Bevezetés a számításelméletbe 1. gyakorlat
3. feladatsor (2002. márc. 1.)

1. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e (a 3 dimenziós térben)?
   (a) $(1,1,1) \in \langle (1,1,0),(1,0,1),(0,1,1) \rangle$
   (b) Az $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ vektorok generátorrendszert alkotnak.
   (c) Az $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ vektorok lineárisan függetlenek.
   (d) Az $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ vektorok bázist alkotnak.
   (e) A $\{(2,2,0),(2,0,2),(2,1,1)\}$ vektorok generátorrendszert alkotnak.
   (f) A $\{(2,2,0),(2,0,2),(2,1,1)\}$ vektorok lineárisan függetlenek.

2. Melyek igazak az alábbi állítások közül? (A vektorok egy tetszőleges vektortérből valók.)
   (a) Ha $\{u_1, ..., u_{100}\}$ lineárisan független és $\{v_1, ..., v_{100}\}$ is lineárisan független, akkor $\{u_1, ..., u_{100}, v_1, ..., v_{100}\}$ is lineárisan független.
   (b) Ha $\{u_1, ..., u_{100}, v_1, ..., v_{100}\}$ lineárisan független, akkor $\{u_1, ..., u_{100}\}$ és $\{v_1, ..., v_{100}\}$ is lineárisan független.
   (c) Ha $\{u_1, ..., u_{100}\}$ lineárisan független és $\{v_1, ..., v_{100}\}$ is lineárisan független, akkor $\{u_1 + v_1, ..., u_{100} + v_{100}\}$ is lineárisan független.
   (d) Ha $\{u_1+v_1, ..., u_{100}+v_{100}\}$ lineárisan független, akkor $\{u_1, ..., u_{100}\}$ és $\{v_1, ..., v_{100}\}$ is lineárisan független.
   (e) Ha $u_1, ..., u_{100}$ közül bármely 99 vektor lineárisan független, akkor $\{u_1, ..., u_{100}\}$ is lineárisan független.
   (f) Ha $\{u_1, ..., u_{100}\}$ lineárisan független, akkor $\{u_1, u_1 + u_2, ..., u_1 + u_2 + ... + u_{100}\}$ is lineárisan független.

3. Oldjuk meg a Gauss-elimináció segítségével az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

$$a)\quad \begin{aligned} -x + 3y + 3z &= 2 \\ 3x + y + z &= 4 \\ 2x - 2y + 3z &= 10 \end{aligned} \qquad b)\quad \begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11 \\ x - y - 2z &= -7 \\ 3x + 2y - z &= 2 \end{aligned} \qquad c)\quad \begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11 \\ x - y - 2z &= -7 \\ 3x + 2y - z &= 4 \end{aligned}$$

$$d)\quad \begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ x - z &= -2 \\ 2x + y + z &= 7 \end{aligned} \qquad e)\quad \begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ -x + y - z &= 2 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ 4x + 4y + 4z &= 1 \end{aligned} \qquad f)\quad \begin{aligned} 7x + 14y - 21z &= 7 \\ x + 2y - 3z &= 1 \\ 5x + 10y + 15z &= 5 \\ 3x + 6y - 9z &= 3 \end{aligned}$$

4. Oldd meg az alábbi $n$ ismeretlenes és $n$ egyenletből álló egyenletrendszereket!

$$a)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= 1 \\ x_n + x_1 &= 1 \end{aligned} \qquad b)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n &= n \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + ... + 2x_n &= n-1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + 3x_n &= n-2 \\ &\vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + nx_n &= 1 \end{aligned}$$

5. Adj példát olyan 3 ismeretlenes és 5 egyenletből álló egyenletrendszerre, melynek

   (a) nincs megoldása;

   (b) egyértelmű megoldása van;

   (c) végtelen sok megoldása van!

   Oldd meg a feladatot 5 ismeretlen és 3 egyenletből álló egyenletrendszerekkel is!

6. Adjuk meg a $t$ paraméter értékétől függően az alábbi egyenletrendszer megoldását! (ZH. 2000. nov.)

$$\begin{aligned} x+3y-z &= 2 \\ 2x-2y+6z &= 12 \\ -3x-y+t\cdot z &= 3 \end{aligned}$$

7. A $V$ vektortér két alterének, $V_1$-nek és $V_2$-nek a nullvektor az egyetlen közös eleme. Bizonyítsuk be, hogy $\dim V_1 + \dim V_2 \leq \dim V$. (ZH. 1999. nov.)

8. Igaz-e, hogy egy tetszőleges $n$ dimenziós vektortérben bázist alkot

   (a) bármely $n$ darab vektorból álló lineárisan független rendszer;

   (b) bármely $n$ darab vektorból álló generátorrendszer?

9. Legyenek $v_1, v_2, ..., v_k$ lineárisan független vektorok. Adjuk meg a $c$ paraméter összes olyan valós értékét, melyre a $v_1 - v_2, v_2 - v_3, ..., v_{k-1} - v_k, v_k - cv_1$ vektorok lineárisan függetlenek! (ZH. 1998. nov.)

10. Egy tetszőleges $V$ vektortérben adott 2001 darab vektor, amelyekről tudjuk, hogy generátorrendszert alkotnak. Bizonyítsd be, hogy kiválasztható közülük néhány (esetleg mind, esetleg csak egy) úgy, hogy a kiválasztott vektorok bázist alkotnak!