Bevezetés a számításelméletbe 1. gyakorlat
4. feladatsor (2002. márc. 8.)

1. Mennyi az 1, 2, ..., n elemek inverziószáma az alábbi permutációkban?
   (a) 1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2 (n=9)
   (b) 100, 101, 98, 99, 96, 97, ..., 2, 3, 1 (n=101)

2. Tekintsük az alábbi determinánst!
$$\begin{vmatrix} P & K & B & J \\ U & V & E & R \\ I & D & N & S \\ L & T & M & A \end{vmatrix}$$
   Mi lesz ebben a definíció szerinti kiszámoláskor az alábbi szorzatok előjele?
   $a)\, BUDA$ $b)\, PEST$ $c)\, JETI$

3. Számold ki az alábbi determinánsokat!
$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & n \end{vmatrix}$$
$$c)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & ... & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & ... & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & ... & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n \end{vmatrix} \qquad d)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad e)*\ \begin{vmatrix} a & 0 & ... & 0 & b \\ 0 & a & ... & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & ... & a & 0 \\ b & 0 & ... & 0 & a \end{vmatrix}$$

4. Legyen A egy $n \times n$-es mátrix. Bizonyítsd be, hogy az oszlopai (mint függőlegesen írt oszlopvektorok) akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha $\det A \neq 0$.

5. Az A és a B $n \times n$-es mátrixról tudjuk, hogy $\det A \neq 0$, valamint azt, hogy $A \cdot B = \underline{0}$. Határozd meg a B mátrixot! (Itt a $\underline{0}$ a csupa nulla mátrixot jelöli.)

6. Határozd meg az összes olyan 2×2-es X mátrixot, melynek minden eleme racionális szám és amelyre $X^{2001} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ teljesül.

7. Legyen A egy n sorból és n oszlopból álló valós mátrix, a k-adik sorának j-edik elemét jelölje a_{kj}. Legyen B az az n-szer n-es mátrix, amelyben a k-adik sor j-edik elemére $b_{kj} = \frac{k}{j} a_{kj} (1 \leq k, j \leq n)$. Mennyi B determinánsa, ha tudjuk, hogy $\det A = 1$? (ZH. 2000. nov.)

8. Bizonyítsd be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1849 & 1444 & 1896 & 1222 \\ 1490 & 1703 & 1790 & 1526 \\ 1342 & 1566 & 1541 & 1514 \\ 1242 & 1552 & 1382 & 1825 \end{vmatrix} \neq 0$$

9. Egy $n \times n$-es mátrix minden eleme 1 vagy -1. Igazoljuk, hogy a mátrix determinánsa osztható 2^{n-1}-nel. (Vizsga, 2001. dec.)