Tóth Ágnes
tothagi@cs.bme.hu

1. gyakorlat
Koordinátageometria, vektorterek

1. Hol döfi a $3x + y + 5z = 4$ síkot az az egyenes, amelyet az $x + 4y = 1$ és az $x - 3y + z = 6$ egyenletek határoznak meg?

2. Legyen $A = (1, 0, 0)$ és $B = (1, -2, 4)$, az e egyenes egyenlete pedig $(x - 1)/5 = (y + 2)/3 = z - 3$. Keressük meg az e egyenesen azon C pontot, melyre $|AC| = |BC|$ teljesül!

3. (a) Írd fel a $P(1, 4, -1)$ ponton átmenő és az $\frac{x-5}{2} = \frac{y-10}{-2} = \frac{z+8}{3}$ egyenletrendszerű egyenesre merőleges sík egyenletét!
   (b) Írd fel a $Q(2, -5, -2)$ ponton átmenő és a $z = 4x + 7$ egyenletű síkra merőleges egyenes egyenletrendszerét!

4. Határozzuk meg a három koordinátatengellyel vett metszéspontjait annak a síknak, mely átmegy a $(3, 4, 5)$ ponton és merőleges az origóból a $(3, 4, 5)$ koordinátájú pontba mutató vektorra!

5. Döntsd el, hogy a t paraméter milyen valós értékére
   (a) párhuzamos az $5x - 6y + 2z = 10$ egyenletű sík a $tx - 3y + z = 7$ egyenletű síkkal;
   (b) merőleges az $\frac{x-5}{2} = \frac{y+9}{-2} = \frac{z}{3}$ egyenletrendszerű egyenes a $8x + ty + 12z = 19$ egyenletű síkra;
   (c) metszi az $\frac{x-5}{2} = \frac{y+9}{-2} = \frac{z}{3}$ egyenletrendszerű egyenes a $8x + ty + 12z = 19$ egyenletű síkot.

6. Az $\underline{u}, \underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok elemei, W pedig altere egy V vektortérnek. Tudjuk továbbá, hogy $\underline{u} + \underline{v} \in W$, $3\underline{u} + \underline{w} \in W$, de $\underline{v} + 2\underline{w} \notin W$. Mutassuk meg, hogy $6\underline{u} + 3\underline{v} + \underline{w} \in W$, de $5\underline{u} + 3\underline{v} + \underline{w} \notin W$.

7. Döntsük el, hogy az összes valós számon értelmezett valós értékű függvények alábbi részhalmazai vektorteret alkotnak-e a valós számok teste felett?
   (a) folytonos függvények
   (b) legfeljebb öt pontban szakadó függvények
   (c) páros függvények
   (d) $\{f | f(5) \leq 0\}$
   (e) $\{f | f(5) = f(8)\}$

8. Legyen V az egész számok halmaza. Jelölje $\oplus$ az egész számok összeadását és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár, valamint minden $\underline{v} \in V$ esetén legyen $\lambda \odot \underline{v} = \underline{v}$. Döntsd el, hogy a V halmaz a most definiált $\oplus$ és $\odot$ művelettel vektorteret alkot-e!

9. Döntsd el, hogy az alábbiakban megadott V alaphalmaz a $\oplus$–vel jelölt vektorösszeadással és a $\odot$–vel jelölt skalárral való szorzással vektorteret alkot–e?
   (a) V a racionális számok halmaza; $\oplus$ a racionális számok összeadása; $\lambda \odot \underline{v} = [\lambda \cdot \underline{v}]$, ahol a [ ] egészrészt jelöl.
   (b) V a pozitív valós számok halmaza; $\underline{u} \oplus \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{v}$ (azaz a $\oplus$ a pozitív valós számok szorzása!); $\lambda \odot \underline{v} = \underline{v}^\lambda$.

10. Legyen a háromdimenziós térben ($\mathbb{R}^3$-ban) $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
    (a) Kifejezhető-e (skalárral való szorzás és összeadás segítségével) az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból az $\underline{e}$ vektor?
    (b) Milyen a, b és c esetén fejezhető ki az $(a, b, c)^T$ vektor az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorokból?
    (c) Milyen a, b és c esetén fejezhető ki az $(a, b, c)^T$ vektor az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból?

11. Az $\mathbb{R}^4$ vektortér mely vektorai fejezhetők ki az $\underline{u} = (1, 1, 0, 0)$, $\underline{v} = (0, 1, 1, 0)$, és a $\underline{w} = (0, 0, 1, 1)$ vektorok segítségével?

12. Mi a tagadása az alábbi állításoknak? (Két állítás akkor tagadása egymásnak, ha a két állítás közül minden esetben pontosan az egyik igaz.) Próbáljuk úgy megfogalmazni a tagadásokat, hogy ne szerepeljen bennük tagadószó. Igazak ezek az állítások?
    (a) Minden szerdán van BSZ gyakorlat.
    (b) Ha van BSZ előadás, akkor aznap van BSZ gyakorlat is.
    (c) Minden olyan hallgató, aki jár BSZ gyakorlatra, az átmegy a vizsgán.
    (d) Minden olyan 17 lábú zsiráf, aki jár BSZ gyakorlatra, az átmegy a vizsgán.

2. gyakorlat
Vektorterek: altér, függetlenség, generálás, bázis, dimenzió

1. Döntsd el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok!

(a) $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3 = 0\right\}$; (b) $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2 = 1\right\}$. (c) $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\right\}$.

2. Legyen a szokásos 3 dimenziós térben ($\mathbb{R}^3$-ben) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak-e ! (a) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független. (b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ lineárisan független.

3. Döntsd el, hogy az alábbi állítások igazak-e a 2. feladatban bevezetett $\mathbb{R}^3$-beli vektorokra!
(a) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$
(b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ generátorrendszer.
(c) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ bázis.
(d) $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan független.
(e) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ generátorrendszer.

4. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben
$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak-e!
(a) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$
(b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ generátorrendszer
(c) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan független
(d) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ bázis
(e) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független
(f) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ bázis

5. Tegyük fel, hogy egy (tetszőleges) V vektortér $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ elemeire $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d} = \underline{0}$. Melyek igazak mindig az alábbi állítások közül? (a) $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$; (b) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$; (c) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$.

6. Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független (egy tetszőleges vektortérben). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\underline{a} - \underline{b}$, $\underline{a} - \underline{c}$, $\underline{b} + \underline{c}$ vektorrendszer is lineárisan független!

7. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy vektortér olyan vektorai, melyekre $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b} + \underline{c}$, $\underline{c} + \underline{a}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$?

8. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ (a háromdimenziós valós tér) alábbi alterének egy bázisát:
$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x + 2y + z = 0\right\}$$

9. Bizonyítsuk be, hogy ha a V vektortérben az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ egy lineárisan független rendszer és $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{k+1}$ pedig egy generátorrendszer, akkor a két vektorrendszer közül pontosan az egyik bázist alkot V-ben.

10. Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ lineárisan független vektorok. Adjuk meg a c paraméter összes olyan valós értékét, melyre a $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_{k-1} - \underline{v}_k, \underline{v}_k - c\underline{v}_1$ vektorok lineárisan függetlenek!

11. Tegyük fel, hogy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 + \ldots + \underline{v}_{100} = \underline{0}$ és $\underline{v}_2 + \underline{v}_4 + \underline{v}_6 + \ldots + \underline{v}_{100} = \underline{0}$ teljesül a V vektortér $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektoraira. Jelöljük a $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100} \rangle$ generált alteret W-vel. Bizonyítsd be, hogy $\dim W \leq 98$.

12. Legyenek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ egy vektortér lineárisan független vektorai és legyen $\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{a}_i$. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{a}_1 \in \langle \underline{x}, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \rangle$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\lambda_1 \neq 0$!

13. Bizonyítsuk be, hogy egy 99 dimenziós vektortér két, 50 dimenziós alterének mindig van a nullvektortól különböző közös eleme.

14. Tudjuk, hogy $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{c}, \underline{d}, \underline{e} \rangle$. Lineárisan függetlenek-e az $\underline{a}, \underline{c}, \underline{e}$ vektorok?

15. Az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3, b_4 vektorok generálják ugyanazt a V lineáris teret. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az alábbi négy vektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő: $a_1 + a_2, a_3 + b_1, a_3 + b_2, b_3 + b_4$.

16. Döntsük el, hogy a $P(1, 4, 4)$ és a $Q(3, 12, -2)$ pontokon átmenő egyenes metszi-e a koordinátatengelyek valamelyikét! Ha a válasz igen, adjuk meg a metszésponto(ka)t!

Tóth Ágnes
tothagi@cs.bme.hu

3. gyakorlat
Gauss-elimináció

1. Három testvér, Anna, Balázs és Cili számolósat játszanak úgy, hogy összeadogatják és kivonogatják az éveik számát. Először Anna és Balázs életkorának összegéből vonják ki Ciliét, és 11-et kapnak. Anna és Cili korának összegéből Balázsét kivonva 1-et, végül Balázs és Cili korának összegéből Annáét kivonva 5 jön ki. Hány évesek a gyerekek?

2. Oldd meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket! Használd a Gauss-elimináció módszerét!

$$\begin{aligned} -x+3y+3z &= 2 \\ 3x+y+z &= 4 \\ 2x-2y+3z &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+3y+2z &= 3 \\ 3x+5y+10z &= 5 \\ 3x+2y+13z &= 2 \\ 6x+13y+17z &= 13 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+3y+2z &= 3 \\ 3x+5y+10z &= 5 \\ 3x+2y+13z &= 2 \\ 6x+13y+17z &= 11 \end{aligned}$$

3. Oldjuk meg a Gauss-féle elimináció módszerével a következő lineáris egyenletrendszereket.

a) $$\begin{aligned} -x+3y+3z &= 2 \\ 3x+y+z &= 4 \\ 2x-2y+3z &= 10 \end{aligned}$$
b) $$\begin{aligned} 2x+3y+z &= 11 \\ x-y-2z &= -7 \\ 3x+2y-z &= 2 \end{aligned}$$
c) $$\begin{aligned} 2x+3y+z &= 11 \\ x-y-2z &= -7 \\ 3x+2y-z &= 4 \end{aligned}$$

4. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & 3y & - & z & - & 3w & = & -2 \\ 2x & - & 6y & + & 5z & + & 12w & = & 7 \\ 3x & - & 9y & + & 5z & + & cw & = & 9 \end{array}$$

5. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszereknek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

(a) $$\begin{aligned} 2x+6y+z &= -6 \\ 2x+11y+11z &= 14 \\ 4x+10y+cz &= -20 \\ 2x+9y+(c+10)z &= 6 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} -x_1-3x_2+x_3-4x_4 &= 1 \\ 5x_1+15x_2-2x_3+26x_4 &= 4 \\ 2x_1+6x_2+c\cdot x_4 &= 4 \\ 4x_1+12x_2+x_3+(c+14)\cdot x_4 &= 11 \end{aligned}$$

6. Adjuk meg a t valós paraméter függvényében az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldásait!

$$\begin{aligned} x+2y-z &= t \\ x-8y+9z &= 10 \\ 2x-y+3z &= 6 \end{aligned}$$

7. Határozzuk meg az a és b paraméterek függvényében az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &= 4 \\ 2x_1+6x_2+7x_3 &= 9 \\ 3x_1+6x_2+ax_3 &= b \end{aligned}$$

8. Adjuk meg a térben az alábbi egyenletekkel megadott S_1, S_2 és S_3 síkok (összes) metszéspontját!

(a) $$\begin{aligned} S_1:&\quad x+y+z = 6 \\ S_2:&\quad 2x+3y-2z = 0 \\ S_3:&\quad 5x+7y-3z = 6 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} S_1:&\quad 2x-y+5z = 3 \\ S_2:&\quad 3x+2y+6z = 4 \\ S_3:&\quad 4x-9y+13z = 9 \end{aligned}$$

9. A t paraméter mely valós értékeire lesz az alábbi három síknak egynél több közös pontja?

$$\begin{aligned} S_1:&\quad x+2y+z = 4 \\ S_2:&\quad 2x+y+8z = 5 \\ S_3:&\quad 5x+y+tz = 11 \end{aligned}$$

10. Adjuk meg a p paraméter összes valós értékét, melyre az $x+y+z=1$ és $2x+y=3$ egyenletekkel megadott egyenes egy pontban metszi az $5x+3y+pz=11$ síkot!

11. Lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorrendszerek?

(a) $$\begin{pmatrix}1\\3\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\2\\13\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\10\\13\\17\end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\5\end{pmatrix}$$

(c) $$\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\4\end{pmatrix}$$

(d) $$\begin{pmatrix}7\\9\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}33\\\sqrt{2}\\5\\\sqrt{7}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-51\\19\\\sqrt[3]{19}\\44\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\9\\9\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\8\\5\end{pmatrix}$$

12. Tekintsünk egy egész együtthatós lineáris egyenletrendszert (az egyenletekben a változók együtthatói és a jobb oldalon álló számok is egészek). Melyek igazak az alábbi állítások közül?
(a) Ha van megoldás a racionális számok körében, akkor van az egész számok körében is.
(b) Ha van megoldás a valós számok körében, akkor van a racionális számok körében is.

13. Tegyük fel, hogy adott egy lineáris egyenletrendszer, amelyről tudjuk, hogy megoldható és a megoldás egyértelmű. Ha most megváltoztatjuk az egyenletek jobb oldalán álló számokat (de csak azokat), előfordulhat-e, hogy a kapott egyenletrendszernek
(a) nincs megoldása;
(b) végtelen sok megoldása van?

14. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

a)
$$\begin{aligned} x+9y+2z-5u-3v &= 9\\ 2y+3u &= 5\\ -2x-4z+u+6v &= 3\\ 3x+5y+6z+6u-9v &= 8\\ 8y-6u &= 8 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x-y+3z &= 3\\ 3x+y-5z &= 0\\ 4x-y+z &= 3 \end{aligned}$$

15. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{x-1978}{28}+\frac{x-1980}{26}+\frac{x-1982}{24}+\frac{x-1984}{22}=\frac{x-28}{1978}+\frac{x-26}{1980}+\frac{x-24}{1982}+\frac{x-22}{1984}$$

16. Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ a V (tetszőleges) vektortér lineárisan független vektorai. A p valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a}=\underline{u}-\underline{v}$, $\underline{b}=\underline{u}+\underline{w}$, $\underline{c}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$, $\underline{d}=p\cdot\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek?

17. Tudjuk, hogy egy vektortérben a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_{100}$ vektorok bázist alkotnak. Hány dimenziós a $\langle\underline{v}_1+\underline{v}_2,\underline{v}_2+\underline{v}_3,\dots,\underline{v}_{99}+\underline{v}_{100},\underline{v}_{100}+\underline{v}_1\rangle$ altér?

4. gyakorlat
Determináns

1. Számold ki *csak a definíció felhasználásával* az alábbi determináns értékét!

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 9 \\ 6 & 8 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 0 \end{vmatrix}$

2. Mennyi az $1, 2, \ldots, n$ elemek alábbi permutációinak inverziószáma?

   (a) 1,3,5,7,9,8,6,4,2 $\quad (n = 9)$

   (b) 100,101,98,99,96,97,...,2,3,1 $\quad (n = 101)$

3. Állapítsuk meg, hogy n-től függően mi lesz egy $n \times n$-es mátrix determinánsának felírásában a mellékátlóban álló elemek szorzatának előjele.

4. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét! (A (d) pontban a, b, c és d valós számokat jelölnek.)

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 6 & 12 & 20 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$

5. Számold ki az alábbi determinánsokat!

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 6 & 20 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & n \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \\ 1 & 6 & 11 & 16 & 21 & 26 \\ 1 & 7 & 13 & 19 & 25 & 31 \end{vmatrix}$

6. Számold ki az alábbi determinánsokat!

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots & 2n \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \ldots & 3n \\ 4 & 8 & 12 & 16 & \ldots & 4n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 2n & 3n & 4n & \ldots & n^2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \ldots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$

7. A 101×101-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem

$$a_{ij} = \begin{cases} 3^{2004}\text{-nek a } (2i+j)\text{-edik számjegye}, & \text{ha } i \cdot j \text{ páros}, \\ 0, & \text{ha } i \cdot j \text{ páratlan}. \end{cases}$$

   Határozzuk meg A determinánsát!

8. Számítsd ki az A mátrix determinánsát, ha

   (a) $a_{i,j} = i$ ha $i = j$ és $a_{i,j} = 1$ ha $i \neq j$

   (b) $a_{i,j} = \min(i, j)$

   (c) $a_{i,j} = i + j$

9. Milyen valós λ paraméterre lesz a következő determináns 0 ?

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 16 \\ 0 & 2-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

10. Bizonyítsd be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1849 & 1444 & 1896 & 1222 \\ 1490 & 1703 & 1790 & 1526 \\ 1342 & 1566 & 1541 & 1514 \\ 1242 & 1552 & 1382 & 1825 \end{vmatrix} \neq 0$$

11. Egy $n \times n$-es mátrix minden eleme osztható kettővel. Igaz-e, hogy ekkor a determinánsa is páros?

12. Az A $n \times n$-es mátrix minden eleme ± 1. Igazold, hogy ekkor $2^{n-1} | det(A)$.

13. Az $n \times n$-es A mátrix minden eleme egy 3-mal osztva 1 maradékot adó egész szám. Bizonyítsuk be, hogy A determinánsa osztható (3^{n-1})-nel!

14. Egy $n \times n$-es mátrix minden eleme páros, és tudjuk, hogy a determinánsa osztható 64-el, de nem oszthat 128-al. Mennyi lehet n ?

15. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

    a) Ha egy $n \times n$-es mátrixnak legalább $n^2 - n + 1$ eleme 0, akkor a mátrix determinánsa 0.

    b) Ha egy mátrix determinánsa 0, akkor a mátrixban előfordul a 0 elem.

    c) Ha egy $n \times n$-es mátrixban van egy $k \times l$-es csupa 0 téglalap, és $k + l > n$, akkor a determináns 0.

    d) Bármely $n \times n$-es mátrixban van olyan elem, melyet megváltoztatva elérhető, hogy a mátrix determinánsa 0 legyen.

16. Hogyan változik egy $n \times n$-es mátrix determinánsa, ha minden elemét az ellentettjére cseréljük?

17. Legyen A egy $n \times n$-es mátrix, és jelöljük a i-edik sorának j-edik elemét $a_{i,j}$-vel. Legyen B olyan $n \times n$-es mátrix, melyre $b_{i,j} = \frac{i}{j} a_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq n)$. Mennyi B determinánsa, ha tudjuk, hogy $\det(A) = 1$?

Tóth Ágnes
tothagi@cs.bme.hu

5. gyakorlat
Vektoriális szorzat, mátrixok

1. Számold ki a *kifejtési tétel felhasználásával* az alábbi determinánsok értékét!
   (a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2. Egy $n \times n$-es A mátrix minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével. Mi lesz az így kapott n^2 darab szorzat összege?

3. Van egy $n \times n$-es mátrixunk, melynek az elemei egy kivételével rögzítettek. Igaz-e, hogy a hiányzó elem mindig megválasztható úgy, hogy az így kitöltött mátrix determinánsa 0 legyen?

4. A (100×100)-as A mátrixra teljesül, hogy minden sorában az elemek összege 1. A (100×100)-as B mátrix minden eleme 2. Határozzuk meg az $A \cdot B$ szorzatot!

5. A (100×100)-as A mátrix első 50 oszlopának minden eleme 3, az utolsó 50 oszlop minden eleme 2. A (100×100)-as B mátrix minden oszlopára teljesül, hogy abban az első 50 elem összege 2, az utolsó 50 elem összege 3. Határozzuk meg az $A \cdot B$ szorzatot!

6. Számold ki az alábbi mátrixokat!
   (a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2008}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2007}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{k}$

7. A 100×100-as A mátrix főátlójában és a 100-adik sorában mindenhol 1-es áll, az összes többi (9801 darab) eleme 0. Határozzuk meg az A^{100} mátrixot!

8. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges A négyzetes mátrixra! (0-val jelöltük a csupa nulla mátrixot.)
   (a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$, akkor $\det A = 0$.
   (b) Ha $\det A = 0$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$.

9. Legyen A $n \times n$-es mátrix, $x, y \in \mathbb{R}^n$ pedig n magas oszlopvektorok. Bizonyítsd be, hogy ha $x \neq y$, de $Ax = Ay$ akkor $\det A = 0$.

10. Legyen A olyan $n \times n$-es mátrix, melyre $A = A^T$ és A^2 főátlójában csak nullák állnak. Igazoljuk, hogy A a nulla mátrix (minden eleme 0).

11. Legyenek $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(n \times n)$-es mátrixok. Bizonyítsd be, hogy ha A oszlopai lineárisan függetlenek és B oszlopai is lineárisan függetlenek, akkor az $A \cdot B$ mátrix oszlopai is lineárisan függetlenek!

12. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amire az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix esetén $AB = BA$ teljesül.

13. Megoldható-e a kétszer kettes valós mátrixok körében az $X^2 = -E$ egyenlet? (X az ismeretlen mátrix.)

14. Határozd meg az összes olyan 2×2-es X mátrixot, amelynek minden eleme racionális szám és amelyre $X^{2008} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ teljesül.

15. Az $n \times n$-es A és B mátrixokra $AB = A$ és $BA = B$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A^2 = A$ és $B^2 = B$.

16. Igaz-e, hogy ha A, B és C $n \times n$-es mátrixok, $A \neq 0$, valamint $AB = AC$, akkor $B = C$?

17. Bizonyítsuk be, hogy ha a kvadratikus A mátrixra és a vele azonos rendű E egységmátrixra $A^2 + A + E = 0$, akkor A nem szinguláris. Számítsuk ki A^{2004}-t.

18. Írd fel az $A(1, 1, 7)$, $B(3, 2, 8)$, $C(8, 4, 8)$ pontokon átmenő sík egyenletét!

19. Írd fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(1, 2, 6)$ ponton és tartalmazza az $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{z-11}{10}$, $y = 1$ egyenletrendszerű egyenest!

20. Tekintsük az $A = (2, 1, 4)$, $B = (1, 1, 6)$, $C = (3, 0, 1)$, $D = (0, 1, 1)$, $E = (7, 1, 3)$ pontokat a szokásos 3 dimenziós térben. Határozzuk meg az A, B és C, illetve C, D és E pontok által meghatározott síkok metszetegyenesének irányvektorát!

6. gyakorlat
Mátrix inverze, rangja

1. Számold ki az alábbi mátrixok inverzét, amennyiben léteznek!

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

2. Számítsd ki az alábbi mátrixok rangját! (A (c) és (d) részben a c valós paraméter függvényében.)

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} c & 2 & 3 \\ 21 & 12 & 18 \\ -14 & -8 & -12 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2c+7 & 3c-2 & -5 \end{pmatrix}$

3. A c valós paraméter milyen esetén lesz az alábbi mátrix rangja minimális?
$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & 1 \\ 6 & 18 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & 3c & c^2 \\ 0 & 2 & c^2 & 2c \end{pmatrix}$

4. Az A és B $n \times n$-es mátrixokról tudjuk, hogy $\det A \neq 0$, valamint hogy $A \cdot B = \underline{\underline{0}}$. Határozd meg a B mátrixot! (Itt $\underline{\underline{0}}$ a csupa nulla mátrixot jelöli.)

5. Az $n \times n$-es A mátrixra $A^2 = 0$. Lehet-e A rangja n?

6. Legyen A és B $n \times m$-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ (ahol r-rel a mátrixok rangját jelöltük).

7. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges (de egymással összeszorozható) A és B mátrixra $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

8. Legyen A tetszőleges $m \times n$-es mátrix, B pedig olyan $n \times n$-es mátrix, melyre $\det(B) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy $r(AB) < n$.

9. Az $(n \times n)$-es A mátrixot akkor nevezzük *nullosztónak*, ha létezik egy olyan $(n \times n)$-es $B \neq 0$ mátrix, amelyre $A \cdot B = 0$ (ahol 0 a csupa nulla mátrixot jelöli). Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások:
   a) Ha A nullosztó, akkor $\det A = 0$.
   b) Ha $\det A = 0$, akkor A nullosztó.

10. Tegyük fel, hogy az A mátrix minden sora számtani sorozat. (Vagyis bármelyik sor elemein balról jobbra végighaladva egy-egy számtani sorozat tagjait kapjuk.) Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{r}(A) \leq 2$ (ahol r a mátrix rangját jelöli).

11. A és B két $n \times n$-es mátrix. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
   a) Ha A-nak és B-nek létezik inverze, akkor AB-nek is.
   b) Ha AB-nek létezik inverze, akkor A-nak és B-nek is.
   c) Ha $A + B$-nek és $A - B$-nek létezik inverze, akkor $A^2 - B^2$-nek is.
   d) Ha A-nak és B-nek létezik inverze, akkor $A + B$-nek is.

12. Legyen A egy 6×5-ös valós mátrix. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
   a) Ha az első három sor lineárisan összefüggő, akkor a bal felső 3×3-as aldetermináns 0.
   b) Ha a bal felső 3×3-as aldetermináns 0, akkor az első három sor lineárisan összefüggő.
   c) Ha az első három és az utolsó három oszlop is lineárisan összefüggő, akkor a $r(A) \leq 3$.
   d) Ha az első két és az utolsó két oszlop is lineárisan összefüggő, akkor a $r(A) \leq 3$.

13. Melyek igazak az alábbiak közül?

a) Ha az A mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható.

b) Ha az A mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható.

c) Ha az $Ax = b$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor A oszlopai függetlenek.

d) Egy mátrix egy elemét megváltoztatva a rang legfeljebb 1-el változik.

e) Bármelyik mátrixban van olyan elem, amelyet alkalmasan módosítva a mátrix rangja megváltozik.

14. Mennyi s és t értéke, ha a következő egyenletrendszer megoldása egyértelmű:

$$\begin{aligned} sx + tz &= 2 \\ sx + sy + 4z &= 4 \\ sy + 2z &= t \end{aligned}$$

7. gyakorlat
Lineáris leképezések

1. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ az a függvény, amely a tér (x, y, z) vektorához a sík $(x - y + z, x - y + z)$ vektorát rendeli.
(a) Mutasd meg, hogy $\mathcal{A}$ lineáris leképezés!
(b) Határozd meg $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$-t és $\operatorname{Im}\mathcal{A}$-t!
(c) Legyen $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a tér, $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ pedig a sík „szokásos" bázisa. Írd fel $\mathcal{A}$ mátrixát a B és C bázisok szerint!

2. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere. Döntsd el, hogy az alábbi V-ről V-be menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Ha igen, add meg a kép- és magterüket! Minden $\underline{v}$ vektornak feleltessük meg
(a) az x tengelyre vett tükörképét;
(b) azt az x tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátái közül a nagyobb;
(c) azt az x tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátáinak összege;
(d) a $+90°$-kal való elforgatottját.

3. Írd fel az alábbi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ lineáris leképezések mátrixát a „szokásos" $\{(1, 0), (0, 1)\}$ bázisban!
(a) az y tengelyre való tükrözés;
(b) az origó körüli $+60°$-os forgatás;
(c) előbb egy y tengelyre való tükrözés, majd egy origó körüli $+60°$-os forgatás.

4. Milyen leképezésekhez tartoznak az alábbi mátrixok a sík vektorterén?
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}cos\phi & -sin\phi\\sin\phi & cos\phi\end{pmatrix}$$

5. Döntsd el, hogy az alábbi $\mathbb{R}^3$-ről $\mathbb{R}^2$-be (vagyis a szokásos térről a szokásos síkba) menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Ha igen, add meg a kép- és magterüket, ezek dimenzióját, valamint írd fel a mátrixukat a „szokásos" bázisok (azaz $\mathbb{R}^3$-ben az $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $\mathbb{R}^2$-ben az $\{(1, 0), (0, 1)\}$) szerint!
$$\mathcal{A} : (x, y, z) \rightarrow (x, z) \qquad \mathcal{B} : (x, y, z) \rightarrow (x \cdot y, x \cdot z) \qquad \mathcal{C} : (x, y, z) \rightarrow (x + y, x + z)$$

6. Jelölje V a valós számpárok (azaz a síkvektorok) szokásos vektorterét. Egy $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformációról tudjuk, hogy az $(1, 2)$ vektorhoz a $(6, 7)$ vektort, a $(-1, 2)$ vektorhoz pedig a $(8, 9)$ vektort rendeli. Írjuk fel $\mathcal{A}$ mátrixát a „szokásos", vagyis az $(1, 0)$ és $(0, 1)$ vektorokból álló bázisban!

7. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere és legyen $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ egy lineáris transzformáció. Az $\mathcal{A}$ mátrixa a $\underline{b}_1 = (1, 1)$ és $\underline{b}_2 = (1, -1)$ vektorokból álló bázisban felírva a következő: $\begin{pmatrix}1 & x\\y & 1\end{pmatrix}$. Határozzuk meg x és y értékét, ha tudjuk, hogy $(3, 1) \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

8. Lássuk be a következőket:
(a) $\begin{pmatrix}cos\phi & -sin\phi\\sin\phi & cos\phi\end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix}cosk\phi & -sink\phi\\sink\phi & cosk\phi\end{pmatrix}$
(b) $\{x$-tengelyre tükrüzés$\} \times \{y$-tengelyre tükrözés$\} = \{$középpontos tükrözés$\}$

9. Legyen $\mathcal{A} : V \mapsto V$ olyan lineáris transzformáció, amire $\operatorname{Im}\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathcal{A}$ transzformáció (tetszőleges bázisban felírt) A mátrixára $A^2 = 0$.

10. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ egy vektortér olyan lineáris transzformációi, amelyekre $\mathcal{AB}$ az identitás (helybenhagyás). Igaz-e, hogy $\mathcal{BA}$ is az identitás?

11. Mi a magtere és képtere az alábbi leképezésnek: $f \rightarrow f(1)$, ahol a valós függvények teréből a valósok terére képezünk.

12. A legfeljebb ötödfokú valós együtthatós polinomok vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett. Mutassuk meg, hogy a deriválás ennek a térnek egy Φ lineáris transzformációja. Írjuk fel Φ mátrixát egy tetszőlegesen megválasztott bázisban. Mi Φ magtere és képtere?

13. Adjuk meg a p paraméter függvényében a $\begin{pmatrix}2 & 4 & 2p\\1 & p & 2\end{pmatrix}$ mátrixú lineáris leképezés képterét és magterét.

14. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris leképezés V_1-ről V_2-be, $\underline{v}_i \in v_1$. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
(a) Ha $\mathcal{A}(\underline{v}_1) = \mathcal{A}(\underline{v}_2)$, akkor $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$.
(b) Ha $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \ldots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ generátorrendszer V_2-ben.
(c) Ha $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \ldots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ generátorrendszer $\operatorname{Im}\mathcal{A}$-ban.
(d)Ha $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \ldots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ generátorrendszer $\operatorname{Im}\mathcal{A}$-ban, akkor $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ generátorrendszer V_1-ben.

Tóth Ágnes
tothagi@cs.bme.hu

8. gyakorlat
Sajátérték, sajátvektor, dimenziótétel

1. Keresd meg a az alábbi mátrix minden sajátértékét és sajátvektorát!
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Keresd meg az alábbi mátrix összes sajátértékét és a legnagyobb sajátértékhez tartozó összes sajátvektort is!
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az alábbi A mátrixnak a 0 sajátértéke legyen! A kapott mátrixnak keressük meg a többi sajátértékét is és a legnagyobb sajátértékhez adjuk meg a sajátalteret!
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}$$

4. Az alábbi A mátrixról és $\underline{v}$ vektorról tudjuk, hogy $\underline{v}$ sajátvektora A-nak.
(a) Határozzuk meg a p paraméter értékét!
(b) Határozzuk meg A egy sajátértékét!
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere és $\mathcal{A} : V \mapsto V$ az a lineáris transzformáció, amely minden $\underline{v}$ vektorhoz az x tengelyre vett tükörképét rendeli. Határozd meg $\mathcal{A}$ minden sajátértékét és sajátvektorát!

6. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Határozd meg V alábbi lineáris transzformációinak sajátértékeit, sajátvektorait!
(a) az a leképezés, amely minden vektorhoz a $\underline{0}$-t rendeli;
(b) az a leképezés, amely az (x, y) vektorhoz az $(x + y, 0)$ vektort rendeli;
(c) az origó körüli $+90°$-os forgatás.

7. Tekintsük a legfeljebb harmadfokú, valós együtthatós polinomokat (azaz $ax^3 + bx^2 + cx + d$ alakú kifejezéseket, ahol $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$). Ezeket értelemszerűen össze tudjuk adni, vagy meg tudjuk szorozni egy valós számmal. Így egy V vektorteret kapunk (ezt érdemes ellenőrizni). Mutasd meg, hogy az alábbi $\mathcal{A} : V \to V$ függvények lineáris transzformációk és határozd meg az összes sajátértéküket és sajátvektorukat! Minden polinomnak feleltessük meg
(a) a deriváltját;
(b) a deriváltjának x-szeresét.

8. Tekintsük azt a lineáris transzformációt, amely a négydimenziós tér bázisvektorait ciklikusan egymásba viszi át. Mik ennek a transzformációnak a sajátértékei és sajátvektorai?

9. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformációnak a $\lambda = -1$ sajátértéke. Igaz-e, hogy a $\lambda = -1$ az $\mathcal{A}^3$ transzformációnak is sajátértéke?

10. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció egy 2006 dimenziós V vektortéren és legyen A az $\mathcal{A}$ leképezésnek egy B bázisban felírt mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy ha $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = 2000$, akkor $\det A = 0$ teljesül!

11. Legyen V tetszőleges (legalább 1, de véges dimenziós) vektortér és $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformáció. Bizonyítsuk be, hogy ha $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ teljesül, akkor $\mathcal{A}$-nak a 0 sajátértéke.

12. Az $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy teljesül rá az alábbi két feltétel:
(a) Tetszőleges 7 elem képe lineárisan összefüggő.
(b) Tetszőleges 8 lineárisan független V_1-beli elem között van olyan, amelyiknek a képe nem $\underline{0}$.
Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\dim V_1 \leq 13$.

13. Melyek azok a véges dimenziós valós V vektorterek, melyeken létezik olyan $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformáció, amelyre $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 2 \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$ teljesül?

14. Bizonyítsuk be, hogy ha az A invertálható mátrixnak sajátértéke a λ valós szám, akkor $\lambda \neq 0$ és az A mátrix A^{-1} inverzének sajátértéke lesz az $\frac{1}{\lambda}$ szám.

9. gyakorlat
Komplex számok

1. Végezd el az alábbi műveleteket!

   (a) $(4+i)(5-2i)+(4i-1)^2$ (b) $\dfrac{4+i}{5-2i}$ (c) $\left|\dfrac{6+3i}{6-3i}\right|$ (d) $\dfrac{(1+i)^8}{(1-i)^7}$ (e) $\sqrt[5]{1}$ (f) i^{18}

   (g) $(i-1)^{50}$ (h) $\sqrt{i}$

2. Oldd meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!
   (a) $z^2-iz+2=0$ (b) $z^2=\overline{z}$ (c) $|z|=2z+i$ (d) $z^2-5+12i=0$ (e) $z^4-3z^2-1=0$
   (f) $z+\overline{z}=2\,|z|$ (g) $\overline{z}=z^{2006}$ (h) $z^2-12z+13-4i=0$ (i) $z(1+i)-\bar{z}(1-i)=2i$

3. (a) Mennyi az n. egységgyökök összege?
   (b) Mennyi az n. egységgyökök szorzata?

4. Mennyi $\sqrt[5]{2i-\sqrt{12}}$?

5. Add meg algebrai alakban az $(1-i)^{2000}-i(1+i)^{2002}$ kifejezést!

6. Oldd meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán! Az eredményt algebrai alakban add meg!
   (a) $2i\cdot z^3=(1+i)^8$
   (b) $5\left(z^2+(\overline{z})^2\right)=z(12-6i)$

7. Legyen $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ és $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$. Milyen pozitív n-ekre lesz ${z_1}^n+{z_2}^n$ valós?

8. Milyen n-ekre lesz valós a $(\sqrt{3}-i)^n$ komplex szám?

9. Számítsuk ki $\left(\frac{3-i}{2-4i}\right)^{2003}$ értékét!

10. Bizonyítsuk be, hogy ha ε egy 10-edik és ε' egy 25-ödik egységgyök, akkor $\overline{\varepsilon}\cdot\varepsilon'$ egy 100-adik egységgyök!

11. Bizonyítsuk be, hogy a 2004. egységgyökök közül kiválasztható 876, melyek összege 0.

12. Van-e a kilencedik egységgyökök között pontosan hat, melyek összege zérus? És pontosan hét?

13. A hatvanadik egységgyökök közül hány olyan van, melynek az tizedik hatványa is eggyel egyenlő?

14. Hol van a hiba a következő „levezetésben”? $1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=i\cdot i=-1$

15. (a) Tíz gyerek hányféleképpen állítható úgy sorba, hogy Jancsi és Juliska egymás mellett álljanak?
    (b) Egy gimnáziumban 16 osztály van, az osztálylétszám mindenütt 40. Mindegyik osztály 5 tagú küldöttséget küld az iskolai diákbizottságba. Hányféle lehet a diákbizottság összetétele?

16. (a) A biciklis klub tagjai négyjegyű tagsági számokat kapnak. De a biciklisták babonásak, félnek a 8-astól. Hány olyan tagsági szám lehet, amiben nincs 8-as (de 0-val kezdődhet)?
    (b) A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorban állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképpen tehetik ezt meg?
    (c) Egy versenyen 57-en indulnak; az újságok az első 6 helyezettet közlik. Hányféle lehet ez a lista?
    (d)Egy kisváros 57 fős önkormányzati képviselőtestülete 6 fős delegációt küld a dániai testvérvárosukba. Hányféleképpen jelölhetik ki a 6 fős delegációt?
    (e)Hányféle lehet a dániai delegáció, ha a népszerű Kovács urat mindenképp be akarják venni?
    (f) Hányféle lehet a dániai delegáció, ha a népszerűtlen Kovács urat mindenképp ki akarják hagyni?

Tóth Ágnes
tothagi@cs.bme.hu

10. gyakorlat
Leszámlálások, gráfok

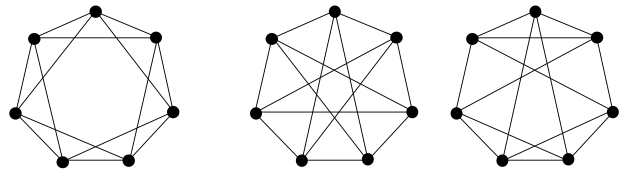
1. (a) Egy csomag francia kártyában 52 különböző lap és három teljesen ugyanolyan dzsoli található. Ha megkeverjük a kártyacsomagot, hányféle különböző sorrendje alakulhat ki a lapoknak?
(b) Hányféleképpen lehet 8 szál (teljesen ugyanolyan) tulipánt szétosztani 5 különböző vázába? (A vázák közül akár bizonyosak üresen is maradhatnak.)
(c) Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?
(d) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n}=?$
2. Egy BME hallgató Neptun-kódja egy olyan, 6 karakterből álló sorozat, amelynek minden tagja az angol ábécé 26 betűjének egyike, vagy a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyek valamelyike. Hány olyan Neptun-kód készíthető, amelynek legalább az egyik tagja betű?
3. Három barát beül sörözni egy helyre, ahol 7-féle sört csapolnak. Mindegyikük rendel egy korsóval. Hányféleképpen alakulhat a pincér tálcáján lévő sörök összetétele, ha
(a) mindenki különböző sört rendel?
(b) rendelhetnek ugyanolyan sört is?
4. (a) 5 házaspár ül egy padon. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni?
(b) Margit néni minden héten 20 lottószelvénnyel lottózik. Hányféleképpen töltheti ki egy héten a szelvényeit, ha persze nem akar két ugyanolyan szelvényt bedobni?
(c) Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?
5. Hányféleképpen lehet eljutni az origóból a (2,3,5) pontba, úgy, hogy csak egységnyi hosszú jobbra, fel és előre lépések lehetségesek?
6. (a) Hányféleképpen állítható sorba n különböző gyerek?
(b) Hányféleképpen ültethető kör alakú asztal köré n gyerek?
(c) Válaszoljuk meg az a) és a b) kérdést akkor is, ha Jancsi és Juliska egymás mellé kell, hogy kerüljenek.
7. Hányféleképpen oszthatunk szét az óvodában 25 gyerek közt 10 csokit, 6 rágót és 9 jégkrémet, ha minden gyerek egy édességet kaphat? És ha egy gyerek többet is kaphat?
8. Egy Oktogontól induló kismetró-szerelvényben 48-an vannak. Feltéve, hogy a Mexikói útig (6. megálló) már nem lesz új felszálló, hányféle eloszlása lehet az egyes megállókban leszálló emberek számának, ha
(a) minden megállóban van leszálló?
(b) lehet olyan megálló is, ahol senki sem száll le?
9. Hány háromjegyű szám van, ami sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható? Hány olyan hatjegyű szám létezik, amelyben van két azonos számjegy?
10. Hányféleképpen lehet a 32 lapos magyar kártyából 6-ot kivenni úgy, hogy legyen köztük ász és piros is?
11. Hány olyan 10 hosszú kockadobás-sorozat van, melyben a dobott számok összege osztható 3-mal?
12. Hányféleképpen tölthető ki egy lottószelvény? Hány 5, 4 és 3 találatos kitöltés van?
13. Bizonyítsd be, hogy
(a) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots\pm\binom{n}{n}=0.$
(b) $\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\binom{n}{3}\binom{n}{n-3}+\ldots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{2n}{n}.$

14. Hány csúcsú az az egyszerű, teljes gráf, amelynek kevesebb éle van, mint a csúcsok számának hatszorosa, de több éle van, mint a csúcsok számanak ötszöröse?

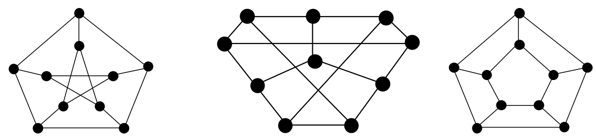
15. Döntsd el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre
(a) 1,2,2,3,3,3;
(b) 1,1,2,2,3,4,4;
(c) 2,3,3,4,5,6,7;
(d) 1,3,3,4,5,6,6.

16. Rajzold fel az összes 3, 4, illetve 5 pontú fát! (Az izomorfakat csak egyszer.)

17. Vannak-e izomorfak az alábbi gráfok között?



18. A G gráf pontjai legyenek az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz 2 elemű részhalmazai; két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak. Az alábbi gráfok közül melyik (melyek) izomorf(ak) G-vel?



19. Hány 60 csúcsú, 1768 élű, páronként nem izomorf egyszerű gráf létezik?

20. Milyen komponensekből állhat egy gráf, ha minden pontjának a foka legfeljebb 2?

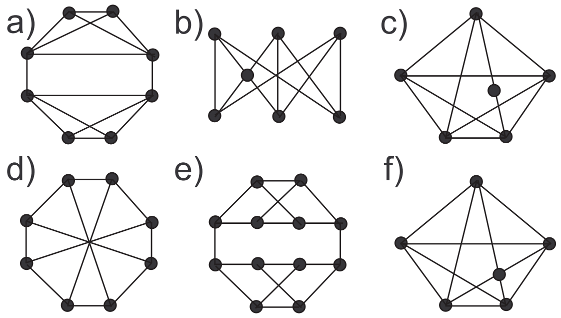
21. Bizonyítsd be, hogy egy egyszerű gráf és a komplementere közül legalább az egyik mindig összefüggő!

22. Egy n csúcsú gráf nem tartalmaz kört, a komponenseinek száma k. Hány éle van a gráfnak?

23. Van-e olyan (legalább két pontú) gráf, melyben minden pont foka különböző? És egyszerű gráf?

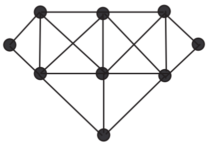
11. gyakorlat
Síkbarajzolhatóság

1. Síkba rajzolhatók-e a következő gráfok? Ha igen, rajzold le élkereszteződés nélkül; ha nem, mutass bennük egy Kuratowski-gráffal topologikusan izomorf részgráfot!



2. Egy hatelemű halmaz kételemű részhalmazai legyenek egy gráf pontjai. Két pont akkor legyen összekötve egy éllel, ha a nekik megfelelő részhalmazok diszjunktak (metszetük üres). Síkbarajzolható-e ez a gráf?

3. Rajzoljuk síkba a következő gráfot úgy, hogy az élek egyenes szakaszok legyenek.



4. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű síkbarajzolható gráfban nem lehet minden pont foka legalább 6.

5. Bizonyítsuk be, hogy egy 4-reguláris egyszerű páros gráf nem lehet síkbarajzolható!

6. Egy 20 csúcsú konvex poliéder lapjainak száma 12. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?

7. Egy konvex poliéder minden lapja szabályos ötszög vagy hatszög (nem feltétlenül szerepel mindkettő). Mennyi az ötszögek száma a lapok között?

8. Egy gömbre rajzolt 6 tartományból álló 3-reguláris egyszerű gráfban mennyi az élek száma?

9. Van-e olyan 9-pontú G gráf, hogy sem G sem a komplementere $\bar{G}$ nem síkbarajzolható?

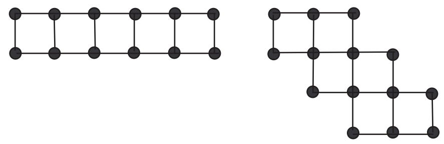
10. Egy síkságon öt ház és öt kút áll. Minden háztól minden kúthoz külön ösvényt kell építenünk. Az építendő ösvények némelyike keresztezheti egymást, de egy-egy kereszteződésben legfeljebb két ösvény találkozhat. Mutassuk meg, hogy ekkor kilencnél kevesebb kereszteződéssel biztosan nem megoldható a feladat.

Bevezetés a számításelméletbe I.
2008. december 3.

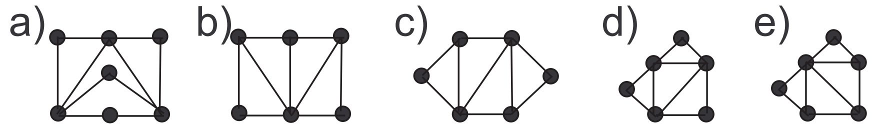
Tóth Ágnes
tothagi@cs.bme.hu

12. gyakorlat
Gyenge izomorfia, dualitás, Prüfer-kód, Cayley tétel

1. Gyengén izomorfak-e az alábbi gráfok?



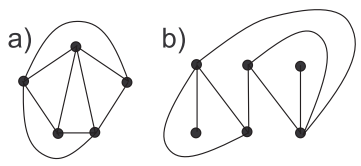
2. Keressünk izomorf és gyengén izomorf párokat a következő gráfok között!



3. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges két n csúcsú fa gyengén izomorf.

4. Rajzolj két gyengén izomorf gráfot, amelyekre teljesül, hogy az egyikben a legnagyobb fokú pont foka legalább 100-zal nagyobb, mint a másikban.

5. Rajzoljuk le az alábbi síkrajzok duálisát.

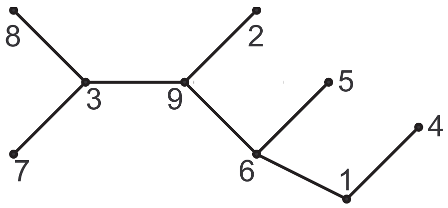


6. Legyen G egy 20 pontú, összefüggő, 3-reguláris síkgráf. Hány pontja van G duálisának, G^*-nak?

7. Van-e olyan egyszerű síkbarajzolt gráf, aminek fele annyi csúcsa van, mint a duálisának?

8. Egy egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt gráfnak ugyanannyi csúcsa van, mint a duálisának. Mutasd meg, hogy a gráfban van három élű kör!

9. Adjuk meg az alábbi fa Prüfer-kódját:



10. (a) Mely fa Prüfer-kódja az 1661174 sorozat?
    (b) És a 2527164?

    Mennyi lesz az egyes csúcsok fokszáma az egyes fákban? Hogyan lehet ezt látni a Prüfer-kódból?

11. Egy 10 csúcsú fa Prüfer-kódja csupa különböző számot tartalmaz. Rajzold le a fát (a pontok számozása nélkül)!

12. Hány olyan különböző fa adható meg n címkézett ponton, amely nem út?

13. Hány olyan fa van az $1, 2, \ldots, 50$ csúcsokon, melyben az 1-es csúcs foka 14?

14. Hány olyan fa van n számozott ponton, amelyben pontosan 3 elsőfokú pont van?

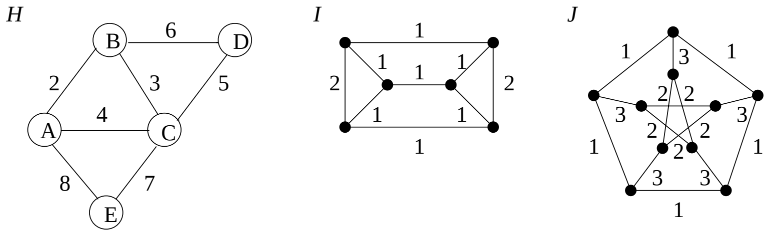
15. Hány olyan fa van az $1, 2, \ldots, n$ pontokon, amelyben az 1-es és a 2-es csúcs is elsőfokú? (Esetleg lehetnek további elsőfokú csúcsok.)

16. A $V = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ pontokon hány olyan egyszerű G gráf adható meg, melynek $2n - 2$ éle van és két egyforma méretű összefüggő komponensből áll?

17. Legyen Δ egy fában a maximális fokszám. Bizonyítsuk be, hogy a fa legalább Δ darab elsőfokú pontot tartalmaz.

13. gyakorlat
Kruskal algoritmus, számosságok

1. Öt falu szeretne aszfaltutat építeni egymás között, hogy bármelyik faluból el tudjanak jutni bármelyik másik faluba. Mi a legolcsóbb megoldás, ha az egyes falvakat az alább látható H gráf csúcsai, a falvak közti útépítés költségeit pedig az adott élre írt számok jelképezik?



2. Hányféleképpen választhatunk ki minimális súlyú feszítőfát az alábbi I is J gráfokból? (A csúcsokat számozottnak tekintjük.)

3. Hány különböző olyan feszítőfája van az 1, 2, 3, 4 illetve 5 csúcscímkékkel ellátott K_5 teljes gráfnak, amiben az 1 címkéjű csúcs nem elsőfokú?

4. Mi a számossága az alábbi halmazoknak?
   (a) azon síkvektorok halmaza, amelyeknek mindkét koordinátája pozitív egész szám;
   (b) azon térbeli vektorok halmaza, amelyeknek mindhárom koordinátája egész szám;
   (c) azon $\mathbb{R}^5$-beli vektorok halmaza, amelyeknek mind az öt koordinátája racionális szám;
   (d) azon (tetszőleges magasságú) oszlopvektorok halmaza, amelyeknek minden koordinátája racionális szám;
   (e) a sík összes pontjainak halmaza,
   (f) a tér összes pontjainak halmaza.

5. Adjuk meg a következő halmazok számosságát:
   (a) A természetes számok véges részhalmazai.
   (b) Azok az $1, a_1, a_2, \ldots$ sorozatok, melyekben a szomszédos elemek hányadosa 1/2 vagy 2.
   (c) Azok az x-ből és y-ból álló sorozatok, melyekben csak véges sok y fordul elő.
   (d) Azon síkbeli háromszögek, melyeknek minden koordinátája egész szám.
   (e) Azon síkbeli háromszögek, melyeknek a területe egész szám.
   (f) A síkon egy háromszög belső pontjai.

6. Mi a számossága a valós számok alábbi részhalmazainak?
   (a) az $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ alakú valós számok halmaza;
   (b) az olyan 0-nál nagyobb és 1-nél kisebb valós számok halmaza, amelyeknek tizedestört alakjában csak 1-es és 2-es számjegy fordul elő;
   (c) az irracionális számok halmaza.

7. A H halmaz álljon a komplex egységgyökökből. (H tehát minden $n \geq 1$ egész számra az összes n-edik egységgyököt tartalmazza.) Határozzuk meg H számosságát!

8. Mi az olyan z komplex számok halmazának számossága, amikre teljesül, hogy $z \cdot \overline{z}$ egész szám?

9. Tekintsük az összes olyan, origóból induló és véges sok lépés után ugyanott véget érő sétát, amelynek minden lépése az x vagy az y tengellyel párhuzamos (pozitív vagy negatív irányú) egységszakasz. Mi a számossága ezen séták halmazának?

10. Hány olyan (x,y) pontpár van a síkon, melyre
    a) x és y is racionális,
    b) x és $x + y$ is racionális,
    c) x és xy is racionális,
    d) $x + y$ és xy is racionális?

11. Adjunk bijekciót (oda-vissza egyértelmű leképezést) az alábbi halmazok között.
    (a) $[0, 1]$ és $(0, 1)$
    (b) $(0, 1)$ és $(-\infty, \infty)$
    (c) $(0, \infty)$ és $(-\infty, \infty)$