



Ph.D. Tézisfüzet

Gráfszorzásokkal és fedésekkel kapcsolatos színezési problémák

Tóth Ágnes

Témavezető: Dr. Simonyi Gábor, egyetemi tanár

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2012. június

A doktori disszertációban két gráfszínezési problémakört tárgyalunk. Egyrészt foglalkozunk színezéssel rokon gráfparaméterek aszimptotikus vizsgálatával, másrészt élszínezésekkel kapcsolatos fedési problémákkal. A téziszűzetben ismertetem a két témakört, és az azokban elért eredményeimet.

Gráfparaméterek aszimptotikus vizsgálata

Számos gráfparaméter esetén igaz, hogy a gráf valamilyen szorzás szerinti hatványaiban vizsgálva a paramétert, a kapott értékek megfelelő normálásával kapott sorozat konvergens, a határérték érdekes, új gráfparamétert ad. Egy gráf Shannon-kapacitása, melynek információelméleti jelentése a csatornakapacitás elméleti felső határa hiba nélküli kódolás esetén, szintén ilyen módon származtatható. A paramétert Shannon vezette be a [35] dolgozatban (ld. még Körner és Orlitsky [29]). Ez a gráfparaméter a tárgyalás módjától függően (normális hatványozás esetén) a függetlenségi szám vagy (konormális hatványozás esetén) a klikkszám aszimptotikus növekedésével definiálható. A Shannon-kapacitás pontos értékének meghatározása számos egészen egyszerű gráf esetén is nehéz. Lovász [33] egyik híres eredménye a paraméter meghatározása öt hosszú kör esetén, és továbbra is nyitott kérdés az ötnél hosszabb páratlan körök esete.

Ha a kromatikus számot vizsgáljuk normális hatványozással, akkor a sorozat megfelelő normálásával határértékként a gráf ún. Witsenhausen-rátáját [40] kapjuk. Ha szintén a kromatikus számot tekintjük, de konormális szorzással, és megfelelően normálunk, akkor McEliece és Posner [34] ismert tétele alapján, a megfelelő határérték a gráf frakcionális kromatikus száma (vö. Berge és Simonovits [12], ld. Scheinerman és Ullman [36]-ben is).

Rokon kérdések vetődnek fel a gráf függetlenségi hányadosa, illetve az ún. Hall-hányadosa vizsgálata során is. Ezen paraméterek ismert korlátokat adnak a kromatikus számra az alapján, hogy a csúcsszám és a függetlenségi szám hányadosa alsó korlátja a kromatikus számnak. Aszimptotikus vizsgálatuk során gyakran találkozunk a frakcionális színezéssel, illetve a frakcionális kromatikus számmal.

1. A függetlenségi hányados aszimptotikus értéke kategóriai szorzás esetén

Ez a tézispont az [1] és a [2] dolgozatok alapján készült.

Egy gráf *függetlenségi hányadosa* a függetlenségi száma és csúcsszáma hányadosa, $i(G)$ -vel jelöljük. Tehát $i(G) = \frac{\alpha(G)}{|V(G)|}$.

Az F és G gráfok kategóriai (vagy más néven direkt) szorzata az az $F \times G$ gráf, melynek csúcshalmaza $V(F \times G) = V(F) \times V(G)$ és élhalmaza $E(F \times G) = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\} : \{u_1, u_2\} \in E(F) \text{ és } \{v_1, v_2\} \in E(G)\}$. A G gráf k -adik kategóriai hatványát, a $G^{\times k}$ gráfot, a G gráf k példányának kategóriai összeszorzásával kapjuk. Tehát a hatványgráfban a csúcsok k hosszú pontsorozatoknak tekinthetők, melyek közül kettő pontosan akkor van összekötve, ha az adott sorozatok minden koordinátában össze vannak kötve.

Brown, Nowakowski és Rall a [13] cikkben a függetlenségi hányados aszimptotikus értékét vizsgálta kategóriai szorzás esetén.

Definíció ([13]). Egy G gráf *aszimptotikus kategóriai függetlenségi hányadosa* a következőképp kapható.

$$A(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} i(G^{\times k}).$$

A [13] dolgozat szerzői belátták, hogy a G gráf tetszőleges U független halmazára teljesül az $A(G) \geq \frac{|U|}{|U| + |N_G(U)|}$ egyenlőtlenség, ahol $N_G(U)$ jelöli az U halmaz szomszédságát G -ben. Megmutatták továbbá, hogy $A(G) > \frac{1}{2}$ esetén $A(G) = 1$ áll fenn.

A témakörrel később Alon és Lubetzky [9] is foglalkozott. Bevezették a következő $i_{\max}(G)$ és $i_{\max}^*(G)$ paramétereket

$$i_{\max}(G) = \max_{U \text{ független } G\text{-ben}} \frac{|U|}{|U| + |N_G(U)|} \quad \text{és} \quad i_{\max}^*(G) = \begin{cases} i_{\max}(G) & \text{ha } i_{\max}(G) \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{ha } i_{\max}(G) > \frac{1}{2} \end{cases},$$

valamint megfogalmazták a következő két kérdést.

1. Kérdés (Alon, Lubetzky [9]). *Teljesíti-e minden G gráf az $A(G) = i_{\max}^*(G)$ egyenlőséget? Vagy másképp fogalmazva, igaz-e minden G gráfra, hogy $i_{\max}^*(G^{\times 2}) = i_{\max}^*(G)$?*

2. Kérdés (Alon, Lubetzky [9]). *Teljesül-e minden F és G gráfra, hogy $i(F \times G) \leq \max\{i_{\max}^*(F), i_{\max}^*(G)\}$?*

A [13] cikk fent említett eredményeiből adódóan $A(G) \geq i_{\max}^*(G)$ teljesül minden G -re. Könnyen látható, hogy az 1. kérdés két alakja ekvivalens. Valamint azt sem nehéz igazolni, hogy az 1. kérdésre adott pozitív válaszból ugyanez következne a 2. kérdésre is (ld. [9]).

Az [13] cikkben merült fel a kérdés, hogy milyen G gráfokra egyezik meg az $A(G)$ érték G függetlenségi hányadosával, az egyenlőséget teljesítő gráfokat a szerzők önuniverzálisnak nevezték el. Ezek a gráfok definíciójuk alapján kielégítik az 1. kérdésbeli egyenlőséget. Az említett cikk szerzői néhány gráfcsaládra, például Abel-csoportok Cayley gráfjaira bebizonyították, hogy ilyen tulajdonságúak. A szerző [1] dolgozatában belátta, hogy a teljes többrészes gráfok is önuniverzálisak, kivéve azt az esetet, amikor a gráf legnagyobb pontosztályának mérete meghaladja a csúcsszám felét. Így az 1. kérdésre ezen gráfok esetén is

pozitív a válasz. (Utóbbi esetben $A(G) = i_{\max}^*(G) = 1$.) A [9] cikkben megmutatták, hogy a 2. kérdésben lévő egyenlőtlenség fennáll, ha az egyik gráf klikkek, ill. körök diszjunkt uniója (míg a másik gráf tetszőleges).

1.1. Válasz Alon és Lubetzky kérdéseire

A doktori tézisben pozitív választ adunk az 1. kérdésre, melyből tehát a 2. kérdésre is adódik az igenlő válasz. Az eredmény számos további, a paraméterrel kapcsolatos problémát megold. A bizonyítás során Zhu azon ötletét vesszük tovább, melyet a Hedetniemi-sejtés frakcionális változata, azaz a $\chi_f(F \times G) = \min\{\chi_f(F), \chi_f(G)\}$ összefüggés igazolása során használt. (Itt $\chi_f(G)$ a G gráf frakcionális kromatikus számát jelöli.)

Először $i(F \times G)$ -re adunk felső korlátot $i_{\max}(F)$ és $i_{\max}(G)$ függvényében. A becslésből rögtön adódik a válasz a 2. kérdésre (hiszen $i_{\max}(G) \leq i_{\max}^*(G)$).

1. Tétel. *Tetszőleges F és G gráfok esetén*

$$i(F \times G) \leq \max\{i_{\max}(F), i_{\max}(G)\}.$$

Ezután megmutatjuk, hogy az előbbi korlát $i_{\max}(F \times G)$ -t is felülről becsli a következő szükséges feltételek teljesülése mellett.

2. Tétel. *Ha $i_{\max}(F) \leq \frac{1}{2}$ vagy $i_{\max}(G) \leq \frac{1}{2}$ akkor*

$$i_{\max}(F \times G) \leq \max\{i_{\max}(F), i_{\max}(G)\}.$$

Az előbbi tételből már az 1. kérdésre is megkapjuk a pozitív választ. (Ha $i_{\max}(G) > \frac{1}{2}$, akkor $i_{\max}^*(G^{\times 2}) = i_{\max}^*(G) = 1$. Különben a fenti eredményt $F = G$ -re alkalmazva kapjuk, hogy $i_{\max}(G^{\times 2}) \leq i_{\max}(G)$, míg az ellentétes irányú egyenlőtlenség triviális. Tehát $i_{\max}^*(G^{\times 2}) = i_{\max}^*(G)$ tetszőleges G -re.)

Mint ahogy említettük, az 1. kérdés két alakja ekvivalens. Így tehát az $i_{\max}^*(G^{\times 2}) = i_{\max}^*(G)$ egyenlőségből következik a következő tétel. (Ehhez tegyük fel indirekten, hogy valamely G gráfra $i_{\max}^*(G) < A(G)$, azaz létezik egy olyan k szám, melyre $i_{\max}^*(G) < i(G^{\times k}) \leq i_{\max}^*(G^{\times k})$. Mivel az $\{i_{\max}^*(G^{\times \ell})\}_{\ell=1}^{\infty}$ sorozat monoton növekvő, léteznie kell egy olyan m számnak, melyre $i_{\max}^*(G^{\times m}) < i_{\max}^*((G^{\times m})^{\times 2})$, ez viszont ellentmondás.)

3. Tétel. *Tetszőleges G gráfra teljesül, hogy $A(G) = i_{\max}^*(G)$.*

1.2. További következmények

Az előbbi eredményből további, az aszimptotikus kategóriai függetlenségi hányadossal kapcsolatos nyitott kérdésekre kapunk választ.

Brown, Nowakowski és Rall [13] sejtése szerint $A(F \uplus G) = \max\{A(F), A(G)\}$, ahol $F \uplus G$ az F és G gráfok diszjunkt unióját jelenti. A 3. tételből azonnal következik a sejtés állítása, hiszen az analóg állítás, $i_{\max}^*(F \uplus G) = \max\{i_{\max}^*(F), i_{\max}^*(G)\}$ triviális.

4. Következmény. Tetszőleges F és G gráfok esetén

$$A(F \uplus G) = \max\{A(F), A(G)\}.$$

Megjegyezzük, hogy $A(F \times G)$ értéke szintén megegyezik $\max\{A(F), A(G)\}$ -vel (ld. [9]).

A [13] dolgozat szerzői kérdésként tűzték ki $A(G)$ algoritmikus kiszámíthatóságát, illetve annak bonyolultságát. Megmutatták, hogy páros gráfok esetén a paraméter polinom időben számolható. (Hiszen páros G gráf esetén $A(G) = \frac{1}{2}$ ha G -nek van teljes párosítása, különben $A(G) = 1$.) Továbbá [9]-ben bebizonyították azt is, hogy tetszőleges G gráf esetén annak eldöntése, hogy $A(G) = 1$ vagy $A(G) \leq \frac{1}{2}$ szintén polinom időben elvégezhető. (Ehhez belátták, hogy $i_{\max}(G) \leq \frac{1}{2}$ pontosan akkor teljesül, ha G -nek van frakcionális teljes párosítása.) A 3. tételből levonhatjuk a következtetést, hogy tetszőleges G gráf és t szám esetén $A(G) > t$ eldöntése NP-beli probléma. Azt sem nehéz belátni, hogy a probléma valójában NP-teljes.

Egy [13]-beli eredmény, miszerint tetszőleges $(0, \frac{1}{2}] \cup \{1\}$ -beli racionális számhoz található olyan gráf, melyre az aszimptotikus kategóriai függetlenségi szám értéke éppen az adott racionális szám. A 3. tételből adódóan mostmár tudjuk, hogy a paraméter értéke irracionális nem lehet, ezzel egy újabb, a [13] cikkben megfogalmazott kérdésre kapunk választ.

A fenti tételből az önuniverzális gráfok alábbi karakterizációja is leolvasható. Egy gráfot üresnek nevezünk, ha nincs éle. Minden más G gráfra $i(G) < 1$ teljesül.

5. Következmény. Egy nem üres G gráf önuniverzális akkor és csak akkor, ha teljesül rá, hogy $i_{\max}(G) = i(G)$ és $i(G) \leq \frac{1}{2}$.

Másként fogalmazva, egy nem üres G gráf önuniverzális pontosan akkor, ha az $\frac{|U|}{|U| + |N_G(U)|}$ kifejezés maximális méretű független halmazokra is eléri a maximum értékét, és ez a maximum legfeljebb $\frac{1}{2}$.

2. A Hall-hányados aszimptotikus értéke lexikografikus és kategóriai szorzás esetén

Ez a tézispont a [3] és a [4] dolgozatok alapján készült.

A függetlenségi hányadoshoz hasonló gráfparaméter a Hall-hányados, melynek bevezetését listaszínezési kérdések motiválták [16, 17]. Egy gráf Hall-hányadosa a csúcsszám és a függetlenségi szám maximuma a gráf összes részgráfjára nézve, tehát

$$\rho(G) = \max \left\{ \frac{|V(H)|}{\alpha(H)} : H \subseteq G \right\}.$$

A paraméter aszimptotikus értékét különböző gráfszorzásokra Simonyi vezette be a [37] dolgozatban. Normális, konormális, lexikografikus és kategóriai szorzásra is vizsgálta a Hall-hányados (megfelelően normált) aszimptotikus értékét.

A G gráf fenti hatványai mind a G csúcsaiból képzett k -hosszú sorozatokon definiálhatók. A normális hatványban, $G^{\odot k}$ -ban, két sorozatot akkor kötünk össze, ha minden koordinátában olyan csúcsokat találunk, melyek vagy megegyeznek, vagy G szerint összekötöttek. A konormális hatványban, G^k -ban, két sorozat akkor szomszédos, ha valamely koordinátában szomszédos csúcsok állnak. A Hall-hányados aszimptotikus értéke konormális szorzás szerint $h(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\rho(G^k)}$. Normális szorzásra a hasonlóan definiált aszimptotikus értéket $h_{\odot}(G)$ -vel jelöljük. Simonyi megmutatta, hogy $h(G) = \chi_f(G)$, ahol $\chi_f(G)$ a gráf frakcionális kromatikus számát jelöli. Továbbá bebizonyította, hogy $h_{\odot}(G) = R(G)$, ahol $R(G)$ a gráf Witsenhausen-rátája. Mint ahogy már korábban említettük, utóbbi paraméter a kromatikus szám aszimptotikus értékeként definiált. A *frakcionális kromatikus szám* pedig a kromatikus szám frakcionális relaxációja, azaz

$$\chi_f(G) = \inf \left\{ \sum_{U \in S(G)} f(U) : f \text{ frakcionális színezése } G\text{-nek} \right\}, \text{ ahol}$$

$$f \text{ frakcionális színezése } G\text{-nek, ha } f : S(G) \rightarrow [0, 1] \text{ és } \forall v \in V(G) : \sum_{v \in U \in S(G)} f(U) \geq 1,$$

ahol $S(G)$ jelöli a G -beli független halmazok halmazát.

Simonyi [37] sejtése szerint lexikografikus, illetve kategóriai szorzásra is a frakcionális kromatikus szám adódik a megfelelő normált sorozat határértékeként. A disszertációban mindkét sejtést igazoljuk.

2.1. Az aszimptotikus lexikografikus Hall-hányados

Az F és G gráfok lexikografikus szorzata az az $F \circ G$ gráf, melynek csúcshalmaza $V(F \times G) = V(F) \times V(G)$ és élhalmaza $E(F \circ G) = \{ \{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\} : \{u_1, u_2\} \in E(F), \text{ vagy } u_1 = u_2 \text{ és } \{v_1, v_2\} \in E(G) \}$. A G gráf k -adik lexikografikus hatványát, a $G^{\circ k}$ gráfot, a G gráf k példányának lexikografikus összeszorzásával kapjuk. Tehát a hatványgráfban két csúcs (k hosszú pontsorozat) pontosan akkor van összekötve, ha összekötöttek az első olyan koordinátában, ahol különböznek.

Definíció ([37]). Egy G gráf *aszimptotikus lexikografikus Hall-hányadosa* a következőképp kapható.

$$h_o(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\rho(G^{\circ k})}.$$

A definícióikat összevetve világos, hogy egy G gráf normális és konormális hatványára fennáll az $E(G^{\circ k}) \subseteq E(G^{\circ k}) \subseteq E(G^k)$ összefüggés, így a [37]-beli fenti eredményekből kapjuk, hogy $h_o(G)$ értéke az $[R(G), \chi_f(G)]$ intervallumba esik. Figyelembe véve, hogy $\rho(G)$ is alulról becsli $h_o(G)$ értékét, és ez a becslés néhol jobb, máskor rosszabb, mint az $R(G)$ által adott alsó korlát (ld. [37]), adódik, hogy

$$\max\{\rho(G), R(G)\} \leq h_o(G) \leq \chi_f(G).$$

Néhány gráfcsaládra az alsó és a felső becslés egybeesik, így az aszimptotikus lexikografikus Hall-hányados értéke is a közös érték. (Például, ha G perfekt, akkor $\chi_f(G) = \chi(G) = \omega(G) \leq \rho(G)$. Ha G csúcs-tranzitív gráf, akkor $\chi_f(G) = \frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \leq \rho(G)$.) Általában viszont a fenti intervallum pozitív hosszúságú. (Például W_5 , az 5-hosszú kerékg ráf esetén, melyet egy 5-hosszú körből kapunk egy további pont felvételével, melyet a kör minden pontjával összekötünk. Erre a gráfra $\rho(W_5) = 3$, $\chi_f(W_5) = \frac{7}{2}$ és $R(W_5) \leq \sqrt{12}$, ld. [37].)

A disszertációban igazoljuk azt a [37] dolgozatban megfogalmazott sejtést, mely szerint $h_o(G)$ értékére megegyezik a fenti intervallum felső határával.

6. Tétel. *Az aszimptotikus lexikografikus Hall-hányados értéke megegyezik a gráf frakcionális kromatikus számával tetszőleges G gráf esetén, azaz*

$$h_o(G) = \chi_f(G).$$

2.2. Az aszimptotikus kategóriai Hall-hányados

Mint ahogy a korábbiakban definiáltuk, egy gráf kategóriai hatványának csúcsai az eredeti gráf csúcsaiból képzett sorozatok, és két ilyen sorozatot összekötünk, ha azok koordinátáinként összekötöttek.

Definíció. ([37]) Egy G gráf *aszimptotikus kategóriai Hall-hányadosa* a következőképp kapható.

$$h_{\times}(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(G^{\times k}).$$

Vegyük észre, hogy ezen szorzás esetén nincs szükségünk a sorozat normalizálására.

Simonyi [37] megmutatta, hogy a gráfparamétert a frakcionális kromatikus szám felülről becsüli, és megfogalmazta a sejtést, miszerint valójában a két paraméter között

egyenlőség áll minden gráf esetén.

Ez a sejtés könnyen adódik perfekt, illetve csúcs-tranzitív gráfokra. A [37] dolgozat szerint az egyenlőség ún. kerékgráfokra is teljesül, melyeket egy körből kapunk egy további, a többi ponttal összekötött pont felvételével. Utóbbi eredmény bizonyításában használt érveléshez hasonló gondolatmenettel a szerző a [3] munkában megmutatta, hogy a következő állítás is igaz. Tegyük fel, hogy a G gráfra teljesül, hogy $h_{\times}(G) = \chi_f(G)$. Továbbá legyen $\hat{G}$ olyan gráf, melyet G -ből kapunk egy további pont hozzáadásával, melyet G minden pontjával összekötünk. Ekkor az így kapott gráfra is fennáll, hogy $h_{\times}(\hat{G}) = \chi_f(\hat{G})$.

A disszertációban bizonyítás adunk a fenti sejtésre tetszőleges gráf esetén.

7. Tétel. *Az aszimptotikus kategóriai Hall-hányados értéke megegyezik a gráf frakcionális kromatikus számával tetszőleges G gráf esetén, azaz*

$$h_{\times}(G) = \chi_f(G).$$

A bizonyítás során Zhu [41] (már az aszimptotikus kategóriai függetlenségi hányados kapcsán említett) ötletét használjuk, melyet a Hedetniemi-sejtés frakcionális változatának bizonyítása során alkalmazott.

Fedések egyszínű összefüggő komponensekkel

A Ryser-sejtés Gyárfástól származó ekvivalens alakja szerint egy G gráf éleit k színnel színezve mindig található legfeljebb $\alpha(G)(k-1)$ egyszínű összefüggő komponens, melyek csúcshalmaza együttesen lefedi a gráf összes pontját. (Itt $\alpha(G)$ továbbra is a gráf függetlenségi számát jelöli.) Az állítás igaz $k=2$ esetén (ilyenkor ekvivalens a König tétellel). [27, 38]-beli részeredmények után a $k=3$ esetre Aharoni [8] adott érdekes topológiai eszközöket használó bizonyítást. A sejtés azon fontos speciális esete is nyitott, amikor a G gráf teljes, csak $k \leq 5$ -re bizonyított az állítás.

Király [28] nemrég bizonyította a következő eredményt, mely a Ryser-sejtés hipergráfokra vonatkozó egy analóg változatának tekinthető. Legyen $r \geq 3$, ekkor egy teljes r -uniform hipergráf éleit k színnel színezve mindig található legfeljebb $\lfloor \frac{k}{r} \rfloor$ egyszínű összefüggő komponens, melyek csúcshalmaza együttesen lefedi a hipergráf összes pontját. A becslés ráadásul éles.

A disszertációban hasonló fedési problémákkal foglalkozunk.

3. Gallai-színezések és dominálási kérdések

Ez a tézispont a Gyárfással és Simonyival közös [5] dolgozat és a Gyárfással, Fujitaval és Furuyával közös [6] dolgozat alapján készült.

Összehasonlítási gráfokat vizsgálva Gallai [21] érdekes tételeket bizonyított olyan élszínezett teljes gráfokkal kapcsolatban, melyek nem tartalmazznak olyan háromszöget, melynek a három éle mind különböző színű. Az ilyen színezések később más területeken is hasznosnak bizonyultak, ld. például [11, 14, 15, 20, 22, 25, 26, 30, 31]. Később teljes gráfok ezen élszínezéseit Gallai-színezésnek nevezték el. A fogalmat a [24] munkában tetszőleges gráf élszínezéseire is kiterjesztették.

Könnyű látni, hogy egy teljes gráf éleinek Gallai-színezése esetén valamely egyszínű összefüggő komponens lefedi a gráf teljes csúcshalmazát. A [24] cikkben Gyárfás és Sárközy megmutatták, hogy tetszőleges gráf Gallai-színezése esetén is található egy nagy egyszínű összefüggő komponens, melynek mérete arányos a gráf csúcsszámával, és ez az arány csak a gráf függetlenségi számától függ. Gyárfás vettette fel a következő kérdést, mely az előbbi eredmény általánosításának tekinthető, egy 2009 novemberi konferencián Dániában.

3. Probléma (Gyárfás). *Színezzük a G gráf éleit úgy, hogy ne keletkezzen teljesen tarka háromszög. Igaz-e, hogy ekkor G pontthalmaza lefedhető k egyszínű összefüggő komponens pontthalmazával, ahol k csak G függetlenségi számától függ?*

A kérdés vizsgálata egy másik, önmagában is érdekes problémához vezetett, mely irányított gráfok dominálási kérdésével kapcsolatos. A disszertációban az utóbbi kérdést megoldva pozitív választ kapunk az előbbi problémára is.

3.1. Irányított többrészes gráfok dominálási problémája

Legyen D egy irányított gráf, melynek pontthalmaza az $A_1, \dots, A_t$ diszjunkt osztályokra van osztva, úgy, hogy élek csak különböző osztályok között futnak. (Itt irányított gráf alatt olyan gráfot értünk, melyben két pont között csak az egyik irányban lehet él.) Legyen $S \subseteq [t]$, ekkor egy $U = \cup_{i \in S} A_i$ halmazt $|S|$ méretű domináló halmaznak nevezünk, ha tetszőleges $v \in \cup_{i \notin S} A_i$ csúcsra található olyan $w \in U$ csúcs, melyre $(w, v) \in E(D)$. A D irányított többrészes gráf legkisebb méretű domináló halmazának méretét $k(D)$ -vel jelöljük. Legyen továbbá $\beta(D)$ a D -ben található legnagyobb olyan független halmaz mérete, melynek pontjai különböző osztályokból valók. Abban a speciális esetben, amikor $|A_i| = 1$ minden $i \in [t]$ -re, $\beta(D)$ értéke $\alpha(D)$ -re egyszerűsödik, míg $k(D) = \gamma(D)$, ahol $\gamma(D)$ a gráf hagyományos dominálási száma, azaz a legkisebb olyan pontthalmaz mérete a gráfban, mely kiszomszédságával együtt a gráf összes pontját tartalmazza.

Bebizonyítottuk a következő tételt.

8. Tétel. *Tetszőleges β egész szám esetén létezik $h = h(\beta)$ egész a következő tulajdonsággal. Ha D ciklikusan irányított háromszöget nem tartalmazó irányított többrészes gráf, melyre $\beta(D) = \beta$, akkor $k(D) \leq h$. Ha $\beta(D) = 1$, akkor $k(D) = 1$. Ha $\beta(D) = 2$, akkor $k(D) \leq 4$.*

Az irányított háromszögek kizárása szükséges már abban az esetben is, amikor $|A_i| = 1$ minden i -re és $\beta(D) = 1$, azaz amikor D egy irányított teljes gráf. Hiszen $\gamma(D)$ még ebben az esetben is lehet tetszőleges nagy (ld. [10]), így már $h(1)$ sem létezne, ha a ciklikusan háromszögeket nem zárjuk ki.

A 8. tétel bizonyításában a $h(\beta) = 3\beta + (2\beta + 1)h(\beta - 1)$ rekurzív formulából faktoriális felső korlátot kapunk $k(D)$ értékére. Viszont az is elképzelhető, hogy akár lineáris felső becslés is adható. Ezt abban az esetben sem sikerült igazolnunk, amikor minden osztály egyelemű, itt szintén faktoriális korlátot tudtunk adni, egy picit jobbat, mint az általános esetben. Egy alsó korlát $\frac{3}{2}\alpha(D)$, ezt adja t diszjunkt ciklikusan irányított öt hosszú kör uniója, melyre $\alpha(D) = 2t$ és $\gamma(D) = 3t$.

Érdekes megjegyezni, hogy a bizonyításokban valójában egy erősebb állítást igazolunk. Kiderült, hogy a domináláshoz elegendő csak néhány pont, melyek a többrészes gráf szinte összes osztályát dominálják, kivéve néhány különleges osztályt, melyeket bevéve a domináló halmazba már a teljes gráf dominálva lesz.

3.2. Gallai-színezett gráfok egyszínű komponensekkel való fedése, illetve egyszínű komponensekre való partícionálása

A 8. tételből belátható, hogy a 3. problémára igenlő a válasz. Legyen $g(1) = 1$ és $\alpha \geq 2$ -re legyen $g(\alpha) = g(\alpha - 1) + h(\alpha)$, ahol h a 8. tételben szereplő függvény.

9. Tétel. *Legyen G olyan élszínezett gráf, melyben nincs teljesen tarka háromszög. Ekkor G csúcshalmaza lefedhető legfeljebb $g(\alpha(G))$ egyszínű összefüggő komponens pontthalmazával. Az $\alpha(G) = 2$ esetben elegendő legfeljebb öt egyszínű összefüggő komponens.*

A 9. tétel állítását fedés helyett partícionálásra is kiterjesztjük. Azt mondjuk, hogy egy élszínezett G gráf ℓ egyszínű összefüggő komponensre *partícionálható*, ha létezik a gráf csúcshalmazának egy $\{V_1, \dots, V_\ell\}$ partíciója, melyre minden $G[V_i]$ ($1 \leq i \leq \ell$) feszített részgráf összefüggő valamely színben. (Fontos látni, hogy egyszínű összefüggő komponensek tetszőleges részhalmazai nem feltétlenül használhatóak a partícionálás során, hiszen nem biztos, hogy a pontthalmaz összefüggő az adott, vagy akár más színben.)

Legyen $\hat{g}(1) = 1$ és $\alpha \geq 2$ -re legyen $\hat{g}(\alpha) = \max\{h(\alpha)(\alpha^2 + \alpha - 1), 2h(\alpha)\hat{g}(\alpha - 1) + h(\alpha) + 1\}$, ahol h a 8. tételben szereplő függvény.

10. Tétel. *Legyen G olyan élszínezett gráf, melyben nincs teljesen tarka háromszög. Ekkor G csúcshalmaza partícionálható legfeljebb $\hat{g}(\alpha(G))$ egyszínű összefüggő komponens pontthalmazára.*

4. Egyszínű fedések teljes páros gráfokban

Ez a tézispont a Chennel, Fujitaval, Gyárfással és Lehellel közös [7] dolgozat alapján készült.

A Ryser-sejtés egy speciális esete szerint tetszőleges r -részes metsző hipergráfnak van legfeljebb $r - 1$ méretű lefogó pontthalmaza. Ez a sejtés már $r \geq 6$ -tól nyitott. Az állítás $r = 2$ -re nyilvánvaló, az $r = 3, 4$ esetek megoldása megtalálható [23]-ban és [18]-ban, míg az $r = 5$ eseté [18]-ban és [39]-ben. A sejtés következő ekvivalens alakja [23],[19]-ből származik. A továbbiakban tegyük fel, hogy $r \geq 2$.

4. Sejtés ([23], [19]). *Egy teljes gráf éleit r színnel színezve a gráf pontthalmaza mindig lefedhető legfeljebb $r - 1$ egyszínű összefüggő komponens pontthalmazával.*

Gyárfás és Lehel [23], [32] a sejtés következő analóg változatát fogalmazta meg páros gráfokra.

5. Sejtés (Gyárfás [23], Lehel [32]). *Egy teljes páros gráf éleit r színnel színezve a gráf ponthalmaza mindig lefedhető legfeljebb $2r - 2$ egyszínű összefüggő komponens ponthalmazával.*

Gyárfás [23] megmutatta, hogy ha a sejtés igaz, akkor az állítás éles. Érdekes megjegyezni továbbá, hogy a fenténél eggyel több egyszínű összefüggő komponenssel az állítás könnyen adódik.

A disszertációban megmutatjuk, hogy az 5. sejtés állítását elegendő lenne csak nagyon speciális színezésekre igazolni. Például feltehető, hogy minden egyszínű összefüggő komponens maga is egy teljes páros gráf az adott színben, tehát egy-egy színosztály teljes páros gráfok diszjunkt uniója. (Ez azért is érdekes, mert nem ismert, hogy hasonló megkötés a Ryser-sejtés esetén is ekvivalens állítást eredményezne.) A sejtést $r = 2, 3, 4, 5$ -re igazoljuk. A disszertációban szintén vizsgáljuk olyan fedések létezését, melyben az egyszínű összefüggő komponensek azonos színűek. Megfogalmazzuk továbbá a sejtés duális alakját, mely hipergráfok lefoglaló ponthalmazával kapcsolatos.

4.1. A sejtés egy ekvivalens megfogalmazása

Legyen G teljes páros gráf, melynek élhalmaza a $G_1, \dots, G_r$ gráfok élhalmazára partícionált. (A G_i gráf élei az i színű élek.) Ezt a partíciót *feszítő partíciónak* nevezzük, ha G minden pontja minden G_i -nek is pontja ($i = 1, \dots, r$). Egy gráfot *biekvivalencia gráfnak* nevezünk, ha minden komponense teljes páros gráf. (Egy gráf ekvivalencia gráf, ha minden komponense teljes gráf. Innen az elnevezés.) Legyen a G teljes páros gráf partícionálva a $G_1, \dots, G_r$ biekvivalencia gráfokra. Ha a partícióban résztvevő gráfok komponenseinek, mint páros gráfoknak az osztályai között nincs valódi tartalmazási viszony, akkor azt mondjuk, hogy a partíció kielégíti az *antilánc tulajdonságot*.

Megmutatjuk, hogy a következő sejtés egyenértékű az 5. sejtés állításával.

6. Sejtés. *Ha egy teljes páros gráf r biekvivalencia gráfra van partícionálva az antilánc tulajdonságot is kielégítő módon, akkor csúcshalmaza lefedhető legfeljebb $2r - 2$ egyszínű összefüggő komponens ponthalmazával.*

4.2. Kis r értékek

A disszertációban megmutatjuk, hogy a 6. sejtés állítása teljesül $r = 2, 3, 4$ és 5 esetén. Valójában a következő erősebb állításokat bizonyítjuk.

11. Tétel. *Legyen $2 \leq r \leq 4$. Ha egy teljes páros gráf r biekvivalencia gráfra van partícionálva az antilánc tulajdonságot is kielégítő módon, akkor csúcshalmaza lefedhető*

legfeljebb r azonos színű egyszínű összefüggő komponens ponthalmazával. Azaz valamely biekvivalencia gráfnak csak legfeljebb r komponense van.

12. Tétel. *Ha egy teljes páros gráf 5 biekvivalencia gráfra van partícionálva az antilánc tulajdonságot is kielégítő módon, akkor csúcshalmaza lefedhető legfeljebb 8 azonos színű egyszínű összefüggő komponens ponthalmazával.*

4.3. Homogén fedések

Chen vetette fel a kérdést 1998-ban, miszerint teljesülhet-e az 5. sejtés egy erősebb változata, igaz-e, hogy adható fedés $2r - 2$ azonos színű egyszínű összefüggő komponenssel. Bár erről az erősebb verzióról kiderült ([7]), hogy nem lehet igaz tetszőleges színezés esetén, esetleg teljesülhet az antilánc tulajdonság mellett.

7. Kérdés. *Tegyük fel, hogy egy teljes páros gráf r biekvivalencia gráfra van partícionálva az antilánc tulajdonságot is kielégítő módon. Igaz-e, hogy ekkor a gráf csúcshalmaza lefedhető legfeljebb $2r - 2$ azonos színű egyszínű összefüggő komponens ponthalmazával?*

Köszönetnyilvánítás

Megkülönböztetett köszönettel tartozom témavezetőmnek, Simonyi Gábornak, azért, hogy az elmúlt évek során irányította szakmai fejlődésemet. Nagyon élveztem gráfelméleti kurzusait, és örülök, hogy a TDK és a diplomamunka után a doktori munkámat is az irányítása alatt végezhettem. Nagyon sokat tanultam tőle, szakmailag és emberileg egyaránt. Köszönöm az érdekes kutatási témákat, a közös munka élményét, valamint rengeteg hasznos tanácsát, észrevételét.

Hálás vagyok Gyárfás Andrásnak az érdekes problémákért, az élvezetes közös munkaért és azért a kedves érdeklődésért, melyet az eredményeim iránt mutatott. Köszönet illeti meg Shinya Fujita szerzőtársamat is, aki pár hétre vendégül látott engem Japánban (Maebashiban, illetve Tokyoban), ezzel is elősegítve eredményes közös munkánkat. Köszönöm Csikvári Péternek több dolgozatom nagyon gondos átnézését és számos értékes tanácsát.

Öröm volt dolgozni abban a kellemes légkörben, mely a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Számítástudományi és Információelméleti Tanszékét áthatja, köszönöm ezt minden kollégámnak.

Végül, de nem utolsó sorban, nagyon köszönöm családomnak a folyamatos biztatást és támogatást.

A szerző tézispontokhoz köthető publikációi

- [1] Á. Tóth, *The ultimate categorical independence ratio of complete multipartite graphs*, SIAM J. Discrete Math. **23** (2009), 1900–1904.
- [2] Á. Tóth, *Answer to a question of Alon and Lubetzky about the ultimate categorical independence ratio*, beküldve (J. Combin. Theory Ser. B.)
- [3] Á. Tóth, *On the ultimate lexicographic Hall-ratio*, Discrete Math. **309** (2009), 3992–3997.
- [4] Á. Tóth, *On the ultimate direct Hall-ratio*, beküldve (Graphs Combin.)
- [5] A. Gyárfás, G. Simonyi, and Á. Tóth, *Gallai colorings and domination in multipartite digraphs*, megjelenés alatt (J. Graph Theory.)
- [6] S. Fujita, M. Furuya, A. Gyárfás, and Á. Tóth, *Partition of graphs and hypergraphs into monochromatic connected parts*, beküldve (Electron. J. Combin.)
- [7] G. Chen, S. Fujita, A. Gyárfás, J. Lehel, and Á. Tóth, *Around a biclique cover conjecture*, kézirat
- Á. Tóth, Asymptotic values of graph parameters, Proceedings of the 6th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Budapest, 2009., 388–392., [1,3] alapján
- Á. Tóth, On the asymptotic values of the Hall-ratio, Proceedings of the 7th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Kyoto, 2011., 470–472., [4] alapján

A szerző további publikációi

- G. Brightwell, G. Cohen, E. Fachini, M. Fairthorne, J. Körner, G. Simonyi, Á. Tóth, *Permutation capacities of families of oriented infinite paths*, SIAM J. Discrete Math. **24**, (2010), 441–456.
Konferencia változat: The Sixth European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, EuroComb 2011, Budapest; Electron. Notes Discrete Math. 38 (2011) 195–199.
- L. Lesniak, S. Fujita, Á. Tóth, *New results on long monochromatic cycles in edge-colored complete graphs*, beküldve (Discrete Math.)

További hivatkozások

- [8] R. Aharoni, *Ryser's conjecture for tripartite 3-graphs*, Combinatorica **21** (2001), 1–4.
- [9] N. Alon and E. Lubetzky, *Independent sets in tensor graph powers*, J. Graph Theory **54** (2007), 73–87.
- [10] N. Alon and J. H. Spencer, *The probabilistic method, third edition*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, 2008.
- [11] R. N. Ball, A. Pultr, and P. Vojtěchovský, *Colored graphs without colorful cycles*, Combinatorica **27** (2007), 407–427.
- [12] C. Berge and M. Simonovits, *The coloring numbers of the direct product of two hypergraphs*, Lecture Notes in Math. **411** (1974), 21–33, Hypergraph Seminar (Proceedings of the First Working Seminar, Ohio State University, Columbus, Ohio, 1972; dedicated to Arnold Ross).
- [13] J. I. Brown, R. J. Nowakowski, and D. Rall, *The ultimate categorical independence ratio of a graph*, SIAM J. Discrete Math. **9** (1996), 290–300.
- [14] K. Cameron and J. Edmonds, *Lambda composition*, J. Graph Theory **26** (1997), 9–16.
- [15] K. Cameron, J. Edmonds, and L. Lovász, *A note on perfect graphs*, Period. Math. Hungar. **17** (1986), 441–447.
- [16] M. Cropper, A. Gyárfás, and J. Lehel, *Hall-ratio of the Mycielski graphs*, Discrete Math. **306** (2006), 1988–1990.
- [17] M. Cropper, M. S. Jacobson, A. Gyárfás, and J. Lehel, *The Hall ratio of graphs and hypergraphs*, Les cahiers du Laboratoire Leibniz, Grenoble **17** (2000).
- [18] P. Duchet, *Représentations, noyaux en théorie des graphes et hypergraphes*, Ph.D. thesis, Paris, 1979.
- [19] P. Erdős, A. Gyárfás, and L. Pyber, *Vertex coverings by monochromatic cycles and trees*, J. Combin. Theory Ser. B **51** (1991), 90–95.
- [20] S. Fujita, C. Magnant, and K. Ozeki, *Rainbow generalizations of Ramsey Theory: A Survey*, Graphs Combin. **26** (2010), 1–30.

- [21] T. Gallai, *Transitiv orientierbare graphen*, Acta Math. Sci. Hungar. **18** (1976), 25–66, English translation by F. Maffray and M. Preissmann, in: J. L. Ramírez Alfonsín and B. A. Reed (editors), Perfect Graphs, John Wiley and Sons, 2001, 25–66.
- [22] V. Gurvich, *Decomposing complete edge-chromatic graphs and hypergraphs. Revisited*, Discrete Applied Math. **157** (2009), 3069–3085.
- [23] A. Gyárfás, *Partition coverings and blocking sets in hypergraphs (in Hungarian)*, Communications of the Computer and Automation Institute of the Hungarian Academy of Sciences **71** (1977), 62 pages.
- [24] A. Gyárfás and G. N. Sárközy, *Gallai colorings of non-complete graphs*, Discrete Math. **310** (2010), 977–980.
- [25] A. Gyárfás, G. N. Sárközy, A. Sebő, and S. Selkow, *Ramsey-type results for Gallai colorings*, J. Graph Theory **64** (2010), 233–243.
- [26] A. Gyárfás and G. Simonyi, *Edge colorings of complete graphs without tricolored triangles*, J. Graph Theory **46** (2004), 211–216.
- [27] P. Haxell, *A note on a conjecture of Ryser*, Periodica Math. Hungar. **30** (1995), 73–79.
- [28] Z. Király, *Monochromatic components in edge-colored complete uniform hypergraphs*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **38C** (2011), 517–521.
- [29] J. Körner and A. Orlitsky, *Zero-error information theory*, IEEE Trans. Inform. Theory **44** (1998), 2207–2229.
- [30] J. Körner and G. Simonyi, *Graph pairs and their entropies: Modularity problems*, Combinatorica **20** (2000), 227–240.
- [31] J. Körner, G. Simonyi, and Zs. Tuza, *Perfect couples of graphs*, Combinatorica **12** (1992), 179–192.
- [32] J. Lehel, *Ryser’s conjecture for linear hypergraphs*, manuscript, 1998.
- [33] L. Lovász, *Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture*, Discrete Math. **2** (1972), 253–267.
- [34] R. J. McEliece and E. C. Posner, *Hide and seek, data storage, and entropy*, Ann. Math. Statist. **42** (1971), 1706–1716.

- [35] G. Sárközy, *Monochromatic cycle partitions of edge-colored graphs*, J. Graph Theory **66** (2010), 57–64.
- [36] E. R. Scheinerman and D. H. Ullman, *Fractional graph theory*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley and Sons, Chichester, 1997.
- [37] G. Simonyi, *Asymptotic values of the Hall-ratio for graph powers*, Discrete Math. **306** (2006), 2593–2601.
- [38] E. Szemerédi and Zs. Tuza, *Upper bound for transversals of tripartite hypergraphs*, Period. Math. Hungar. **13** (1982), 321–323.
- [39] Zs. Tuza, *Some special cases of Ryser’s conjecture*, manuscript, 1978.
- [40] H. S. Witsenhausen, *The zero-error side-information problem and chromatic numbers*, IEEE Trans. Inform. Theory **22** (1976), 592–593.
- [41] X. Zhu, *Fractional Hedetniemi’s conjecture is true*, European J. Combin. **32** (2011), 1168–1175.