

Gráfszorzásokkal és fedésekkel kapcsolatos színezési problémák

Tóth Ágnes

A doktori disszertációban két gráfszínezési problémakört tárgyalunk. Egyrészt foglalkozunk színezéssel rokon gráfparaméterek aszimptotikus vizsgálatával, másrészt élszínezésekkel kapcsolatos fedési problémákkal.

Számos gráfparaméter esetén igaz, hogy a gráf valamilyen szorzás szerinti hatványaiban vizsgálva a paramétert, a kapott értékek megfelelő normálásával kapott sorozat konvergens, a határérték érdekes, új gráfparamétert ad. Egy gráf Shannon-kapacitása is ilyen módon származtatható, melynek információelméleti jelentése a csatornakapacitás elméleti felső határa hiba nélküli kódolás esetén. Ez a gráfparaméter a függetlenségi szám aszimptotikus növekedésével definiálható ún. normális hatványozás esetén. A Shannon-kapacitás pontos értékének meghatározása számos egészen egyszerű gráf esetén is nehéz. Lovász egyik híre eredménye, a paraméter meghatározása öt hosszú kör esetén, és továbbra is nyitott kérdés az ötnél hosszabb páratlan körök esete. Rokon kérdések vetődnek fel a gráf függetlenségi hányadosa, illetve az ún. Hall-hányadosa vizsgálata során is.

Egy gráf függetlenségi hányadosa a függetlenségi száma és csúcsszáma hányadosa. Egy gráf kategóriai hatványában a csúcsok az eredeti gráf csúcaiból képzett sorozatok, melyek közül kettő összekötött, ha az adott sorozatok minden koordinátában össze vannak kötve. Brown, Nowakowski és Rall bevezette az aszimptotikus kategóriai függetlenségi hányadost, mely az függetlenségi hányados aszimptotikus értékéként definiált. Az általuk adott alsó becslések alapján Alon és Lubetzky megfogalmazott egy általános alsó korlátot a paraméterre, és felvetette a kérdést, hogy vajon a két érték minden gráfra megegyezik-e. A disszertációban pozitív választ adunk erre a kérdésre. Az eredményből további, az aszimptotikus függetlenségi hányadossal kapcsolatos nyitott kérdésre is megkapjuk a választ. Például Brown, Nowakowski és Rall sejtését is bebizonyítjuk, miszerint két gráf diszjunkt uniójára a paraméter értéke a gráfokra külön számolt értékek maximumaként kapható. Belátjuk továbbá, hogy a paraméter algoritmikusan kiszámítható. Az analóg kérdés a Shannon-kapacitás esetén nyitott.

A függetlenségi hányadoshoz hasonló gráfparaméter a Hall-hányados, melyet a csúcsszám és a függetlenségi szám maximumaként kapunk a gráf összes részgrádjára nézve. A paraméter aszimptotikus értékét különböző gráfszorzásokra Simonyi kezdte vizsgálni. Normális, illetve konormális szorzás esetén megmutatta, hogy a megfelelően normált aszimptotikus érték megegyezik a kromatikus szám aszimptotikus értékével az adott hatványozás szerint. A dolgozatban bizonyítást adunk Simonyi azon két sejtésére, mely szerint a Hall-hányados aszimptotikus értéke lexikografikus, illetve kategóriai hatványozás esetén megegyezik a gráf frakcionális kromatikus számával.

Ryser egy híres sejtésének Gyárfás által megfogalmazott ekvivalens alakja szerint egy α függetlenségi számú gráf éleit k színnel színezve, a gráf ponthalmazára mindig lefedhető legfeljebb $(k-1)\alpha$ egyszínű összefüggő komponens ponthalmazával. Az állítás igaz $k=2$ -re, ilyenkor ekvivalens a König tétellel. A $k=3$ esetre Aharoni adott érdekes topológiai eszközöket használó bizonyítást. A sejtés azon fontos speciális esete is nyitott, amikor a gráf teljes, ebben az esetben is csak $k \leq 5$ -re bizonyított az állítás. A disszertációban élszínezett gráfok hasonló fedési problémáit vizsgáljuk.

Egy gráf éleinek olyan színezését, melyben nincs teljesen tarka háromszög, Gallai-színezésnek nevezzük. Könnyű látni, hogy egy teljes gráf éleit ilyen módon színezve mindig található olyan szín, mely egy egyszínű összefüggő komponenset feszít a gráf teljes ponthalmazán. Gyárfás és Sárközy megmutatta, hogy tetszőleges gráf Gallai-színezése esetén található olyan nagy egyszínű összefüggő komponens, melynek csúcshalmaza arányos a gráf pontszámával, és az arány csak a gráf függetlenségi számától függ. Ezen eredmény ismeretében természetes módon merül fel a kérdés, hogy vajon a gráf teljes ponthalmazára lefedhető-e csak a gráf függetlenségi számától függő számú egyszínű összefüggő komponens csúcshalmazával. A kérdés vizsgálata egy másik, irányított gráfok dominálási kérdéseivel kapcsolatos problémához vezetett. Utóbbi kérdés megoldásával sikerült pozitív választ adnunk az előbbi kérdésre.

A dolgozatban foglalkozunk egy Gyárfástól és Lehel-től származó problémával is, mely a Ryser-sejtés egy változata. A sejtésük szerint egy teljes páros gráf éleit k színnel színezve a gráf ponthalmazára mindig lefedhető legfeljebb $2k-2$ egyszínű összefüggő komponens ponthalmazával. Az állítást $k \leq 5$ -re sikerült bizonyítanunk. Megmutattuk, hogy a sejtést elegendő lenne csak nagyon speciális színezésekre igazolni. A disszertációban vizsgáljuk még olyan fedések létezését, melyben az egyszínű összefüggő komponensek azonos színűek. Megfogalmazzuk továbbá a sejtés duális alakját, mely hipergráfok lefoglaló ponthalmazával kapcsolatos.

Az eredmények egy része közös munka eredménye G. Chen, S. Fujita, M. Furuya, A. Gyárfás, J. Lehel és G. Simonyi társszerzőimmel.