Bevezetés a számításelméletbe 1. gyakorlat
6. feladatsor (2002. márc. 29.)

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját (a paraméter függvényében):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{pmatrix}$$

2. Legyen A egy 6×5-ös valós mátrix. Melyek igazak a következő állítások közül?
   (a) Ha az első három sor lineárisan összefüggő, akkor a bal felső 3×3-as aldetermináns 0.
   (b) Ha a bal felső 3×3-as aldetermináns 0, akkor az első három sor lineárisan összefüggő.
   (c) Ha az első három oszlop lineárisan összefüggő, és az utolsó három oszlop is lineárisan összefüggő, akkor $r(A) \leq 3$.
   (d) Ha az első két oszlop lineárisan összefüggő, és az utolsó két oszlop is lineárisan összefüggő, akkor $r(A) \leq 3$.

3. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Döntsük el az alábbi hozzárendelésekről, hogy lineáris leképezések-e! Ha igen, írjuk fel a mátrixukat az $\{(1,0),(0,1)\}$ bázisban! Minden $\underline{v} \in V$ vektornak feleltessük meg
   (a) az y tengelyre való tükörképét.
   (b) origó körüli $+60^{\circ}$-os elforgatottját.
   (c) az y tengelyre való tükörképének origó körüli $+60^{\circ}$-os elforgatottját.
   (d) azt az x tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátái közül a nagyobb.
   (e) azt az x tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátáinak összege.

4. Legyen W a V vektortér egy nemtriviális altere. Lineáris transzformációt definiálnak-e az alábbi megfeleltetések?

$$\text{a) } \mathcal{A}\underline{x} = \begin{cases} \underline{x} & \text{ha } \underline{x} \in W \\ \underline{0} & \text{ha } \underline{x} \notin W \end{cases} \qquad \text{b) } \mathcal{B}\underline{x} = \begin{cases} \underline{0} & \text{ha } \underline{x} \in W \\ \underline{x} & \text{ha } \underline{x} \notin W \end{cases}$$

5. Tekintsük a legfeljebb harmadfokú, valós együtthatós polinomokat (azaz az $ax^3 + bx^2 + cx + d$ alakú kifejezéseket, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Ezeket értelemszerűen össze tudjuk adni, vagy meg tudjuk szorozni egy valós számmal. így egy V vektorteret kapunk. (A műveletek tehát ugyanúgy működnek, mint a valós számnégyesekből álló vektortérben.) V-ben egy bázis a $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ halmaz. Döntsd el, hogy az alábbi $\mathcal{A} : V \to V$ függvények lineáris leképezések-e? Ha igen, add meg a kép- és magterüket, illetve a mátrixukat a B bázisban felírva! Minden polinomnak feletessük meg
   (a) a konstans tagját;
   (b) a deriváltját.

6. Hány olyan $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció van az $\mathbb{R}^2$ vektortéren, amelyre

(a) $\mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ és $\mathcal{A}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$;

(b) $\mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ és $\mathcal{A}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$;

(c) $\mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$ és $\mathcal{A}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\10\end{pmatrix}$;

7. Legyen $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}$. A tér minden $\underline{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ vektorához rendeljük hozzá a tér $\underline{y} = A \cdot \underline{x}$ vektorát! (A tér vektorai tehát 3×1-es mátrixok.)

(a) Bizonyítsd be, hogy így egy $\mathcal{A}$ lineáris transzformációt kaptunk.

(b) Írd fel $\mathcal{A}$ mátrixát az $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ bázisban.

(c) Határozd meg Ker$\mathcal{A}$-t és Im$\mathcal{A}$-t.