Bevezetés a számításelméletbe 1. gyakorlat
5. feladatsor (2002. márc. 22.)

1. Legyenek adottak az alábbi mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Végezzük el a következő mátrixműveletek közül azokat, amelyeket lehet:

$$A + A,\ A + B,\ AB,\ AC,\ AC + 2C,\ D^2,\ BC,\ CB$$

2. Számítsd ki az alábbi mátrixokat!

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2002} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2002} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n}$$

3. Legyen A egy olyan mátrix, amelyben minden sorban és minden oszlopban az elemek összege 0, B pedig olyan mátrix, amelynek minden eleme egyenlő. Mi lesz az AB, illetve a BA szorzat, ha a szorzás elvégezhető?

4. Függetlenek-e az alábbi valós vektorrendszerek? Ha nem, hány dimenziós alteret generálnak?
   (a) $(1, 1, -1, 0), (2, 1, 0, 1), (3, 2, -1, 1)$
   (b) $(1, 3, 2, 1), (0, 1, -1, 4), (1, 1, 1, 1), (-2, 1, 2, 1)$
   (c) $(1, 2, -1), (2, 3, 1), (-1, -2, 1), (0, -1, 3), (1, 1, 1)$

5. Az A és a B $n \times n$-es mátrixról tudjuk, hogy $\det A \neq 0$, valamint azt, hogy $A \cdot B = \underline{0}$. Határozd meg a B mátrixot! (Itt a $\underline{0}$ a csupa nulla mátrixot jelöli.)

6. Határozd meg az összes olyan 2×2-es X mátrixot, melynek minden eleme racionális szám és amelyre $X^{2002} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ teljesül.

7. Számítsd ki a következő mátrixok inverzét!

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

8. Az $n \times n$-es A és B mátrixokra teljesül, hogy $AB = A$ és $BA = B$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A^2 = A$ és $B^2 = B$. (Vizsga, 1999. jan.)