

Gráfszínezési problémák

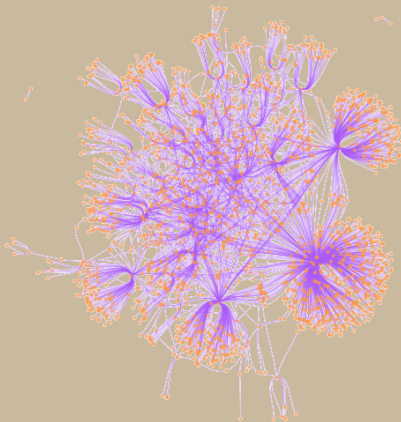
Tóth Ágnes

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
BME

Témavezető: Dr. Simonyi Gábor

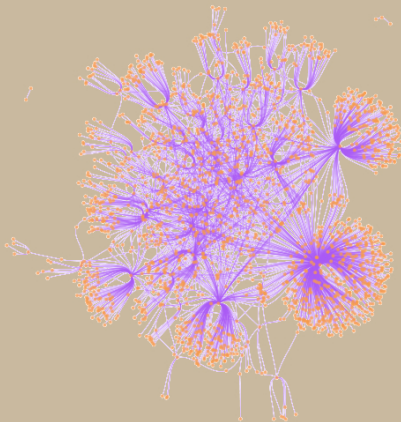
Gráfszínezési problémák

- ▶ Színezésekkel rokon gráfparaméterek aszimptotikus vizsgálata
- ▶ Élszínezéssel kapcsolatos fedési problémák



Gráfszínezési problémák

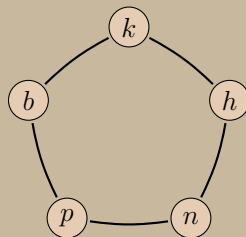
- ▶ Színezésekkel rokon gráfparaméterek aszimptotikus vizsgálata
- ▶ Élszínezéssel kapcsolatos fedési problémák



Shannon-kapacitás

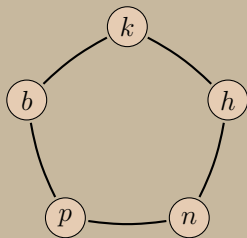
Információelméleti jelentése a csatornakapacitás elméleti felső határa hiba nélküli kódolás esetén.

Tekintsünk példaként egy olyan csatornát, melyen ötféle karaktert küldhetünk át, de bizonyosak a csatornán lévő zaj hatására a küldés során összekeveredhetnek. Az ábrán látható gráf csúcsai a küldhető karakterek, élei az **összetéveszthető** párok között futnak.



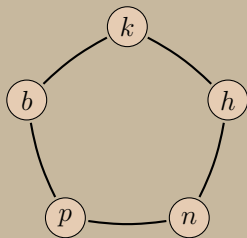
Célunk, hogy minél több megkülönböztethető üzenetet küldjünk, egy időegységre vonatkoztatva.

Shannon-kapacitás



Legfeljebb 2 megkülönböztethető karakter küldhető, pl. 'k' és 'n'.

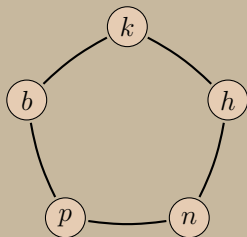
Shannon-kapacitás



Legfeljebb 2 megkülönböztethető karakter küldhető, pl. 'k' és 'n'.

Karakterpárokat küldve, ezekből 4 pár alkotható: 'kk', 'kn', 'nk', 'nn', melyek szintén páronként megkülönböztethetőek.

Shannon-kapacitás

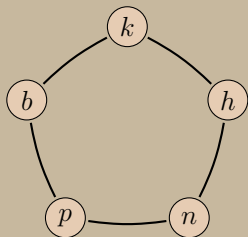


Legfeljebb 2 megkülönböztethető karakter küldhető, pl. 'k' és 'n'.

Karakterpárokat küldve, ezekből 4 pár alkotható: 'kk', 'kn', 'nk', 'nn', melyek szintén páronként megkülönböztethetőek.

Van öt megkülönböztethető karakterpár is: 'kk', 'hn', 'nb', 'ph', 'bp'.

Shannon-kapacitás



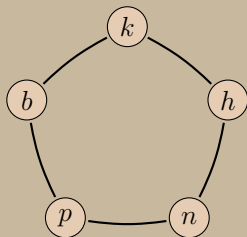
Legfeljebb 2 megkülönböztethető karakter küldhető, pl. 'k' és 'n'.

Karakterpárokat küldve, ezekből 4 pár alkotható: 'kk', 'kn', 'nk', 'nn', melyek szintén páronként megkülönböztethetőek.

Van öt megkülönböztethető karakterpár is: 'kk', 'hn', 'nb', 'ph', 'bp'.

Egyszerre t karaktert küldve akár $5^{t/2}$ üzenetet is küldhetünk, ez egy karakterre vonatkoztatva $\sqrt{5}$ -nyi információmennyiség.

Shannon-kapacitás



Legfeljebb 2 megkülönböztethető karakter küldhető, pl. 'k' és 'n'.

Karakterpárokat küldve, ezekből 4 pár alkotható: 'kk', 'kn', 'nk', 'nn', melyek szintén páronként megkülönböztethetőek.

Van öt megkülönböztethető karakterpár is: 'kk', 'hn', 'nb', 'ph', 'bp'.

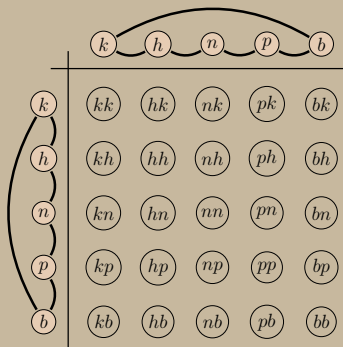
Egyszerre t karaktert küldve akár $5^{t/2}$ üzenetet is küldhetünk, ez egy karakterre vonatkoztatva $\sqrt{5}$ -nyi információmennyiség.

Lovász László eredménye szerint a fenti gráffal jellemzett csatorna esetén a Shannon kapacitás értéke $\sqrt{5}$, azaz t karaktert használva nem küldhető $(\sqrt{5})^t$ -nél több megkülönböztethető üzenet, semmilyen t -re¹.

¹L. Lovász, On the Shannon capacity of a graph, IEEE Trans. Inform. (1979)

Shannon-kapacitás

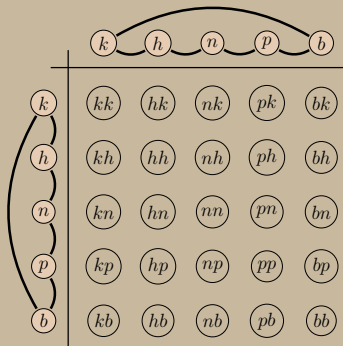
A G gráf **függetlenségi száma** a gráf-
ból kiválasztható olyan pontok maximális
száma, melyek közül semelyik kettő
között nem fut él, $\alpha(G)$ -vel jelöljük.



Shannon-kapacitás

A G gráf **függetlenségi száma** a gráf-
ból kiválasztható olyan pontok maximális
száma, melyek közül semelyik kettő
között nem fut él, $\alpha(G)$ -vel jelöljük.

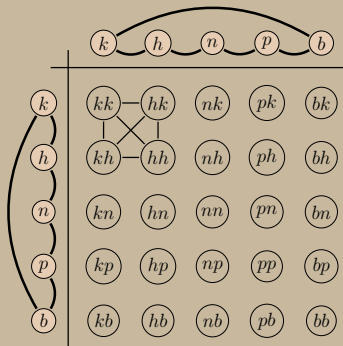
Két gráf **normális szorzata** egy olyan
gráf, melynek csúcsai az eredeti két gráf
csúcsaiból alkotott párok, és két ilyen
párt akkor kötünk össze, ha mindkét ko-
ordinátában összekötött vagy megegyező
csúcsokat találunk.



Shannon-kapacitás

A G gráf **függetlenségi száma** a gráf-
ból kiválasztható olyan pontok maximális
száma, melyek közül semelyik kettő
között nem fut él, $\alpha(G)$ -vel jelöljük.

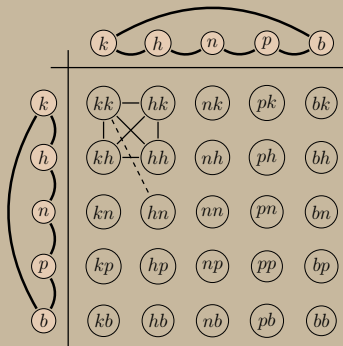
Két gráf **normális szorzata** egy olyan
gráf, melynek csúcsai az eredeti két gráf
csúcsaiból alkotott párok, és két ilyen
párt akkor kötünk össze, ha mindkét ko-
ordinátában összekötött vagy megegyező
csúcsokat találunk.



Shannon-kapacitás

A G gráf **függetlenségi száma** a gráf-
ból kiválasztható olyan pontok maximális
száma, melyek közül semelyik kettő
között nem fut él, $\alpha(G)$ -vel jelöljük.

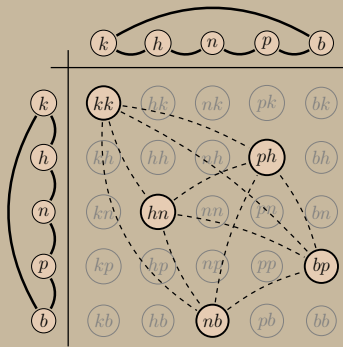
Két gráf **normális szorzata** egy olyan
gráf, melynek csúcsai az eredeti két gráf
csúcsaiból alkotott párok, és két ilyen
párt akkor kötünk össze, ha mindkét ko-
ordinátában összekötött vagy megegyező
csúcsokat találunk.



Shannon-kapacitás

A G gráf **függetlenségi száma** a gráf-
ból kiválasztható olyan pontok maximális
száma, melyek közül semelyik kettő
között nem fut él, $\alpha(G)$ -vel jelöljük.

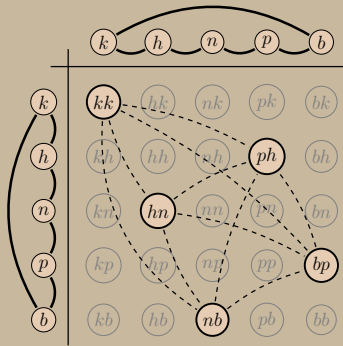
Két gráf **normális szorzata** egy olyan
gráf, melynek csúcsai az eredeti két gráf
csúcsaiból alkotott párok, és két ilyen
párt akkor kötünk össze, ha mindkét ko-
ordinátában összekötött vagy megegyező
csúcsokat találunk.



Shannon-kapacitás

A G gráf **függetlenségi száma** a gráf-ból kiválasztható olyan pontok maximális száma, melyek közül semelyik kettő között nem fut él, $\alpha(G)$ -vel jelöljük.

Két gráf **normális szorzata** egy olyan gráf, melynek csúcsai az eredeti két gráf csúcsaiból alkotott párok, és két ilyen párt akkor kötünk össze, ha mindkét koordinátában összekötött vagy megegyező csúcsokat találunk.



Egy gráf Shannon-kapacitása a függetlenségi szám normalizált aszimptotikus értékével definiálható ún. normális szorzás esetén. Azaz:

$$c(G) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt[t]{\alpha(G^t)}.$$

Színezésekkel rokon gráfparaméterek különböző gráfszorzásokra vett aszimptotikus vizsgálata

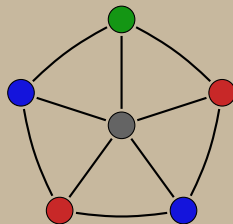
- ▶ a Hall-hányados aszimptotikus értéke lexikografikus szorzás, illetve direkt szorzás esetén
- ▶ a függetlenségi hányados aszimptotikus értéke direkt szorzás esetén

Színezésekkel rokon gráfparaméterek különböző gráfszorzásokra vett aszimptotikus vizsgálata

- ▶ a Hall-hányados aszimptotikus értéke lexikografikus szorzás, illetve direkt szorzás esetén
- ▶ a függetlenségi hányados aszimptotikus értéke direkt szorzás esetén

Egy gráf **kromatikus száma** azt adja meg, hogy minimálisan hány színt kell használni a gráf csúcsainak kiszínezéséhez, hogy az összekötött csúcsok különböző színűek legyenek.

A G gráf kromatikus számát $\chi(G)$ -vel jelöljük.



A Hall-hányados aszimptotikus vizsgálata

Egy gráf **Hall-hányadosa** a csúcsszám és a függetlenségi szám hányadosának maximuma a gráf összes részgráfjára nézve.

A Hall-hányados aszimptotikus vizsgálata

Egy gráf **Hall-hányadosa** a csúcsszám és a függetlenségi szám hányadosának maximuma a gráf összes részgráfjára nézve.

Simonyi Gábor különböző gráfszorzásokra vizsgálta a paraméter aszimptotikus értékét, és megmutatta², hogy

- ▶ *normális* szorzásra a megfelelően normált aszimptotikus érték a gráf Witsenhausen hányadosa,
- ▶ *konormális* szorzásra pedig a gráf frakcionális kromatikus száma.

(A Witsenhausen hányados a kromatikus szám aszimptotikus értéke normális szorzás esetén, és e paraméternek információelméleti jelentése is van.

A frakcionális kromatikus szám a kromatikus szám frakcionális relaxációja.)

²G. Simonyi, Asymptotic values of the Hall-ratio for graph powers, *Discrete Math.* (2006) 

A Hall-hányados aszimptotikus értéke lexicografikus szorzás, illetve direkt szorzás esetén

Beláttam, hogy

- ▶ *lexikografikus* szorzás esetén is a frakcionális kromatikus szám adódik a megfelelő sorozat határértékeként³,
- ▶ *direkt* szorzás esetén megfogalmazott analóg probléma több szempontból eltér az előzőektől, de a határérték itt is a gráf frakcionális kromatikus száma⁴.

³Á. Tóth, On the ultimate lexicographic Hall-ratio, Discrete Math. (2009)

⁴Á. Tóth, On the ultimate direct Hall-ratio, beküldve (Graphs and Combinatorics)

⁵X. Zhu, Fractional Hedetniemi's conjecture is true, European J. Combin. (2011)

A Hall-hányados aszimptotikus értéke lexicografikus szorzás, illetve direkt szorzás esetén

Beláttam, hogy

- ▶ *lexikografikus* szorzás esetén is a frakcionális kromatikus szám adódik a megfelelő sorozat határértékeként³,
- ▶ *direkt* szorzás esetén megfogalmazott analóg probléma több szempontból eltér az előzőektől, de a határérték itt is a gráf frakcionális kromatikus száma⁴.

Utóbbi bizonyítása során Zhu egy friss eredményét is használtam, melyet a Hedetniemi-sejtés frakcionális változatának igazolása közben alkalmazott⁵.

³Á. Tóth, On the ultimate lexicographic Hall-ratio, Discrete Math. (2009)

⁴Á. Tóth, On the ultimate direct Hall-ratio, beküldve (Graphs and Combinatorics)

⁵X. Zhu, Fractional Hedetniemi's conjecture is true, European J. Combin. (2011)

Hedetniemi-sejtés

Hedetniemi-sejtés:

Tetszőleges két F , G gráf direkt szorzatára $F \times G$ -re teljesül, hogy

$$\chi(F \times G) = \min\{\chi(F), \chi(G)\}.$$

A sejtés több mint 40 éve nyitott.

Hedetniemi-sejtés

Hedetniemi-sejtés:

Tetszőleges két F , G gráf direkt szorzatára $F \times G$ -re teljesül, hogy

$$\chi(F \times G) = \min\{\chi(F), \chi(G)\}.$$

A sejtés több mint 40 éve nyitott.

A sejtés frakcionális változata: ($\chi_f(G)$ a gráf frakcionális kromatikus száma)

$$\chi_f(F \times G) = \min\{\chi_f(F), \chi_f(G)\}.$$

Zhu igazolta 2010-ben⁶.

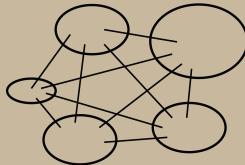
⁶X. Zhu, Fractional Hedetniemi's conjecture is true, European J. Combin. (2011)

A függetlenségi hányados aszimptotikus értéke direkt szorzás esetén

A **függetlenségi hányados** a függetlenségi szám és a csúcsszám hányadosa, $i(G)$ -vel jelöljük.

Direkt szorzásra Brown, Nowakowski és Rall⁷ vizsgálta először a paraméter értékét, $A(G)$ -t. Különböző becsléseket adtak a paraméterre, és számos gráfcsaládra meghatározták a pontos értékét.

Meghatároztam az függetlenségi hányados direkt szorzásra vett aszimptotikus értéket teljes többrészes gráfokra⁸.



⁷J. I. Brown, R. J. Nowakowski, D. Rall, The ultimate categorical independence ratio of a graph, SIAM J. Discrete Math. (1996)

⁸Á. Tóth, The ultimate categorical independence ratio of complete multipartite graphs, SIAM J. Discrete Math. (2009)

A függetlenségi hányados aszimptotikus értéke direkt szorzás esetén

Alon és Lubetzky⁹ tovább vizsgálata a gráfparaméter értékét, és két kérdést is megfogalmazott:

$$a(G) = \max_{U \text{ független}} \frac{|U|}{|U| + |N(U)|} \quad \text{és} \quad a^*(G) = \begin{cases} a(G), & \text{ha } a(G) \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{ha } a(G) > \frac{1}{2} \end{cases}$$

($N(U)$ jelöli a U szomszédainak halmazát)

- ▶ Teljesül-e minden G gráfra, hogy $A(G) = a^*(G)$?
- ▶ Igaz-e minden G, H gráfra, hogy
$$i(G \times H) \leq \max\{a^*(G), a^*(H)\}?$$

A függetlenségi hányados aszimptotikus értéke direkt szorzás esetén

Alon és Lubetzky⁹ tovább vizsgálata a gráfparaméter értékét, és két kérdést is megfogalmazott:

$$a(G) = \max_{U \text{ független } G\text{-ben}} \frac{|U|}{|U| + |N(U)|} \quad \text{és} \quad a^*(G) = \begin{cases} a(G), & \text{ha } a(G) \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{ha } a(G) > \frac{1}{2} \end{cases}$$

($N(U)$ jelöli a U szomszédainak halmazát)

- ▶ Teljesül-e minden G gráfra, hogy $A(G) = a^*(G)$?
- ▶ Igaz-e minden G, H gráfra, hogy
$$i(G \times H) \leq \max\{a^*(G), a^*(H)\}?$$
 - Igen.¹⁰

⁹ N. Alon, E. Lubetzky, Independent sets in tensor graph powers, J. Graph Theory (2007)

¹⁰ Á. Tóth, On a question about the ultimate categorical independence ratio, kézirat

Gráfszínezési problémák

Színezésekkel rokon gráfparaméterek aszimptotikus vizsgálata

- [1] Á. Tóth, *On the ultimate lexicographic Hall-ratio*, Discrete Math., 309 12 (2009), 3992-3997.
- [2] Á. Tóth, *The ultimate categorical independence ratio of complete multipartite graphs*, SIAM J. Discrete Math., 23 4 (2009), 1900-1904.
- [3] G. Brightwell, G. Cohen, E. Fachini, M. Fairthorne, J. Körner, G. Simonyi, Á. Tóth, *Permutation capacities of families of oriented infinite paths*, SIAM J. Discrete Math., 24 2 (2010), 441-456.
- [5] Á. Tóth, *On the ultimate direct Hall-ratio*, beküldve (Graphs and Combinatorics)
- [8] Á. Tóth, *On a question about the ultimate categorical independence ratio*, kézirat

Élszínezéssel kapcsolatos fedési problémák

- [4] A. Gyárfás, G. Simonyi, Á. Tóth, *Gallai colorings and domination in multipartite digraphs*, Journal of Graph Theory, közlésre elfogadva
- [6] G. Chen, S. Fujita, A. Gyárfás, J. Lehel, Á. Tóth, *Around a biclique cover conjecture*, beküldve (European Journal of Combinatorics)
- [7] S. Fujita, M. Furuya, A. Gyárfás, Á. Tóth, *Monochromatic coverings and partitions in edge-colored graphs and hypergraphs*, kézirat

Köszönöm a figyelmet!