

# Színezéssel rokon paraméterek viselkedése gráfhatványokban

TÓTH ÁGNES

V. éves matematikus hallgató

Konzulens:

DR. SIMONYI GÁBOR

BME Számítástudományi és Információelméleti Tanszék

2007

# Tartalomjegyzék

|                                                           |           |
|-----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Bevezetés</b>                                       | <b>2</b>  |
| <b>2. Definíciók, jelölések</b>                           | <b>4</b>  |
| <b>3. Aszimptotikus direkt függetlenségi hányados</b>     | <b>6</b>  |
| <b>4. Hall-hányados</b>                                   | <b>13</b> |
| 4.1. Aszimptotikus direkt Hall-hányados . . . . .         | 14        |
| 4.2. Aszimptotikus lexikografikus Hall-hányados . . . . . | 16        |
| <b>5. Összefoglalás, további kutatási lehetőségek</b>     | <b>24</b> |
| <b>6. Köszönetnyilvánítás</b>                             | <b>24</b> |
| <b>7. Irodalom</b>                                        | <b>25</b> |

# 1. Bevezetés

Számos gráfparaméter esetén igaz, hogy a gráf valamilyen szorzás szerinti hatványaiban vizsgálva a paramétert, a kapott értékek megfelelő normálásával kapott sorozat konvergens, a határérték érdekes, új gráfparamétert ad.

Egy gráf Shannon-kapacitása (Claude E. Shannon [19], ld még János Körner, Alon Orlitsky [12]), melynek információelméleti jelentése a csatornakapacitás elméleti felső határa hiba nélküli kódolás esetén, is ilyen módon származtatható. Ez a gráfparaméter a tárgyalás módjától függően (normális hatványozás esetén) a függetlenségi szám vagy (konormális hatványozás esetén) a klikkszám aszimptotikus növekedésével definiálható. A Shannon-kapacitás pontos értékének meghatározása számon egészen egyszerű gráf esetén is nehéz. Lovász László egyik eredménye, a paraméter meghatározása öt hosszú kör esetén (Lovász László [13]), és továbbra is nyitott kérdés az ötnél hosszabb páratlan körökre esete.

Ha a kromatikus számot vizsgáljuk normális hatványozással, akkor a sorozat megfelelő normálásával határértékként a gráf Witsenhausen-sebességét (Hans S. Witsenhausen [20]) kapjuk.

Ha szintén a kromatikus számot tekintjük, de konormális szorzással, és megfelelően normálunk, akkor McEliece és Posner híres tétele alapján (Robert J. McEliece, Edward C. Posner [16]), a megfelelő határérték a gráf frakcionális kromatikus száma (vö. Claude Berge, Simonovits Miklós [4], ld. Edward R. Scheinerman, Daniel H. Ullman [17]-ben is).

Rokon kérdések vetődnek fel a gráf függetlenségi hányadosa, illetve az ún. Hall-hányadosa vizsgálata során is. Ezen paraméterek ismert korlátokat adnak a kromatikus számra az alapján, hogy a csúcsszám és a függetlenségi szám hányadosa alsó korlátja a kromatikus számnak. Aszimptotikus vizsgálatuk során gyakran találkozunk a frakcionális színezéssel, illetve a frakcionális kromatikus számmal.

Egy gráf függetlenségi hányadosa a függetlenségi száma és csúcsszáma hányadosa. Ebből kaphatjuk a Pavol Hell, Xingxing Yu és Hui Shan Zhou [10] által bevezetett *aszimptotikus függetlenségi hányadost* úgy, hogy tekintjük a gráf  $n$ -edik hatványát az ún. kartéziánus szorzásra nézve és ennek függetlenségi hányadosát vizsgáljuk, ahogy  $n$  tart végtelenhez.

Ezen fogalom ösztönözte a Jason I. Brown, Richard J. Nowakowski és Douglas Rall szerzőhármast [6], hogy definiálják egy másik, az ún. direkt szorzásra is ezt a mennyiséget, az *aszimptotikus direkt függetlenségi hányadost*. Ezzel a gráfparaméterrel foglalkozott Noga Alon és Eyal Lubetzky [3]-ben, illetve a hatványgráfban lévő független halmazok méretével és azok szerkezetével Noga Alon, Irit Dinur, Ehud Friedgut és Benny Sudakov [2]-ben.

Az [6] cikkben merült fel a kérdés, hogy milyen gráfokra egyezik meg ez a határérték a gráf függetlenségi hányadosával, az ilyen gráfokat a szerzők *önuniverzálisnak* nevezték el. Az említett cikk szerzői néhány gráfcsaládra, például Abel-csoportok Cayley gráfjaira bebizonyították, hogy ilyen tulajdonságúak. Ugyanezen dolgozat megemlíti, hogy sok más gráfcsalád mellett például teljes többrészes gráfokra sem ismert az aszimptotikus direkt függetlenségi hányados értéke. A cikk egyik eredményéből adódik, hogy abban az esetben amikor a teljes többrészes gráf valamely pontosztálya nagyobb, mint a csúcsok számának fele, a gráf aszimptotikus direkt függetlenségi hányadosa egy. Dolgozatom egyik eredménye annak bizonyítása, hogy egy teljes többrészes gráf minden más esetben, tehát amikor a gráf legnagyobb pontosztályának mérete sem haladja meg a csúcsszám felét, önuniverzális, aszimptotikus direkt függetlenségi hányadosa megegyezik a függetlenségi hányadosával.

Érdekes problémához jutunk akkor is, ha ugyanezen gráfszorzásra egy más, hasonló paramétert, a Hall-hányadost [7, 8] vizsgáljuk. Egy gráf Hall-hányadosa a csúcsszáma és a függetlenségi száma hányadosának maximuma a gráf összes részgráfjára nézve. Ebből kapjuk a Simonyi Gábor [18] cikkében bevezetett *aszimptotikus direkt Hall-hányadost*. Az említett cikkben sejtésként szerepel, hogy ez az érték tetszőleges gráf esetén megegyezik a gráf frakcionális kromatikus számával. A szerző a cikkben perfekt és csúcstranzitív gráfok mellett kerékgráfokra bebizonyította, hogy a sejtés igaz. Dolgozatomban a kerékgráfok esetének általánosításaként belátom, hogy ha egy gráfra igaz a sejtés, akkor ha a gráfhoz hozzáveszünk egy pontot, melyet összekötünk a gráf összes többi csúcsával, a sejtés a kapott gráfra is igaz lesz.

Ugyanezen gráfparamétert vizsgálhatjuk az ún. lexikografikus hatványozás esetén is. Az ebből származó, szintén [18]-ban bevezetett normált paraméter határértéke az *aszimptotikus lexikografikus Hall-hányados*. A cikkben megfogalmazott sejtés szerint ez a gráfparaméter is megegyezik a gráf frakcionális kromatikus számával. Dolgozatomban kerékgráfokra igazolom ezt a sejtést.

A következő, ismertebb fogalmakat, jelöléseket összefoglaló fejezet után a harmadik fejezet foglalkozik a függetlenségi hányadossal, a negyedik pedig a Hall-hányadossal.

## 2. Definíciók, jelölések

A dolgozatban használt ismertebb gráfelméleti fogalmak, jelölések a következők. A kevésbé ismert, inkább a témára jellemző fogalmak definíciói a későbbi fejezetekben szerepelnek.

### Néhány szokásos gráfelméleti jelölés

A dolgozatban  $V(G)$  jelöli a  $G$  gráf csúcshalmazát,

$E(G)$  a  $G$  gráf élhalmazát,

$\alpha(G)$  a  $G$  gráf függetlenségi számát (azaz a független pontok maximális számát),

$\omega(G)$  a  $G$  gráf klikkszámát (azaz a legnagyobb teljes részgráf csúcsszámát),

$\chi(G)$  a  $G$  gráf kromatikus számát (azaz a gráf érvényes színezéséhez szükséges színek minimális számát, ahol az érvényes színezés azt jelenti, hogy két szomszédos csúcs nem kaphat azonos színt),

$d_G(v)$  a  $G$  gráfban a  $v$  csúcs fokszámát és

$N_G(I) = \{v \in V(G) : \exists u \in I, \text{ hogy } \{u, v\} \in E(G)\}$ , az  $I$  halmaz szomszédságát a  $G$  gráfban.

### Két speciális gráfosztály

Gráfhatványozás során a következő két gráfosztály gyakran „szépen” viselkedik, sok állítás, sejtés könnyen adódik rájuk.

A  $G$  gráf *perfekt*, ha  $G$  minden  $H$  feszített részgráfjára teljesül, hogy  $\chi(H) = \omega(H)$ .

Perfekt gráfok sok szempontból fontosak a gráfelméletben, bővebben olvashatunk róluk például [5]-ben.

A  $G$  gráf *csúcstranzitív*, ha  $G$  automorfizmus csoportja tranzitív.

### Frakcionális kromatikus szám és frakcionális klikkszám

Jelölje  $S(G)$  a gráf független halmazainak halmazát.

A  $G$  gráf frakcionális színezése egy olyan  $f : S(G) \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}$  függvény, melyre

$$\forall v \in V(G) : \sum_{v \in U \in S(G)} f(U) \geq 1.$$

A gráf *frakcionális kromatikus száma*,

$$\chi_f(G) = \inf \left\{ \sum_{U \in S(G)} f(U) : f \text{ a } G \text{ frakcionális színezése} \right\}.$$

A  $G$  gráf egy frakcionális klikkje egy olyan  $g : V(G) \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}$  függvény, melyre

$$\forall U \in S(G) : \sum_{v \in U \in S(G)} g(v) \leq 1.$$

A  $G$  gráf *frakcionális klikkszáma*,

$$\omega_f(G) = \sup \left\{ \sum_{v \in V(G)} g(v) : g \text{ a } G \text{ frakcionális klikkje} \right\}.$$

Ezen fogalmakra igazak a következő összefüggések (ld. például [17]-ben):

A frakcionális kromatikus számot adó infimum, illetve a frakcionális klikkszámot adó supremum fel is vétetik, ezért a definícióikban írhatunk minimumot, illetve maximumot.

A lineáris programozás dualitástételéből adódik, hogy tetszőleges  $G$  gráf esetén a gráf frakcionális kromatikus száma és frakcionális klikkszáma megegyezik. Továbbá a definíciókból következik, hogy a frakcionális kromatikus szám felső korlátja a kromatikus szám, a frakcionális klikkszám alsó korlátja a klikkszám. Képletben:

$$\omega(G) \leq \omega_f(G) = \chi_f(G) \leq \chi(G)$$

Ezen frakcionális mennyiségekről bővebben olvashatunk [17]-ben.

### Gráfszorzások

A dolgozatban csak a direkt, illetve a lexikografikus szorzással foglalkozunk részletesen, ezek definíciói a megfelelő fejezetekben megtalálhatók. A csak említés szintjén szereplő további három gráfszorzás definíciója a következő. (ld. például [11]-ben)

**2.1. Definíció.** Az  $F$  és  $G$  gráfok normális szorzata az az  $F \odot G$  gráf, melynek

csúcshalmaza  $V(F \odot G) = V(F) \times V(G)$  és

élhalmaza  $E(F \odot G) = \{ \{ (u_1, v_1), (u_2, v_2) \} : (\{u_1, u_2\} \in E(F) \text{ és } \{v_1, v_2\} \in E(G)) \text{ vagy } (\{u_1, u_2\} \in E(F) \text{ és } v_1 = v_2) \text{ vagy } (u_1 = u_2 \text{ és } \{v_1, v_2\} \in E(G)) \}$ .

A normális szorzás asszociatív és kommutatív. A  $G$  gráf  $n$ -edik normális hatványát, a  $G^{(n)}$  gráfot a  $G$  gráf  $n$  példányának normális összeszorzásával kapjuk.

**2.2. Definíció.** Az  $F$  és  $G$  gráfok konormális szorzata az az  $F \cdot G$  gráf, melynek

csúcshalmaza  $V(F \cdot G) = V(F) \times V(G)$  és

élhalmaza  $E(F \cdot G) = \{ \{ (u_1, v_1), (u_2, v_2) \} : \{u_1, u_2\} \in E(F) \text{ vagy } \{v_1, v_2\} \in E(G) \}$ .

A konormális szorzás asszociatív és kommutatív. A  $G$  gráf  $n$ -edik konormális hatványát, a  $G^n$  gráfot a  $G$  gráf  $n$  példányának konormális összeszorzásával kapjuk.

**2.3. Definíció.** Az  $F$  és  $G$  gráfok kartéziánus szorzata az az  $F \square G$  gráf, melynek

csúcshalmaza  $V(F \square G) = V(F) \times V(G)$  és

élhalmaza  $E(F \square G) = \{ \{ (u_1, v_1), (u_2, v_2) \} : (\{u_1, u_2\} \in E(F) \text{ és } v_1 = v_2) \text{ vagy } (u_1 = u_2 \text{ és } \{v_1, v_2\} \in E(G)) \}$ .

A kartéziánus szorzás asszociatív és kommutatív. A  $G$  gráf  $n$ -edik kartéziánus hatványát, a  $G^{\square n}$  gráfot a  $G$  gráf  $n$  példányának kartéziánus összeszorzásával kapjuk.

Gráfszorzásokról bővebben olvashatunk [11]-ben.

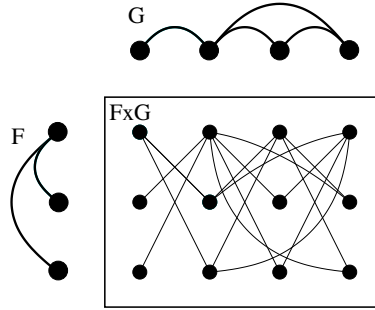
### 3. Aszimptotikus direkt függetlenségi hányados

Ebben a fejezetben a függetlenségi hányados aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk direkt szorzás esetén.

**3.1. Definíció.** Az  $F$  és  $G$  gráfok direkt (vagy kategóriai) szorzata az az  $F \times G$  gráf, melynek csúcshalmaza  $V(F \times G) = V(F) \times V(G)$  és élhalmaza  $E(F \times G) = \{ \{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\} : \{u_1, u_2\} \in E(F) \text{ és } \{v_1, v_2\} \in E(G) \}$ .

A direkt szorzás asszociatív és kommutatív.

A  $G$  gráf  $n$ -edik direkt hatványát, a  $G^{\times n}$  gráfot a  $G$  gráf  $n$  példányának direkt összeszorzásával kapjuk. (Tehát a hatványgráfban két csúc  $(n$  hosszú pontsorozat) pontosan akkor van összekötve, ha minden koordinátában össze vannak kötve.)



1. ábra. Két gráf direkt szorzata

Az  $F \times G$  szorzatgráf azon pontjai, melyek első koordinátája egy  $F$ -beli független halmazba esik, egy  $\alpha(F)|V(G)|$  méretű független halmazt alkotnak, így igaz a következő Lemma.

**3.1. Lemma.** ([6]) Legyen  $F$  és  $G$  két gráf, ekkor  $\alpha(F \times G) \geq \max\{\alpha(F)|V(G)|, \alpha(G)|V(F)|\}$ .

**3.2. Definíció.** Egy  $G$  gráf függetlenségi hányadosa:

$$i(G) = \frac{\alpha(G)}{|V(G)|}.$$

Az előbbi lemma miatt az  $\{i(G^k)\}_{k=1}^{\infty}$  sorozat monoton növekvő, és mivel felülről korlátos, konvergens. Ezért a következő definícióban szereplő határérték mindig létezik. A fogalmat Brown, Nowakowski és Rall [6]-ban vezette be és [2, 3]-ban is vizsgálták.

**3.3. Definíció.** ([6]) Egy  $G$  gráf aszimptotikus direkt függetlenségi hányadosa:

$$A(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} i(G^k).$$

Ennek a gráfparaméternek az előzménye az ún. *aszimptotikus függetlenségi hányados*, amely egy másik gráfszorzatra, az ún. kartéziánus szorzásra van definiálva:  $I(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} i(G^{\square n})$ . Erről a paraméterről bővebben a [9, 10] munkákban olvashatunk. A két paraméter bár formailag hasonló, sok szempontból másképp viselkedik.

Az aszimptotikus direkt függetlenségi hányadossal kapcsolatban a következők eredmények ismertek.

**3.2. Tétel.** ([6]) *Ha  $G$  reguláris gráf, akkor  $A(G) \leq \frac{1}{2}$ .*

**3.3. Tétel.** ([6]) *Ha a  $G$  gráf felbontható  $H \cup K_{m_1} \cup \dots \cup K_{m_p}$  alakban úgy, hogy az utóbbi gráfok uniója  $G$  egy feszítő részgráffját adja és  $\chi(H) \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_p$ , akkor  $A(G) \leq A(H)$ .*

**3.4. Következmény.** ([6]) *Ha  $A(G)$ -re szeretnénk felső korlátot kapni, akkor tekintsük  $G$  komplementérének összes színezését, nézzük meg, hogy ezekben a legkisebb színosztály mérete legfeljebb mekkora, jelöljük ezt a számot  $c$ -vel. Ekkor  $A(G) \leq \frac{1}{c}$ .*

**3.5. Tétel.** ([6]) *Ha  $i(G) > \frac{1}{2}$ , akkor  $A(G) = 1$ .*

**3.6. Tétel.** ([6]) *Legyen  $I$  független halmaza  $G$ -nek, ekkor  $A(G) \geq \frac{|I|}{|I \cup N_G(I)|}$ .*

**3.7. Tétel.** ([6]) *Legyen  $G$  olyan gráf, melyre  $\alpha(G) = \frac{|V(G)|}{2}$ . Ekkor ha  $G$ -ben van teljes párosítás, akkor  $A(G) = \frac{1}{2}$ , egyébként  $A(G) = 1$ .*

Általános gráfra nyitott, hogy  $A(G)$  algoritmikusan kiszámítható-e, és ha igen, akkor mi a bonyolultsága. Páros gráfokra viszont egyszerű a kérdés. Ha  $G$  komponenseinek mérete nem egyezik meg, akkor a 3.5. Tétel miatt  $A(G) = 1$ . Ha a komponensek nagysága egyenlő és  $G$ -ben nincs teljes párosítás, akkor is  $A(G) = 1$ ; ha van teljes párosítás, akkor  $A(G) = \frac{1}{2}$ , a 3.7. Tételből adódóan. Az, hogy egy páros gráfban van-e teljes párosítás, polinom időben eldönthető (ld. például [14]), ezért igaz a következő állítás.

**3.8. Következmény.** ([6]) *Páros  $G$  gráf esetén  $A(G)$  polinom időben számolható.*

Szintén a [6] dolgozatban merült fel a kérdés, hogy milyen gráfokra egyezik meg az aszimptotikus direkt függetlenségi hányados és a függetlenségi hányados értéke.

**3.4. Definíció.** ([6]) *Egy  $G$  gráfot önuniverzálisnak nevezünk, ha  $A(G) = i(G)$ .*

Ilyen gráfokra adnak példát a következő tételek.

**3.9. Tétel.** ([6]) *Ha a  $G^{\times 2}$  gráf felbontható  $G \cup G \cup \dots \cup G$  alakban ( $G$   $n$  példányának uniója) úgy, hogy az utóbbi gráfok uniója  $G$  egy feszítő részgráffját adja, akkor  $G$  önuniverzális.*

Ennek következménye a következő két állítás.

**3.10. Tétel.** ([6]) *Ha  $G$  egy Abel-csoport Cayley gráfja, akkor  $G$  önuniverzális.*

(Egy  $G$  csoporthoz és egy  $S$  generáló halmazhoz tartozó Cayley gráf az a gráf, melynek csúcshalmazát a  $G$  csoport elemei adják, és két ilyen  $g_1, g_2$  pontot pontosan akkor kötünk össze, ha  $g_1^{-1}g_2 \in S$ .)

**3.11. Tétel.** ([6]) *Ha  $G$  egy  $n$ -csúcsú gráf és van olyan automorfizmusa, ami éppen egy  $n$  elemű orbit, akkor  $G$  önuniverzális.*

Fourier analízis segítségével bizonyította Alon, Dinur, Friedgut és Sudakov [2] a következő tételt. Az említett cikkben olvashatunk a hatványgráf független halmazainak struktúrájáról is.

**3.12. Tétel.** ([2]) *Legyen  $G$  összefüggő,  $r$ -reguláris,  $n$ -csúcsú gráf, legyenek  $r$  és  $q$  a  $G$  szomszédsági mátrixának legnagyobb, illetve legkisebb sajátértékei. Ekkor ha  $\frac{\alpha(G)}{n} = \frac{-q}{r-q}$ , akkor  $G$  önuniverzális.*

Tehát a 3.9. Tételből adódóan a teljes gráfok önuniverzálisak,  $A(K_n) = i(K_n) = \frac{1}{n}$ .

Teljes páros  $G$  gráf esetén, ha a két pontosztály mérete azonos, akkor a 3.7. Tételből következik, hogy  $A(G) = \frac{1}{2}$ , azaz ekkor  $G$  önuniverzális; ha pedig az egyik pontosztály nagyobb a másiknál, akkor a 3.5. Tétel szerint  $A(G) = 1$ , így ebben az esetben  $G$  nem önuniverzális. Ezekután természetesen adódhat a kérdés a teljes többrészes gráfok esetre.

A [6] cikk megemlíti, hogy sok más gráfcsalád mellett, a teljes többrészes gráfokra sem ismert, hogy mennyi az aszimptotikus direkt függetlenség hányados értéke.

Teljes többrészes gráfok esetén ha a legnagyobb pontosztály mérete több, mint a csúcsszám fele, akkor a 3.5. Tétel szerint  $A(G) = 1$ . Jelen dolgozat első eredményeként belátjuk, hogy minden más esetben, azaz ha a teljes többrészes gráf legnagyobb pontosztályának mérete nem haladja meg a csúcsszám felét, akkor  $n$ -nel jelölve a gráf csúcsszámát,  $\ell$ -el pedig a legnagyobb pontosztály méretét,  $A(G) = i(G) = \frac{\ell}{n}$ , azaz a gráf önuniverzális.

Ennek bizonyításához némi előkészületre lesz szükségünk.

A teljes többrészes gráfok fontos tulajdonsága az állítás szempontjából, hogy ha a csúcshalmazból a függetlenségi számuknál több pontot választunk ki, akkor ezen pontok szomszédai közt a gráf összes csúcsa előfordul. Ezen összefüggést teljesítő gráfokat tetszőleges gráffal direkt szorozva a szorzatgráf független halmazai speciális alakúvá bővíthetők anélkül, hogy a ponthalmaz szomszéd-sága növekedjen. Ezért elég lesz csak az ilyen speciális stuktúrájú független halmazokat vizsgálni. Pontosabban fogalmaz a következő lemma.

**3.13. Lemma.** *Legyen  $F$  egy olyan gráf, melyre teljesül, hogy*

$$\forall P \subseteq V(F), |P| > \alpha(F) - re : N_F(P) = V(F)$$

*és legyen  $H$  egy tetszőleges gráf. Továbbá legyen  $K$  az  $F \times H$  szorzatgráf tetszőleges független halmaza.*

*Vezessük be a következő jelöléseket:*

$$V_1(H) = \{v \in V(H) \mid |K \cap (V(F) \times \{v\})| > \alpha(F)\},$$

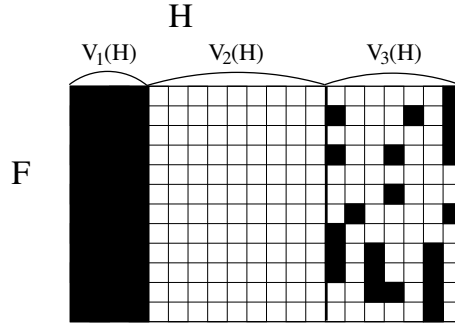
$$V_2(H) = N_H(V_1(H)),$$

$$V_3(H) = V(H) \setminus (V_1(H) \cup V_2(H)),$$

$$K_i = K \cap (V(F) \times V_i(H)), i \in \{1, 2, 3\} \text{ és}$$

$$\hat{K}_1 = V(F) \times V_1(H).$$

*Ekkor a  $\hat{K} = \hat{K}_1 \cup K_3$  ponthalmaz független halmaz,  $K \subseteq \hat{K}$  és  $N_{F \times H}(\hat{K}) = N_{F \times H}(K)$ . Továbbá  $V_1(H)$  független halmaza  $H$ -nak.*



2. ábra. Az ábrán a sötét négyzetek jelölik  $\hat{K}$  pontjait a szorzatgráfban.

*Bizonyítás.* Az  $F$  gráf tulajdonsága miatt  $N_{F \times H}(K_1) = V(F) \times N_H(V_1(H))$ , így  $K$  függetlensége és  $V_2(H) = N_H(V_1(H))$  miatt  $V_1(H) \cap V_2(H) = \emptyset$ ,  $V_1(H)$  független  $H$ -ban,  $K_2 = \emptyset$  és  $N_{F \times H}(K_1) = N_{F \times H}(\hat{K}_1)$ , tehát  $\hat{K}$  független  $F \times H$ -ban,  $K \subseteq \hat{K}$  és  $N_{F \times H}(\hat{K}) = N_{F \times H}(K)$ .

□

A következő állítás már lényegében az, amire szükségünk van; ebből már könnyedén fog adódni a teljes többrészes gráfok önuniverzális tulajdonsága abban az esetben, amikor a legnagyobb pontosztály mérete nem haladja meg a csúcsszám felét.

**3.14. Lemma.** *Legyen  $G$  olyan gráf, melyre teljesülnek a következő feltételek:*

- (1)  $\forall P \subseteq V(G), |P| > \alpha(G)$ -re:  $N_G(P) = V(G)$
- (2)  $\forall v \in V(G)$ -re  $d(v) \geq |V(G)| - \alpha(G)$
- (3)  $i(G) \leq \frac{1}{2}$ .

*Ekkor  $\forall t \in \mathbb{N}$ -re:  $i(G^{\times t}) = i(G)$ .*

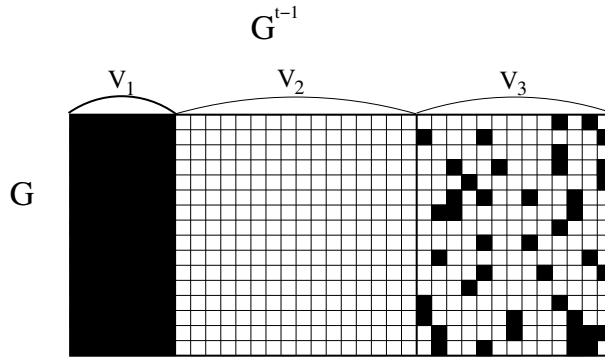
*Bizonyítás.* (A bizonyításban  $G^{\times n}$ -et egyszerűen  $G^n$ -nel jelöljük.)

Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel tehát, hogy nem igaz az állítás, és így létezik egy olyan legkisebb  $t \geq 2$  index, hogy  $t - 1$ -ig az állítás igaz, de  $t$ -re már nem. Azaz

$$i(G^t) > i(G), \text{ de } \forall r < t : i(G^r) = i(G).$$

Tehát  $G^t$ -ben kell lennie egy  $I$  független halmaznak, melyre  $\frac{|I|}{|V(G^t)|} > i(G)$ .

Ekkor  $G^t = G \times G^{t-1}$ -re alkalmazva a 3.13.Lemmát ( $F = G$ ,  $H = G^{t-1}$ ,  $K = I$  szereposztással) kapjuk, hogy  $\exists \hat{I}$  és a hozzá tartozó  $V(G^{t-1}) = V_1(G^{t-1}) \cup V_2(G^{t-1}) \cup V_3(G^{t-1})$  partíció, hogy  $\hat{I}$  független halmaza  $G^t$ -nek,  $I \subseteq \hat{I}$  és  $N_{G^t}(\hat{I}) = N_{G^t}(I)$ .



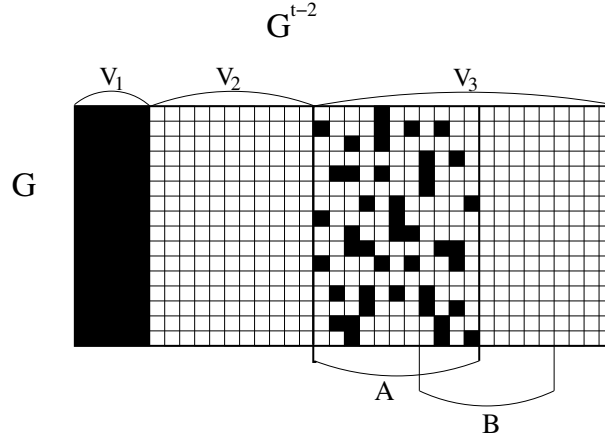
3. ábra.  $\hat{I}$  pontjai  $G^t$ -ben

A  $G^t$  teljes pontthalmazán az  $\hat{I}$ -beli pontok és a csúcsszám aránya nagyobb, mint  $i(G)$ , mert  $I$  választásából  $\frac{|\hat{I}|}{|V(G^t)|} \geq \frac{|I|}{|V(G^t)|} > i(G)$ .

De  $(V(G) \times V_3(G^{t-1}))$ -ben ugyanez az arány nem nagyobb, mint  $i(G)$ , mert  $V_1(G^{t-1})$  definíciója miatt  $\forall v \in V_3(G^{t-1})$ -re  $\frac{|\hat{I} \cap (V(G) \times \{v\})|}{|V(G) \times \{v\}|} \leq i(G)$  és így  $\frac{|\hat{I} \cap (V(G) \times V_3(G^{t-1}))|}{|V(G) \times V_3(G^{t-1})|} \leq i(G)$ .

Ezért  $V(G) \times (V_1(G^{t-1}) \cup V_2(G^{t-1}))$ -ben az arány nagyobb kell, hogy legyen, mint  $i(G)$ . Azaz  $i(G) < \frac{|\hat{I} \cap (V(G) \times (V_1(G^{t-1}) \cup V_2(G^{t-1})))|}{|V(G) \times (V_1(G^{t-1}) \cup V_2(G^{t-1}))|} = \frac{|V_1(G^{t-1})|}{|V_1(G^{t-1}) \cup V_2(G^{t-1})|}$ .

Ez viszont azt jelenti, hogy  $\exists J$  független halmaza  $G^{t-1}$ -nek, melyre  $\frac{|J|}{|J \cup N_{G^{t-1}}(J)|} > \frac{\alpha(G)}{|V(G)|}$ , hiszen  $J = V_1(G^{t-1})$  jó választás. (Ez persze nem jelenti azt, hogy  $\frac{|J|}{|V(G^{t-1})|} > i(G)$  lenne, sőt azt sem, hogy  $J$  kiegészíthető lenne ilyen tulajdonságú független halmazzá.)



4. ábra.  $\hat{J}$  pontjai  $G^{t-1}$ -ben

Most  $G^{t-1} = G \times G^{t-2}$ -re alkalmazva a 3.13.Lemrát ( $F = G$ ,  $H = G^{t-2}$ ,  $K = J$  szereposztással) kapjuk, hogy  $\exists \hat{J}$  és a hozzá tartozó  $V(G^{t-2}) = V_1(G^{t-2}) \cup V_2(G^{t-2}) \cup V_3(G^{t-2})$  partíció, hogy  $\hat{J}$  független halmaza  $G^{t-1}$ -nek,  $J \subseteq \hat{J}$  és  $N_{G \times (t-1)}(\hat{J}) = N_{G \times (t-1)}(J)$ .

Most is megvizsgálva a megfelelő  $|X|/|X \cup N_{G^{t-1}}(X)|$  arányokat kapjuk, hogy a  $\hat{J}$ -hez tartozó arány nagyobb, mint  $i(G)$ , mert  $\frac{|\hat{J}|}{|\hat{J} \cup N_{G^{t-1}}(\hat{J})|} \geq \frac{|J|}{|J \cup N_{G^{t-1}}(J)|} > i(G)$ .

De a  $\hat{J}_1$ -hez tartozó arány nem nagyobb, mint  $i(G)$ , azaz  $\frac{|\hat{J}_1|}{|\hat{J}_1 \cup N_{G^{t-1}}(\hat{J}_1)|} \leq i(G)$ . Ugyanis

$i(G) < \frac{|\hat{J}_1|}{|\hat{J}_1 \cup N_{G^{t-1}}(\hat{J}_1)|} = \frac{|V(G) \times V_1(G^{t-2})|}{|V(G) \times (V_1(G^{t-2}) \cup V_2(G^{t-2}))|} = \frac{|V_1(G^{t-2})|}{|V_1(G^{t-2}) \cup V_2(G^{t-2})|}$  esetén legyen  $M = (V(G) \times V_1(G^{t-2})) \cup (L \times V_3(G^{t-2}))$ , ahol  $L$  a  $G$  (egyik)  $\alpha(G)$  méretű független halmaza. Ekkor  $M$  független lenne  $G^{t-1}$ -ben és  $\frac{\alpha(G^{t-1})}{|V(G^{t-1})|} \geq \frac{|M|}{|V(G^{t-1})|} > i(G)$  lenne, ami ellentmondana  $t$  választásának.

Ezért a  $V(G) \times V_3(G^{t-2})$ -ba eső  $J_3$ -hoz tartozó arálynak nagyobbnak kell lennie, mint  $i(G)$ . Azaz  $\frac{|J_3|}{|J_3 \cup (N_{G^{t-1}}(J_3) \cap (V(G) \times V_3(G^{t-2})))|} > i(G)$ . (Mert  $\frac{|\hat{J}|}{|\hat{J} \cup N_{G^{t-1}}(\hat{J})|} = \frac{|\hat{J}_1| + |J_3|}{|\hat{J}_1 \cup N_{G^{t-1}}(\hat{J}_1)| + |J_3 \cup (N_{G^{t-1}}(J_3) \cap (V(G) \times V_3(G^{t-2})))|}$ .)

Legyen  $A$  és  $B$  a  $V_3(G^{t-2})$ -beli pontok két halmaza, úgy, hogy

$$A = \{v \in V(G^{t-2}) : J_3 \cap (V(G) \times \{v\}) \neq \emptyset\} \text{ és}$$

$$B = N_{G^{t-2}}(A) \setminus V_2(G^{t-2}).$$

Az állításbeli (2)-es feltétel miatt  $\forall w \in B$ -re igaz, hogy  $(N_{G^{t-1}}(J_3) \cap (V(G) \times V_3(G^{t-2}))) \cap (V(G) \times \{w\}) \geq |V(G)| - \alpha(G)$ , hiszen  $\forall w \in B$  csúcs szomszédja valamely  $v \in A$  csúcsnak.

Ezért  $|A| > |B|$ , mert  $|A| \leq |B|$  esetén ( $\hat{J}_1$  definíciójából)  $|J_3| \leq |A|\alpha(G)$  és (az előző megállapításból)  $|(N_{G^{t-1}}(J_3) \cap (V(G) \times V_3(G^{t-2})))| \geq |B|(|V(G)| - \alpha(G))$ -ből

$$\frac{|J_3|}{|(N_{G^{t-1}}(J_3) \cap (V(G) \times V_3(G^{t-2})))|} \leq \frac{|A|\alpha(G)}{|B|(|V(G)| - \alpha(G))} \leq \frac{\alpha(G)}{|V(G)| - \alpha(G)}$$

következne, ami ellentmond

$$\frac{|J_3|}{|J_3 \cup (N_{G^{t-1}}(J_3) \cap (V(G) \times V_3(G^{t-2})))|} > \frac{\alpha(G)}{|V(G)|} = i(G)\text{-nek.}$$

Továbbá  $A \setminus B$  független,  $N_{G^{t-2}}(A \setminus B) \subseteq B \setminus A$  és  $|A \setminus B| > |B \setminus A|$ , így

$$\frac{|A \setminus B|}{|(A \setminus B) \cup N_{G^{t-2}}(A \setminus B)|} > \frac{1}{2} \geq \frac{\alpha(G)}{|V(G)|}, \text{ ezért } N = (V(G) \times (A \setminus B)) \cup (L \times (V(G^{t-2}) \setminus (A \setminus B \cup B \setminus A)))$$

esetén  $\frac{\alpha(G^{t-1})}{|V(G^{t-1})|} \geq \frac{|N|}{|V(G^{t-1})|} > \frac{\alpha(G)}{|V(G)|}$ , de ez ellentmond  $t$  választásának.

Ellentmondásra jutottunk, ennek oka, hogy az indirekt feltevésünk hamis volt, tehát valóban igaz, hogy  $\forall t \in \mathbb{N}$ -re  $i(G^t) = i(G)$ .

□

Végül megkaptuk a várt állítást:

**3.15. Tétel.** Legyen  $G = K_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k}$  teljes többrészes gráf,  $n = \sum_{i=1}^n \ell_i$ ,  $\ell = \max_{1 \leq i \leq k} \ell_i$ .

Ekkor ha  $\ell \leq n - \ell$ , akkor  $A(G) = i(G) = \frac{\ell}{n}$ , azaz  $G$  önuniverzális; egyébként  $A(G) = 1$ .

*Bizonyítás:* Ha  $\ell > n - \ell$ , akkor  $i(G) = \frac{\ell}{n} > \frac{1}{2}$ , így a 3.5.Tételből adódóan  $A(G) = 1$ .

Ha pedig  $\ell \leq n - \ell$ , akkor előző lemma mindhárom feltétele teljesül, így  $A(G) = \frac{\alpha(G)}{|V(G)|} = \frac{\ell}{n}$ .

□

Továbbá azt is kaptuk, hogy a 3.8. Következményben említett páros gráfok mellett  $A(G)$  értéke teljes többrészes gráfok esetén is polinom időben számolható. (Hiszen csak a pontosztályok méretét kell meghatározni.)

**3.16. Következmény.** Teljes többrészes  $G$  gráf esetén  $A(G)$  polinom időben számolható.

## 4. Hall-hányados

A függetlenségi hányadoshoz hasonló gráfparaméter a kezdetben listaszínezéssel kapcsolatban bevezetett Hall-hányados is [7, 8].

**4.1. Definíció.** ([7, 8]) A  $G$  gráf Hall-hányadosa a csúcsszám és a függetlenségi szám hányadosának maximuma a gráf összes részgrádjára nézve, képletben:

$$\rho(G) = \max \left\{ \frac{|V(H)|}{\alpha(H)} : H \subseteq G \right\}.$$

A Hall-hányadosra igazak a következő összefüggések.

Tetszőleges  $G$  gráfra  $\omega(G) \leq \rho(G)$ , hiszen a  $H$  részgráfot választhatjuk  $G$  egy maximális klikkjének. Továbbá  $\rho(G) \leq \chi_f(G) \leq \chi(G)$ ; ez abból adódik, hogy  $G$  bármely  $H$  részgrádjára igaz, hogy  $\chi_f(G) \geq \chi_f(H) \geq \frac{|V(H)|}{\alpha(H)}$ .

Simonyi [18] dolgozata azt vizsgálja, hogy ezen gráfparaméter a különböző gráfhatványozások során hogyan viselkedik; megfelelő normálizálással aszimptotikusan milyen értékhez tart. Az eredmények a következők [18]:

A konormális és a normális hatványozásra ismert a paraméter viselkedése. Konormális hatványozásra a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho(G^n)}$  értéke  $\chi_f(G)$ . Normális hatványozásra a megfelelő határérték,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho(G^{(n)})}$  egyenlő a gráf Witsenhausen sebességével, ami  $R(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\chi(G^{(n)})}$ . (A Witsenhausen sebességről és annak információelméleti vonatkozásáról [20]-ban, illetve [1]-ben olvashatunk.)

A kartéziánus szorzást tekintve a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(G^{\square n})$  határértékről annyi ismert, hogy megegyezik az előző fejezetben említett aszimptotikus (kartéziánus) függetlenségi hányados reciprokával. Továbbá [9, 10] alapján a határérték  $\chi(G)$  és  $\chi_f(G)$  között van, és [21] alapján megegyezik a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_f(G^{\square n})$  kifejezés értékével.

A direkt (vagy más néven kategóriai) szorzásra a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(G^{\times n})$  határérték csak bizonyos speciális gráfok esetén ismert, a sejtés az, hogy  $\chi_f(G)$  az eredmény. A lexikografikus hatványozásra vizsgálva is csak korlátok ismertek,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho(G^{\circ n})}$  pontos értékére [18]-ban leírt sejtés, hogy a határérték ebben az esetben is  $\chi_f(G)$ .

A következő két alfejezetben tovább vizsgálom a Hall-hányados aszimptotikus viselkedését a direkt, illetve a lexikografikus hatványozás esetén.

## 4.1. Aszimptotikus direkt Hall-hányados

Ebben a fejezetben a Hall-hányados aszimptotikus viselkedését vizsgálom direkt szorzás esetén.

**4.2. Definíció.** ([18]) Egy  $G$  gráf aszimptotikus direkt Hall-hányadosa:

$$h_{\times}(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(G^{\times n})$$

A határérték létezik a  $\{\rho(G^i)\}_{i=1}^{\infty}$  sorozat monotonitása és korlátossága miatt [18].

Ezen gráfparaméterre vonatkozóan a  $\chi_f(G^{\times n}) = \chi_f(G)$  egyszerű összefüggésből (indoklását ld. például [18]-ban) adódik az a [18]-ban szereplő megállapítás, miszerint

$$h_{\times}(G) \leq \chi_f(G).$$

Kérdés, hogy igaz-e a másik irányú egyenlőtlenség is.

**4.1. Sejtés.** ([18])

$$h_{\times}(G) = \chi_f(G)$$

Ahhoz, hogy  $h_{\times}(G) \geq \chi_f(G)$  is teljesüljön, a monotonitás miatt elég, hogy egy tetszőleges  $k$ -ra fennálljon a  $\rho(G^{\times k}) \geq \chi_f(G)$  egyenlőtlenség. Ebből az észrevételből néhány gráfra belátható a sejtés:

**4.2. Állítás.** ([18]) Ha  $G$  perfektnél vagy csúcstranzitív gráf, akkor  $h_{\times}(G) = \chi_f(G)$ .

Jelöljük a továbbiakban  $W_n$ -nel az  $n+1$  csúcsú kerékgérfot, azaz azt a gérfot, melyet egy  $n$  hosszú körből kapunk egy csúcs hozzáadásával, amit összekötünk a kör összes csúcsával.

**4.3. Tétel.** ([18])  $h_{\times}(W_n) = \chi_f(W_n)$ .

Ezen tétel kicsit általánosabb formáját sikerült belátnom a bizonyítás némi változtatásával.

**4.4. Tétel.** Ha egy  $G$  gráfra igaz a sejtés, azaz  $h_{\times}(G) = \chi_f(G)$ , akkor arra a  $\hat{G}$  gráfra is igaz lesz, melyet  $G$ -ből kapunk egy olyan pont hozzáadásával, melyet összekötünk  $G$  összes csúcsával.

*Bizonyítás.* Tegyük fel tehát, hogy  $G$ -re igaz a sejtés, azaz  $h_{\times}(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(G^{\times n}) = \chi_f(G)$ . Ez a definíció és a  $\{\rho(G^{\times i})\}_{i=1}^{\infty}$  sorozat monoton növekvő tulajdonsága miatt azt jelenti, hogy

$$\forall \varepsilon > 0 \text{-ra } \exists n_0(\varepsilon), \text{ hogy } \forall n \geq n_0 \text{ esetén } \rho(G^{\times n}) \geq \chi_f(G) - \varepsilon. \quad (1)$$

A új,  $w$  csúcs hozzávételével a frakcionális kromatikus szám 1-gyel nő, hiszen ez a csúcs nincs  $G$  egyetlen csúcsával sem közös független halmazban. Részletesebb indoklás a következő.

Egyrészt  $G$  egy adott frakcionális klikkjéből kaphatunk  $\hat{G}$ -nek egy  $\omega_f(G) + 1$  értékű frakcionális klikkjét, úgy, hogy az  $G$  csúcsain vesszük  $G$  frakcionális klikkjének az értékét, a  $w$ -hez pedig 1-et rendelünk. Ebből  $\omega_f(\hat{G}) \geq \omega_f(G) + 1$  adódik.

Másrészt  $G$  egy adott frakcionális színezéséből kaphatunk  $\hat{G}$ -nek egy  $\chi_f(G) + 1$  értékű frakcionális színezését, úgy, hogy a  $G$  függetlenjein vesszük  $G$  frakcionális színezésének az értékét, a  $\{w\}$  független halmazhoz pedig 1-et rendelünk. Ebből  $\chi_f(\hat{G}) \leq \chi_f(G) + 1$  adódik.

Összevetve az alsó és felső becslést, és felhasználva, hogy a frakcionális klikkszám megegyezik a frakcionális kromatikus számmal, megkapjuk, hogy  $\chi_f(\hat{G}) = \chi_f(G) + 1$ .

Tehát azt kell belátnunk, hogy  $h_\times(\hat{G}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\hat{G}^{\times n}) = \chi_f(\hat{G}) = \chi_f(G) + 1$ , azaz bármely  $\varepsilon > 0$ -ra létezik  $\hat{n}_0(\varepsilon)$ , hogy bármely  $n \geq \hat{n}_0$  esetén  $\rho(\hat{G}^{\times n}) \geq \chi_f(G) + 1 - \varepsilon$ . Ehhez a monotonitás miatt elég bármely  $\varepsilon$ -hoz egy alkalmas  $\hat{n}_0$ -t találni, melyre  $\rho(\hat{G}^{\times n_0}) \geq \chi_f(G) + 1 - \varepsilon$ .

A (1) megállapításból következik, hogy bármely  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik  $n_0$  és  $H \subseteq G^{\times n_0}$ , melyre fennáll a  $\frac{|V(H)|}{\alpha(H)} \geq \chi_f(G) - \varepsilon$  egyenlőtlenség. Jelöljük  $v_1, v_2, \dots, v_k$  a  $H$  gráf csúcsait,  $k$  a csúcsszámát,  $\alpha$  pedig a függetlenségi számát és a  $v_1, v_2, \dots, v_\alpha$  csúcsok alkossák a  $G$  egy maximális független halmazát. Legyen  $\hat{H}$  a  $\hat{G}^{\times 2n_0}$  gráf feszített részgráfja a  $P_1 \cup P_2 \cup Q$  csúcshalmazon, ahol

$$P_1 = \{(v_1, w^{n_0}), (v_2, w^{n_0}), \dots, (v_\alpha, w^{n_0})\},$$

$$P_2 = \{(w^{n_0}, v_1), (w^{n_0}, v_2), \dots, (w^{n_0}, v_\alpha)\} \text{ és}$$

$$Q = \{(v_{\alpha+1}, v_{\alpha+1}), (v_{\alpha+2}, v_{\alpha+2}), \dots, (v_k, v_k)\}.$$

Az így kapott  $\hat{H}$  gráf csúcsszáma  $k + \alpha$ . Függetlenségi száma pedig legfeljebb  $\alpha$ , hiszen a  $P_1 \cup P_2$  halmazon kapott gráf egy teljes páros gráf, így  $\hat{H}$  egy tetszőleges független halmaza vagy csak  $P_1$ -beli vagy csak  $P_2$ -beli csúcsot tartalmazhat; de a  $P_1 \cup Q$  illetve a  $P_2 \cup Q$  halmazon kapott gráf tartalmazza a  $H$  gráfot részgráfként.

Következik tehát, hogy  $\frac{|V(\hat{H})|}{\alpha(\hat{H})} \geq \frac{k+\alpha}{\alpha} = \frac{k}{\alpha} + 1 = \frac{|V(H)|}{\alpha(H)} + 1 \geq \chi_f(G) + 1 - \varepsilon$ . Így  $\hat{n}_0 = 2n_0$  jó választás.

Tehát  $h_\times(\hat{G}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\hat{G}^{\times n}) = \chi_f(\hat{G})$ , ahogy állítottuk.

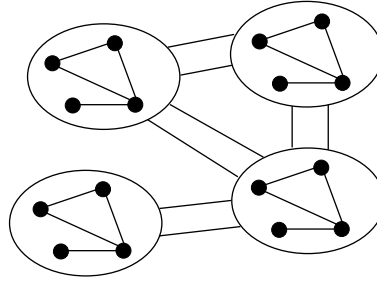
□

## 4.2. Aszimptotikus lexikografikus Hall-hányados

Ebben a fejezetben tovább vizsgálom a Hall-hányados aszimptotikus viselkedését lexikografikus szorzás esetén.

**4.3. Definíció.** Az  $F$  és  $G$  gráfok lexikografikus szorzata az az  $F \circ G$  gráf, melynek csúcshalmaza  $V(F \circ G) = V(F) \times V(G)$  és élhalmaza  $E(F \circ G) = \{ \{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\} : (\{u_1, u_2\} \in E(F)) \text{ vagy } (u_1 = u_2 \text{ és } \{v_1, v_2\} \in E(G)) \}$ .

A lexikografikus szorzás asszociatív, de az említett többi szorzással ellentétben, nem kommutatív. A  $G$  gráf  $n$ -edik lexikografikus hatványát, a  $G^{\circ n}$  gráfot a  $G$  gráf  $n$  példányának lexikografikus összeszorzásával kapjuk. (Tehát a hatványgráfban két csúc  $(n$  hosszú pontsorozat) pontosan akkor van összekötve, ha össze vannak kötve az első olyan koordinátában, ahol eltérnek.)



5. ábra. Egy gráf lexikografikus szorzás szerinti második hatványa

**4.4. Definíció.** ([18]) Egy  $G$  gráf aszimptotikus lexikografikus Hall-hányadosa:

$$h_{\circ}(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho(G^{\circ n})}$$

A határérték létezik és a következő korlátok közé szorítható. ([18])

**4.5. Tétel.** ([18])

$$\max\{\rho(G), R(G)\} \leq h_{\circ}(G) \leq \chi_f(G),$$

ahol  $R(G)$  a  $G$  gráf Witsenhausen-sebessége.

(A Witsenhausen-sebesség definícióját ld. a 4. fejezet bevezetésében.)

Az előbbi tételben szereplő egyik alsó határ sem jobb a másiknál ([18]), előfordulhat, hogy  $\rho(G) > R(G)$ , mint például  $C_5$  esetén:  $\rho(C_5) = \frac{5}{2} > \sqrt{5} = R(C_5)$  (utóbbi egyenlőség [13] és [20] eredményeiből adódik), de az is lehet, hogy  $\rho(G) < R(G)$ , mint például  $W_5$  esetén:  $\rho(W_5) = 3 < 1 + \sqrt{5} \leq R(W_5)$  (utóbbi egyenlőtlenség  $R(G) \geq C(G)$ ,  $C(W_5) = 1 + \sqrt{5}$ -ből következik, ahol  $C(G)$  a  $G$  gráf Shannon-kapacitását jelöli; ezen összefüggések [15]-ben, illetve [19]-ben szereplő eredményekből adódnak).

Ha a  $\rho(G^{on})$  Hall-hányados helyett a függetlenségi hányados reciprokát, az  $\frac{|V(G^{on})|}{\alpha(G^{on})}$  értéket vizsgálánk, akkor könnyű dolgunk lenne, hiszen  $|V(G^{on})| = |V(G)|^n$  és  $\alpha(G^{on}) = (\alpha(G))^n$  is teljesül (utóbbi összefüggés indoklását ld. [11]-ben), így a  $\left\{ \sqrt[n]{\frac{|V(G^{on})|}{\alpha(G^{on})}} \right\}_{n=1}^{\infty}$  sorozat konstans  $\frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ . Ezzel szemben a  $\left\{ \sqrt[n]{\rho(G^{on})} \right\}_{n=1}^{\infty}$  sorozat nem lehet minden  $G$  gráfra konstans  $\frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ , mert a 4.5. Tételben szereplő  $R(G)$  alsó becslés bizonyos gráfokra erősebb, mint a  $\rho(G)$  korlát.

Kérdés, hogy mi  $h_o(G)$  pontos értéke. [18]-beli sejtés, hogy a 4.5. Tétel felső korlátja pontos.

#### 4.6. Sejtés. ([18])

$$h_o(G) = \chi_f(G)$$

Néhány speciális gráfra már a 4.5. Tétel által adott korlátokból is igazolható a sejtés. Ilyenek a perfekt gráfok, hiszen ezen gráfokra  $\chi_f(G) = \omega(G) \leq \rho(G)$ ; és ilyenek a csúcstranzitív gráfok is, hiszen ezen gráfok esetén  $\chi_f(G) = \frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \leq \rho(G)$  (a csúcstranzitív gráfokra fennálló  $\chi_f(G) = \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$  egyenlőség indoklása megtalálható például [17]-ben).

Viszont például a  $W_5$  kerékgráfra csak annyit kapunk, hogy  $1 + \sqrt{5} \leq h_o(W_5) \leq \frac{7}{2}$ . A következőkben bebizonyítom, hogy a pontos érték  $\frac{7}{2}$ , illetve, hogy tetszőleges kerékgráfra fennáll a 4.6. Sejtés.

#### 4.7. Állítás. $h_o(W_k) = \chi_f(W_k)$ , ahol $W_k$ a $k + 1$ csúcsú kerékgráfot jelöli.

(A kerékgráfok definícióját ld. az előző alfejezetben.)

Az állításnak csak azon része érdekes, amikor  $k \geq 5$  és páratlan, hiszen a többi esetben  $W_k$  perfekt gráf, így a 4.5. Tételből adódik az összefüggés. Ezért a továbbiakban feltehetjük, hogy  $k = 2\ell + 1$ ,  $\ell \geq 2$ .

A bizonyításhoz fel fogjuk használni a következő egyszerű összefüggéseket:

#### 4.8. Lemma. $\alpha(G^{on}) = \alpha(G)^n$ és $\omega(G^{on}) = \omega(G)^n$ .

A bizonyítást ld. például [11]-ben.

#### 4.9. Lemma. $\chi_f(W_{2\ell+1}) = \frac{3\ell+1}{\ell}$ , $\ell \geq 2$

*Bizonyítás.*  $W_{2\ell+1}$  egy frakcionális klikkjét kapjuk, ha a kerékgráfban a kör csúcsaihoz  $\frac{1}{\ell}$ -ed rendelünk, a középső, hozzávett csúcshoz pedig 1-et; könnyen ellenőrizhető, hogy így  $W_{2\ell+1}$  bármely független halmazára összeadva a benne lévő csúcsokhoz rendelt számokat legfeljebb 1-et kapunk. Ezért  $\omega_f(W_{2\ell+1}) \geq \frac{3\ell+1}{\ell}$ .

$W_{2\ell+1}$  egy frakcionális színezését kapjuk, ha a kerékgráfban a kör egy  $\ell$  elemű maximális független halmazához és annak  $2\ell + 1$  elforgatottjához  $\frac{1}{\ell}$ -et rendelünk, a középső, hozzávett csúcsból álló egyelemű független halmazhoz pedig 1-et; könnyen ellenőrizhető, hogy így  $W_{2\ell+1}$  bármely csúcsára összeadva az őt tartalmazó független halmazokhoz rendelt számokat legalább 1-et kapunk. Ezért  $\chi_f(W_{2\ell+1}) \leq \frac{3\ell+1}{\ell}$ .

Felhasználva, hogy  $\omega_f(W_{2\ell+1}) = \chi_f(W_{2\ell+1})$  megkapjuk az állítást. □

*A 4.7. Tétel bizonyítása.* Láttuk, hogy az állítás csak  $k = 2\ell + 1$ ,  $\ell \geq 2$  esetén nem trivialis, ezért elég csak erre az esetre bizonyítani.

Mivel  $h_o(W_{2\ell+1}) \leq \chi_f(W_{2\ell+1})$  adódik a 4.5. Tételből, elég belátni, hogy  $h_o(W_{2\ell+1}) \geq \chi_f(W_{2\ell+1})$ , azaz a 4.9. Lemma miatt, hogy  $h_o(W_{2\ell+1}) \geq \frac{3\ell+1}{\ell}$ . Ehhez vezessünk be először néhány jelölést.

Legyen

$$p_G(n, \alpha) = \max\{|V(H)| : H \subseteq G^{on}, \alpha(H) \leq \alpha\},$$

$$q_G(n, \alpha) = \max\left\{\frac{|V(H)|}{\alpha} : H \subseteq G^{on}, \alpha(H) \leq \alpha\right\},$$

ahol  $n$  és  $\alpha$  pozitív egész számok. Azaz  $q_G(n, \alpha) = \frac{p_G(n, \alpha)}{\alpha}$ .

A Hall-hányadossal való kapcsolat:

$$\rho(G^{on}) = \max\{q(n, \alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}_+\}$$

$$h_o(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho(G^{on})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{\sqrt[n]{q(n, \alpha)} : \alpha \in \mathbb{Z}_+\}$$

Továbbá  $G = W_{2\ell+1}$ -re a  $p_G(n, \alpha)$  értékek között a következő azonosság is fennáll:

$$p_{W_{2\ell+1}}(n, \ell\alpha) \geq p_{W_{2\ell+1}}(n-1, \ell\alpha) + (2\ell+1)p_{W_{2\ell+1}}(n-1, \alpha)$$

Ugyanis  $W_{2\ell+1}$   $n$ -edik lexikografikus hatványában  $\ell\alpha$  függetlenségi számú részgráfot kapunk, ha az eggyel kisebb hatványban lévő  $\alpha$  és  $\ell\alpha$  függetlenségi számú részgráfokat a 6. ábra szerint elhelyezzük  $W_{2\ell+1}$  csúcsaiban.  $W_{2\ell+1}$  egy frakcionális klikkjét kapjuk, ha a kerékgráfban a kör pontjaihoz  $\frac{1}{\ell}$ -et rendelünk, míg a középső ponthoz 1-et. Ugyanezek az arányok teljesülnek a csúcsok helyébe képzelt részgráfok függetlenségi számai között is, ezért a frakcionális klikk definíciója miatt a kapott gráf függetlenségi száma legfeljebb  $\ell\alpha$  lesz.

Ebből felhasználva a  $p_G(n, \alpha)$  és  $q_G(n, \alpha)$  közti kapcsolatot is kapjuk, hogy:

$$q_{W_{2\ell+1}}(n, \ell\alpha) \geq q_{W_{2\ell+1}}(n-1, \ell\alpha) + \frac{2\ell+1}{\ell} p_{W_{2\ell+1}}(n-1, \alpha) =$$



A "háromszög széleit" könnyen meghatározhatjuk:

$q_{W_{2\ell+1}}(n, 1) = p(n, 1) = 3^n$ , mert  $(p_G(n, \alpha)$  definíciójából)  $p_G(n, 1) = \omega(G^{\circ n})$ , (4.8. Lemmából)  $\omega(G^{\circ n}) = \omega(G)^n$  és  $\omega(W_{2\ell+1}) = 3$ .

$q_{W_{2\ell+1}}(n, \ell^n) = \left(\frac{2\ell+2}{\ell}\right)^n$ , mert (4.8. Lemmából)  $\alpha(G^{\circ n}) = \alpha(G)^n$  és  $\alpha(W_{2\ell+1}) = \ell$ , így  $\alpha(W_{2\ell+1}^{\circ n}) = \ell^n$ , amiből  $p_{W_{2\ell+1}}(n, \ell^n) = |V(W_{2\ell+1}^{\circ n})| = (2\ell + 2)^n$ , tehát  $q_{W_{2\ell+1}}(n, \ell^n) = \left(\frac{2\ell+2}{\ell}\right)^n$ .

A közbülső értékeket pedig megkaphatjuk a  $q_{W_{2\ell+1}}(n, \ell\alpha)$ -ra kapott rekurzióból.

A rekurzióból adódóan a "háromszög  $j$ -edik oszlopának", azaz a  $\{q(j, \alpha) : \alpha = 1, \ell, \ell^2, \dots, \ell^j\}$  elemeknek az összege aszimptotikusan egyenlő  $\left(\frac{3\ell+1}{\ell}\right)^j$ -nel, hiszen mint ahogy már említettük, a  $q_{W_{2\ell+1}}(n, \ell\alpha)$  érték az eggyel kisebb hatványban lévő  $q_{W_{2\ell+1}}(n-1, \alpha)$ ,  $q_{W_{2\ell+1}}(n-1, \ell\alpha)$  értékek konvex kombinációjának  $\left(\frac{3\ell+1}{\ell}\right)$ -szerese. A  $j$ -edik "oszlopban" lévő elemek száma csak  $j+1$ , azaz polinomja a  $j$ -nek. Ezért az "oszlopok" maximális elemei, azaz a  $\max\{q(j, \alpha) : \alpha = 1, \ell, \ell^2, \dots, \ell^j\}$  értékek aszimptotikusan  $\left(\frac{3\ell+1}{\ell}\right)^j$ -nel egyenlők.

Tehát  $h_o(W_{2\ell+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{\sqrt[n]{q(n, \alpha)} : \alpha \in \mathbb{Z}_+\} \geq \frac{3\ell+1}{\ell}$ , ahogy állítottuk.

□

A bizonyítás csak a végtelenben garantálja a  $\frac{3\ell+1}{\ell}$  érték elérését. Viszont elképzelhető lenne, hogy már valamely véges  $n_0$ -ra teljesül, hogy  $\sqrt[n_0]{\rho(W_{2\ell+1}^{n_0})} = \frac{3\ell+1}{\ell}$ . Könnyen meggondolható, hogy ez nincs így. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik ilyen  $n_0$ , ekkor egy  $H \subseteq W_{2\ell+1}^{n_0}$  gráfra  $\frac{|V(H)|}{\alpha(H)} = \left(\frac{3\ell+1}{\ell}\right)^{n_0} = \frac{(3\ell+1)^{n_0}}{\ell^{n_0}}$  kellene, hogy teljesüljön; de  $|V(H)| \leq (2\ell+2)^{n_0}$  és a  $\frac{(3\ell+1)^{n_0}}{\ell^{n_0}}$  tört nem egyszerűsíthető, ezért ez lehetetlen.

A kerékgráfokra vonatkozó bizonyítás általánosítható tetszőleges gráfra.

#### 4.10. Tétel.

$$h_o(G) = \chi_f(G)$$

*Bizonyítás.*

Mivel  $h_o(G) \leq \chi_f(G)$  adódik a 4.5. Tételből, elég belátni, hogy  $h_o(G) \geq \chi_f(G)$ .

Legyen

$$p_G(n, \alpha) = \max\{|V(H)| : H \subseteq G^{\circ n}, \alpha(H) \leq \alpha\},$$

ahol  $n$  tetszőleges pozitív egész szám,  $\alpha$  tetszőleges pozitív valós szám. Természetesen teljesül, hogy  $p_G(n, \alpha) = p_G(n, [\alpha])$ , ennek ellenére mégis érdemes nem csak egész  $\alpha$  értékekre definiálni ezt a mennyiséget.

Legyen továbbá

$$q_G(n, \alpha) = \max\left\{\frac{|V(H)|}{\alpha} : H \subseteq G^{\circ n}, \alpha(H) \leq \alpha\right\},$$

azaz

$$q_G(n, \alpha) = \frac{p_G(n, \alpha)}{\alpha}.$$

Az előbbi megállapításból adódóan  $q_G(n, \alpha) \leq q_G(n, [\alpha])$ .

Ezen mennyiségekkel a Hall-hányados és az aszimptotikus lexikografikus Hall-hányados a következőképpen írható le.

$$\rho(G^{\circ n}) = \max\{q(n, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}_+\}.$$

A maximum mindenképpen felvételik, mégpedig pozitív egész  $\alpha$  helyen, hiszen  $p_G(n, \alpha)$  korlátos, monoton növekvő, lépcsős függvény, mely csak egész helyeken szakad;  $q_G(n, \alpha)$  pedig ennek a függvénynek és a monoton növekvő identitás függvénynek a hányadosa.

Ebből kapjuk, hogy

$$h_o(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho(G^{\circ n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{\sqrt[n]{q_G(n, \alpha)} : \alpha \in \mathbb{R}_+\}.$$

A  $p_G(n, \alpha)$  értékek között az alábbi rekurziós összefüggés írható fel.

Legyen  $g : V(G) \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}$  a  $G$  gráf egy optimális frakcionális klikkje, azaz teljesüljön, hogy

$\forall U \in S(G)$ -re  $\sum_{v \in U \in S(G)} g(v) \leq 1$  és  $\sum_{v \in V(G)} g(v) = \chi_f(G)$ . Ekkor teljesül, hogy

$$p_G(n, \alpha) \geq \sum_{v \in G} p_G(n-1, g(v)\alpha).$$

Hiszen a  $G$  gráf  $n$ -edik lexikografikus hatványának egy részgráfját kapjuk, ha  $G$  csúcsai helyére  $G^{\circ(n-1)}$  részgráfjait képzeljük; a kapott részgráf egy tetszőleges független halmaz, pedig úgy áll elő, hogy tekintjük  $G$  egy független halmazát és ennek csúcsaiba írt részgráfok független halmazait nézzük. Ezért ha a  $G$  gráf  $v$  csúcsa helyébe egy legfeljebb  $g(v)\alpha$  függetlenségi számú részgráfot írunk, akkor a kapott gráf függetlenségi száma legfeljebb  $\max_{U \in S(G)} \sum_{v \in U} g(v)\alpha \leq \alpha \max_{U \in S(G)} \sum_{v \in U} g(v) \leq \alpha$ .

Ebből a  $q_G(n, \alpha)$  értékek definíciója szerint kapjuk, hogy

$$q_G(n, \alpha) = \frac{p_G(n, \alpha)}{\alpha} \geq \frac{1}{\alpha} \sum_{v \in G} p_G(n-1, g(v)\alpha) = \sum_{v \in G} \frac{g(v)\alpha}{\alpha} \frac{p_G(n-1, g(v)\alpha)}{g(v)\alpha} = \sum_{v \in V(G)} g(v) q_G(n-1, g(v)\alpha).$$

Tehát

$$q_G(n, \alpha) \geq \sum_{v \in V(G)} g(v) q_G(n-1, g(v)\alpha).$$

Vezessük be a következő  $\hat{q}_G(n, \alpha)$  függvényeket!

$$\hat{q}_G(1, \alpha) = \begin{cases} c_G, & \text{ha } 1 \leq \alpha \leq m = |V(G)| \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

ahol  $c_G$  olyan pozitív konstans, mely alulról becsli a  $q_G(1, \alpha)$  értékeket  $1 \leq \alpha \leq m = |V(G)|$  esetén; ilyen  $c_G$  létezik, például  $c_G = \frac{1}{m}$  jó választás. Továbbá  $n \geq 2$  – *relegyen*

$$\hat{q}_G(n, \alpha) = \sum_{v \in V(G)} g(v) \hat{q}_G(n-1, g(v)\alpha).$$

$\hat{q}_G(1, \alpha)$  konstrukciójából adódóan bármely pozitív egész  $n$  és bármely nem negatív valós  $\alpha$  esetén teljesül, hogy

$$\hat{q}_G(1, \alpha) \leq q_G(1, \alpha).$$

A következőkben belátjuk, hogy létezik olyan  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  valós számokból álló sorozat, melyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\hat{q}_G(n, \alpha_n)} = \chi_f(G)$ . Ebből már az előzőek alapján adódni fog a tétel állítása.

Ehhez transzformáljuk át a  $\hat{q}_G(n, \alpha)$  függvényeket. Legyen

$$r_G(n, \beta) = \hat{q}_G(n, m^\beta),$$

ahol  $n$  pozitív egész szám,  $\beta$  valós szám. ( $\alpha = m^\beta$ ,  $\beta = \log_m \alpha$ )

Mivel a transzformáció a függvény maximumán nem változtat (csak a maximum helyén), elég belátni, hogy létezik olyan  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$  valós számokból álló sorozat, melyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r_G(n, \beta_n)} = \chi_f(G)$ .

Felhasználva  $r_G(n, \beta)$  definícióját kapjuk, hogy

$$r_G(1, \beta) = \begin{cases} c_G, & \text{ha } 0 \leq \beta \leq 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Továbbá } r_G(n, \beta) &= \hat{q}_G(n, m^\beta) = \sum_{v \in V(G)} g(v) \hat{q}_G(n-1, g(v)m^\beta) = \\ &= \sum_{v \in V(G)} g(v) r_G(n-1, \log_m(g(v)m^\beta)) = \sum_{v \in V(G)} g(v) r_G(n-1, \log_m(g(v)) + \beta). \end{aligned}$$

Azaz

$$r_G(n, \beta) = \sum_{v \in V(G)} g(v) r_G(n-1, \log_m(g(v)) + \beta).$$

Számoljuk ki a  $r_G(n, \beta)$  függvények integrálját a számegyenesen!

$$\int_{\beta=-\infty}^{\infty} r_G(1, \beta) = c_G$$

$$\begin{aligned} \int_{\beta=-\infty}^{\infty} r_G(n, \beta) &= \int_{\beta=-\infty}^{\infty} \sum_{v \in V(G)} g(v) r_G(n-1, \log_m(g(v)) + \beta) = \\ &= \sum_{v \in V(G)} g(v) \int_{\beta=-\infty}^{\infty} r_G(n-1, \log_m(g(v)) + \beta) = \sum_{v \in V(G)} \left( g(v) \int_{\beta=-\infty}^{\infty} r_G(n-1, \beta) \right) = \\ &= \left( \sum_{v \in V(G)} g(v) \right) \int_{\beta=-\infty}^{\infty} r_G(n-1, \beta) = \chi_f(G) \int_{\beta=-\infty}^{\infty} r_G(n-1, \beta) \end{aligned}$$

Így

$$\int_{\beta=-\infty}^{\infty} r_G(n, \beta) = c_G (\chi_f(G))^{n-1}.$$

Határozzuk meg azt a halmazt a számegyenesen, melyen a  $r_G(n, \beta)$  függvények nullától különböző értéket vesznek fel, azaz a függvények tartóját!

$$T(r_G(1, \beta)) = [0, 1]$$

$T(r_G(n, \beta)) \subseteq [0, 1 - (n-1)g_G]$ , mert  $g_G \leq \log_m(g(v)) \leq 0$ . Ahol  $g_G$  alulról becsli  $\log_m(g(v))$ -t bármely  $v \in V(G)$ -re; ilyen  $g_G$  létezik, például  $g_G = \min\{\log_m(g(v)) : v \in V(G)\}$  jó választás.

Mivel  $\int_{\beta=-\infty}^{\infty} r_G(n, \beta)$  aszimptotikusan egyenlő  $(\chi_f(G))^n$ -nel, de a  $r_G(n, \beta)$  tartója része egy olyan intervallumnak, melynek hossza polinomja az  $n$ -nek, így létezik olyan  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$  valós számokból álló sorozat, melyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r_G(n, \beta_n)} \leq \chi_f(G)$ .

Az ebből a  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$  sorozatból  $\alpha_n = m^{\beta_n}$  transzformációs szabállyal kapott  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  sorozatra igaz lesz, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\hat{q}_G(n, \alpha_n)} \leq \chi_f(G)$ .

Így ez előzőeket felhasználva  $h_o(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{\sqrt[n]{q_G(n, \alpha)} : \alpha \in \mathbb{R}_+\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{\sqrt[n]{\hat{q}_G(n, \alpha)} : \alpha \in \mathbb{R}_+\} \leq \chi_f(G)$ .

Tehát

$$h_o(G) = \chi_f(G).$$

□

Ezzel a 4.6.Sejtés igazolást nyert.

## 5. Összefoglalás, további kutatási lehetőségek

Dolgozatomban először direkt gráfszorzásra vizsgálva a függetlenségi hányados értéket bebizonyítottam, hogy a teljes többrészes gráfok pontosan akkor önuniverzálisak, ha a legnagyobb pontosztályuk mérete nem haladja meg a csúcsszám felét. Érdekes további kérdés újabb önuniverzális gráfok kerése, a függetlenségi hányados mélyebb vizsgálata.

Ezután direkt szorzásra a Hall-hányadost tanulmányoztam. Beláttam, hogy ha egy gráfra igaz, hogy az aszimptotikus direkt Hall-hányadosa éppen a frakcionális kromatikus száma, akkor arra a gráfra is igaz lesz ez, melyet úgy kapunk, hogy a gráfhoz hozzáveszünk egy pontot, és azt összekötünk a gráf minden csúcsával. Továbbra is nyitott kérdés, hogy tetszőleges gráfra is igaz-e az a sejtés, hogy a gráf aszimptotikus direkt Hall-hányadosa és frakcionális kromatikus száma megegyezik.

Végül lexikografikus szorzásra vizsgálva a Hall-hányadost előbb kerékgráfokra, majd tetszőleges gráfra igazoltam azt a sejtést, miszerint az aszimptotikus lexikografikus Hall-hányadosa értéke éppen a gráf frakcionális kromatikus száma.

## 6. Köszönetnyilvánítás

Köszönöm szépen témavezetőmnek, Simonyi Gábornak a kutatáshoz nyújtott sok segítséget.

## 7. Irodalom

- [1] Noga Alon: *Graph powers*, in: Contemporary Combinatorics, Bolyai Society Mathematical Studies, vol. 10, János Bolyai Mathematical Society, Budapest 2002, 11–28.
- [2] Noga Alon, Irit Dinur, Ehud Friedgut, Benny Sudakov: *Graph product, Fourier analysis and spectral techniques*, Geom. Funct. Anal. 14 (2004) 913–940.
- [3] Noga Alon, Eyal Lubetzky: *Independent sets in tensor graph powers*, J. Graph Theory, in press.
- [4] Claude Berge, Miklós Simonovits: *The coloring numbers of the direct product of two hypergraphs*, in: Hypergraph Seminar, Proceedings of the First Working Seminar, Ohio State University, Columbus, OH, 1972 (dedicated to Arnold Ross), Lecture Notes in Mathematics, vol. 411, Springer, Berlin, 1974, 21–33.
- [5] Jorge L. Ramírez-Alfonzín, Bruce A. Reed: *Perfect Graphs*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley and Sons, Chichester, 2001.
- [6] Jason I. Brown, Richard J. Nowakowski, Douglas Rall: *The ultimate categorical independence ratio of a graph*, SIAM J. Discrete Math. 9 (1996) 290–300.
- [7] Mathew Cropper, Michael S. Jacobson, András Gyárfás, Lehel Jenő: *The Hall ratio of graphs and hypergraphs*, Les cahiers du Laboratoire Leibniz., No. 17., 2000.
- [8] Mathew Cropper, András Gyárfás, Lehel Jenő: *Hall-ratio of the Mycielski graphs*, to appear in Discrete Mathematics.
- [9] Geňa Hahn, Pavol Hell, Svatopluk Poljak: *On the ultimate independence ratio of a graph*, European J. Combin. 16. (1995) 253–261.
- [10] Pavol Hell, Xingxing Yu, Hui Shan Zhou: *Independence ratios of graph powers*, Discrete Math. 27 (1994) 213–220.
- [11] Wilfried Imrich, Sandi Klavžar: *Product Graphs: Structure and Recognition*, Chapter 8: Invariants, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley and Sons, Chichester, 2000.
- [12] János Körner, Alon Orlitsky, *Zero-error information theory*, IEEE Trans. Inform. Theory, 44, (1998, commemorative issue), 2207–2229.

- [13] László Lovász: *On the Shannon capacity of a graph*, IEEE Trans. Inform. Theory 25 (1979) 1–7.
- [14] László Lovász, Michael D. Plummer: *Matching Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [15] Katalin Marton: *On the Shannon capacity of probabilistic graphs*, J. Combin. Theory Ser. B 57 (1993) 183–195.
- [16] Robert J. McEliece, Edward C. Posner: *Hide and seek, data storage, and entropy*, Ann. Math. Statist. 42 (1971) 1706–1706.
- [17] Edward R. Scheinerman, Daniel H. Ullman: *Fractional Graph Theory*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley and Sons, Chichester, 1997.
- [18] Gábor Simonyi: *Asymptotic values of the Hall-ratio for graph powers*, Discrete Math. 306 (2006) 2593–2601.
- [19] Claude E. Shannon: *The zero-capacity of a noisy channel*, IRE Trans. Inform. Theory 2 (1956) 8–19.,  
reprinted in: Key Papers in the Development of Information Theory (D. Slepian ed.), IEEE Press, New York, 1974.
- [20] Hans S. Witsenhausen: *The zero-error side-information problem and chromatic numbers*, IEEE Trans. Inform. Theory 22 (1976) 592–593.
- [21] Xuding Zhu: *On the bounds for the ultimate independence ratio of a graph*, Discrete Math. 156 (1996) 229–236.