ $\left\lvert\dfrac{6+3i}{6-3i}\right\rvert$	$f)$ i^{18}
$g)$ $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$	$h)$ $(i-3)^{10}$	$i)$ $(1+\sqrt{3}i)^{30}$

4. Legyen $\mathcal{A}$ olyan lineáris transzformáció, melyre Im$\mathcal{A} \subseteq$ Ker$\mathcal{A}$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathcal{A}$ transzformáció (tetszőleges bázisban felírt) A mátrixára $A^2 = 0$. (ZH. 1997. nov.)

5. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere, $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ pedig V egy-egy lineáris transzformációja. Döntsük el, hogy $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$ teljesül-e, ha
   (a) $\mathcal{A}$ az x tengelyre, $\mathcal{B}$ az $y = x$ egyenesre történő tükrözés.
   (b) $\mathcal{A}$ az origó körüli $+60^o$-os, $\mathcal{B}$ az origó körüli -90^o-os elforgatás.
   (c) $\mathcal{A}$ az origóból történő ötszörös nagyítás, $\mathcal{B}$ az origó körüli $+90^o$-os elforgatás.

6. Az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformációt tükrözésnek nevezzük, ha minden $\underline{v} \in V$ vektorra teljesül $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\underline{v})) = \underline{v}$. Bizonyítsuk be, hogy a tükrözés mátrixának a determinánsa nem lehet 0. (ZH. 2000. dec.)