Igazságos játékok a pénzfeldobástól a tőzsdéig
Kézirat,
oktatási segédanyag

Telcs András

2009. február 10.

Tartalomjegyzék

[1] Az 1-4 fejezetek, részbe Száz János [?] künyve és Fullér Robert jegyzete alapján készült.

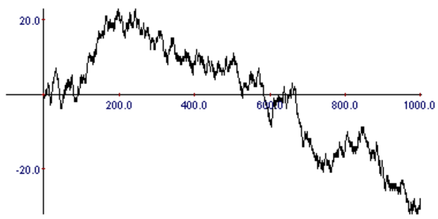
1. fejezet

Előszó

A pénzügyek fontos szerepet játszottak a matematika megszületésében és ma is ösztönzőleg hatnak rá. A modern értékpapír és pénzpiacok megszületésével, újabb és újabb szerződéses formák, pénzügyi termékek megjelenésével egyre bonyolultabb a matematika feladata. Kezdetben csak a megfelelő jelölések és műveletek voltak szükségesek a termény vagy az adó pontos és áttekinthető számbavételére. Később a tartozások és követelések áttekintése vált szükségessé. Az aranyalapú pénz megszűnésével az árfolyam, a piaci egyensúly kérdése jelentett kihívást. Az üzleti élet természetes velejárója a kockázat, ennek matematikai leírása a valószínűségszámítás kialakulásával vált lehetségessé.

Az értékpapírok árfolyamváltozásai sok gyakorlati pénzember, sok közgazdász, fizikus és matematikus figyelmét ragadták meg. Számtalan szabályosságot véltek már felfedezni az árfolyam furcsa bukdácsoló görbéjében.

A feladat természetesen az előrejelzés azzal a céllal, hogy a pénzt a lehető legjobb módon fektessük be, a lehető legnagyobb nyereséget realizáljuk valamely idő elteltével. A probléma oly izgalmas és nehéz, hogy



megoldásában olyan nagyságok működtek közre mint (bár közvetve) Einstein, Bachelier, Wiener, Mandelbrot és napjainkban Black, Scholes, Merton. Az irodalom áttekintéséhez, legalábbis kiinduló pontként ajánlható az igen érdekes matematikai bevezető [?]).

Ez a jegyzet, illetve az "Igazságos játékok a pénzfeldobástól a tőzsdéig" című kurzus nem kevesebbet tűz maga elé, minthogy a pénzügyi matematika alapjaival úgy ismertesse meg az olvasót, hallgatót, hogy az egyszerű piaci egyensúlyi modellektől kezdve eljusson a Sholes és Mertonnak Nobel díjat hozó elmélet, az opciós termékek árazásának elméletéig, sőt felvillantsa az elmélet további általánosításának főbb irányait. A legegyszerűbb alapfogalmak ismertetése után a piaci egyesúly elemi elméletét ismertetjük. Érintjük az utilitás (hasznosság) elméletet, majd Markovitz féle portfólió elméletet és a tőke allokációs modellt (CAPM). Ezek a kérdéses véletlen mennyiségnek, az árfolyamnak csak a várható értékét és szórását veszik figyelembe az optimális befektetési stratégia kialakításakor. Természetesen az árfolyam teljes eloszlásának felhasználásával sokkal jobb stratégia készíthető. Ennek a megkonstruálása és hatékonyságának vizsgálata a klasszikus szerencsejáték, a lóverseny információelméleti vizsgálatára épít. A modern pénzpiacokon számos olyan kötés létezik, ami nem az eredeti értékpapírok adásvételét jelenti, hanem azokból származtatott termékekét, többek között opciókkal kereskednek a tőzsdéken. Az opciós termékek árazása alkotja a következő nagy fejezetet.

A felmerülő gyakorlati feladatok megoldásához elengedhetetlen a pénzügyi folyamatok statisztikai vizsgálata is. A megfelelő eszközrendszer kiépítésére itt nem vállakozunk, az egy másik kurzus és jegyzet feladata. E helyütt abból a kényelmes és a valóságban csak vágyott állapotból indulunk ki, hogy egy árfolyam eloszlásáról tetszőlegesen pontos információval rendelkezünk.

A szükséges matematikiai apparátust a lehető legegyszerűbbre igyekeztünk korlátozni egyrészt az idő és terjedelmi korlátok miatt, másrészt azért mert a legfontosabb jelenségek, a fő üzenetek így is bemutathatóak. Mindvégi diszkrét valószínűségi változókat, illetve diszkrét időbeli változásokat tárgyalunk. A valószínűségszámítás alapjainak, a Markov láncok tulajdonságainak ismeretén kívül csak nagyfokú érdeklődést tételezünk fel az olvasóról.

2. fejezet

Pénzügyi alapfogalmak[1]

Ebben a fejezetben a szükséges minimális szótárat alapozzuk meg ahhoz, hogy eligazodjunk a pénzügyi világ Bábelében, de legalább is annak egy kis szegletében.

Ha kimegyünk a piacra és veszünk egy kiló almát, **ügyletet** bonyolítunk le. A ügylet tárgya a **termék**, az alma. Ebben az egyszerű ügyletben a kofa **long** pozícióban van **eladási szándék**a van, mi pedig **short** pozícióban leledzünk, **venni akar**unk. Ha délelőtt kiálltuk a sort egy koncertjegyért, csak azért, hogy délután felárral továbbadjuk valakinek, aki lusta volt időben felkelni, lemaradt, akkor **open nyilt pozíciót** foglalunk el. Hasonlóan, ha eladtuk a télikabátunkat, nyilván szeretnénk másikat venni, pozíciónk nyitott. Ha viszont meg akarjuk hallgatni a koncertet, meg akarjuk enni az almát, akkor pozíciónk **zárt**. Zárt pozícióról beszélünk akkor is ha eladtunk valamit és nem akarjuk azt, vagy megfelelőjét újra megvenni.

Az almavásárlás **prompt, azonnali** ügylet. Ha barátunk ismerve korán kelő természetünket két koncert jegyet megvesz tőlünk már a sorbanállás előtti napon, akkor **határidős ügylet**et bonyolítunk le, mégpedig **short selling**-et, fedezetlen eladást. Eladtunk valamit, ami még nem is amiénk. Vásárolni is lehet határidőre, ez a **long futures** barátunk pontosan ezt tette. Vegyük észre, hogy a long és a short pozíció határidős ügylet esetén pont a fordítottja az azonnalinak. Mindig arra gondoljunk, hogy az van long pozícióban, aki áremelkedéstől tart, shortban, aki árcsökkenéstől.

2.1. Definíció. *Ügylet az ami megváltoztatja a pozíciót.*

2.2. Definíció. ***Fedezeti ügylet****et kezdeményez az, akinek árfolyam változásnak kitett követelése vagy tartozása van és az esetleges változóból eredő kockázatot (veszteséget) határidős ügylettel igyekszik csökkenteni.*

[1] Az 1-4 fejezetek, részbe Száz János [?] künyve és Fullér Robert jegyzete alapján készült.

2.3. Definíció. ***Arbitrázs ügylet****et bonyolít le az, aki a piaci anomáliákat kihasználva kockázatmentes nyereségre tesz szert. Az ilyen művelet végzője az arbitrazsőr.*

A jobb fülemen lévő telefonon megveszem a nyírségi almatőzsdén az almát 5-ért és a bal fülemen lévő másikon eladom a budapesti nagykereskedőnek 6-ért. Ez a **földrajzi** arbitrázs. **Szintetikus** az arbitrázs, ha más formában adja el jobb áron azt, amit vett. Például kesztárfolyamok és közvetlen árfolyameltérése esetén elérhető kockázatmentes nyereség lefölözése ilyen. Például ha a következő árfolyamok állnak fenn:

1 GBF = 2 USD,
1 USD = 3 DEM,

1 GBP = 5 DEM.
Ekkor a közvetlen váltás

1 GBP → 5 DEM -t

eredményez, míg a követett út
1 GBP → 2 USD →6 DEM -t.

Azaz más formában eladva 1 DEM nyereséget lehetett realizálni. Általában az arbitrázs lényegében egyidejű ügyleteket feltételez.Az arbitrázs a piacok összehangolását biztosítja azzal, hogy ott vagy úgy vesz, ahol olcsó és ott, illetve úgy ad el ahol drága, ezzel keresletet és árat növel az olcsó piacon, kínálatot teremt s lefelé téríti ezzel el az árat a drága piacon.

2.4. Definíció. ***Spekuláns*** *(trader) az, aki kockázatos, elsősorban határidős és opciós ügyletet ún.* ***spekulációs ügylet****et bonyolít le, annak reményében, hogy az árváltozások jelentős hasznot hoznak a számára.*

A piacon tehát fedezeti ügyletet bonyolítók, arbitrazsőrök és traderek működnek. Az első csoport reáltevékenységének pénzügyi és időbeli kockázatait igyekszik csökkenteni. Az arbitrazsőr a rosszul árazott termékek árkiegyenlítését teremti meg közreműködésével, míg a trader egyrészt forrást biztosít a másik két típusú művelethez másrészt kockázatot vállal át. Az arbitrazsőr és a spekuláns nyeresége más spekulánsok veszteségéből adódik, másrészt a fedezeti ügyletekben átvállalt kozkázat prémiuma.

2.1. Kötvény

2.5. Definíció. *A* ***kötvény*** *fix kamatozású, hosszabb lejáratú értékpapír. Kibocsájtója lehet az állam, önkormányzat vagy vállalat.*

2.6. Definíció. *Névérték (principal) az értékpapíron feltüntetett nominális összeg.*

2.7. Definíció. ***Elemi kötvény*** *az a kötvény, amelynek nincsen kamatszelvénye, egyetlen jövőbeni időpontban biztosít kifizetést.*
Szelvényes kötvény *rendszeres hozamot biztosít, kibocsátása névértéken történik.*

2.8. Definíció. ***Névleges kamatláb*** *(nominal interest rate) éves szintre vetített kamat, mindíg valamilyen periódussal együtt értelmezhető.*

2.9. Definíció. ***Effektív kamatláb*** *(compound interest rate) az éves kamat, kamatos kamattal számítva névérték százalékában.*

A névleges kamatláb tehát nem a lejárati idő szerint érvényes kamat, hanem az esetleg rövidebb vagy hoszabb lejáratot figyelembe véve, annak egy évre vetített értéke. Például ha a kötvény 2 évre szól és 4%-os névleges kamatot ígér, az két év után 8.16 százalék kifizetését fogja jelenteni. Fordítva, ha 8% a névleges kamat és négy kifizetés van egy évben, akkor az effektív kamat

$$r = \left(1 + \frac{r_n}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^4 - 1$$

2.1. Megjegyzés. T-bill*-nek nevezik a kincstárjegyet, amelynek lejárata legfeljebb egy év.* T-note*-nak, melynek lejárata 1-10 év,* T-bond*-nak, aminek a lejárata 10-30 év.*

2.2. Megjegyzés. *A* ***kincstárjegy*** *1 éves 6% kamat esetén a 100 névértéken megvásárolt jegyre a lejáratkor 106-t fizet.*
A diszkont kincstárjegy 100 névérték esetén 94-ért vásárolható meg és lejáratkor fizet 100-t, amivel $6/96$*, azaz* 6.4% *tényleges kamatot biztosít.*

Ismeretes, hogy vannak kozkázatos és kockázatmentes kötvények. Kockázatmentesnek tekintik az amerikai államkötvényeket, ezért is viszonylag alacsony a reálkamat, amit fizet. Egy kötvény kockázatos, ha a kifizetés nem egészen bizonyos.

2.2. Részvény

Vizsgálódásunk központi tárgya a részvény.

2.10. Definíció. *A* ***részvény*** *a részvénytársaság által kibocsátott tagsági és vagyoni jogot megtestesítő értékpapír.*

2.11. Definíció. *A* ***részvény névértéke*** *a társaság jegyzett tőkéjének (alaptőkéjének) és a forgalomban lévő részvények számának hányadosa.*

2.12. Definíció. *A részvény kibocsátása az árfolyamon tötrénik, nem a névértékén.*

A névérték a tulajdoni és szavazati hányadot határozza meg a birtokosa számára.

2.13. Definíció. *A részvény aktuális értékét a jövőben várható osztalék jelenértéke határozza meg.*

Tegyük fel, hogy minden elkövetkező évben 1% osztalékot fog fizetni egy 100 névértékű részvény. Tegyük fel ugyanakkor, hogy az infláció évente konstans r. Az egy évmúlva esedékes kamat jelenértéke ekkor $\frac{1}{1+r}$, a két év mulva esedékesé $\frac{1}{(1+r)^2}$.... Ezért a jövőben várható összes osztalék jelenértéke ebben az egyszerű esetben

$$\sum_{i=1} \frac{0.01}{(1+r)^i} = (1+r)\frac{0.01}{1-\frac{1}{1+r}} = 0.01\frac{(1+r)^2}{r}.$$

A nehézséget az jelenti, hogy sem a jövőbeni inflációs rátát sem az osztalékot nem ismerjük, ezek valószínűségi változók, amiknek a kihatása a részvény jelenértékére csak becsülhető, a részvény pillanatnyi értéke nem más, mint a teljes piacon működő szereplők várakozásának eredője.

3. fejezet

Portfólió elmélet

3.1. A kockázat mérése

A **befektetés** éves **hozama** valószínűségi változó.

3.1. Definíció. *Legyen V_0 a kezdeti vagyon, V_1 a befektetés év végi értéke, D_1 az év végi kamat, illetve osztalék. Ekkor az éves hozam*

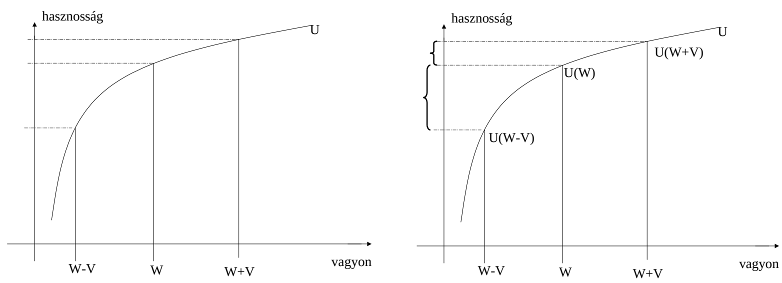
$$r = \frac{D_1}{V_0} + \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

Itt D_1 az osztalék, azaz divident értéke. Részvények és nem bombabiztos kötvények esetén ez a valószínűségi változó nem triviális, azaz nem konstans, hanem valóban sok, előre általunk nem ismert körülménytől függő hatás következében kialakuló véletlen mennyiség. Ezért aztán, ha nem államkötvényről van szó, egy általában ismeretlen valószínűségi eloszlás határozza meg a hozamot. Egy valószínűségi eloszlás statiszikai megismerése sok információt igényel, jellegének megértése és a megfelelő előrejelzés kialakítása nem könnyű feladat, mi több, lehet, hogy nem is érdemes az egész eloszlást nagyon pontosan ismerni, elég néhány jól megválasztott jellemzője alapján kialakítani az előrejelzést. Ezt az utat követték a befektetések elméletének első próbálkozásai. A várható érték és szórás szolgált az eloszlásra vonatkozó elsődleges tájékozódás alapjául. Ez azt is kézenfekvővé teszi, ami egyébként nem feltétlenül az, hogy a hozam előrejelzésére a **várható érték** szolgált, a felmerülő kockázatot pedig a **szórás**sal azonosították. Ez látszólag ellentmond a valószínűségszámításban kiépített elképzelésünktől, ahol a kockázat vagy rizikó megragadására a valószínűség szolgált. Ugyanakkor a befektetések vonatkozásában a szórás természetes mértéke a kockázatnak, hiszen minél nagyobb a szórás, annál kevésbé lehetünk biztosak abban, hogy az átlaghoz közel lesz az év végi hozam. Természetesen itt az is kockázat lehet, hogy a hozam jóval nagyobb a vártnál, aminek persze örülünk, kivéve akkor, ha a kockázatot figyelembe véve vagy egyéb okok miatt nem fektettünk többet a kérdéses formába, így elestünk a nagy haszontól.

3.2. A hasznosság és kockázat viszonya

Az egyes befektetők nem egyforma módon viszonyulnak ugyanahhoz a befektetési lehetőséghez.

Vizsgáljuk meg a legegyszerűbb valószínűségi változó segítségével a befektető viselkedését. Ajánljunk neki egy $1/2 - 1/2$ valószínűséggel nyereséges, illetve veszteséges befektetést. Legyen a nyereség $X\%$, a veszteség $Y\%$. Legyen X rögzített és tapogassuk ki mekkora az a maximális Y, amikor a befektető még belemegy az üzletbe és mekkora veszteség az, aminél már úgy érzi, hogy "nem éri" meg. A példát tovább élesítve még világosabbá válik a kép. Ha $X = 100\%, Y = 100\%$ és az ajánlata teljes vagyon befektetéséről szól, a legtöbben úgy érzik, nem érdemes elfogadni az ajánlatot, túl kockázatos annak ellenére, hogy a játék zéró összegű, a várható nyereség 0, de annak a lehetősége, hogy mindent elveszít $1/2$ valószínűségű, elriszató. Általában a legtöbb ember, befektető kockázatkerülő. Pontosabb képet alkothatunk, ha valóban kitapogatjuk hol van a kritikus Y érték, mégpedig a teljes vagyonhoz viszonyítva. Ábrázoljuk a vagyon-hasznosság függvényt (U utility vagy h hasznosság szóból).



A befektetőnek W vagyona van. Ehhez a $W + V = W(1 + X)$ növekedésnek egy $h(W + V)$ hasznosságot tulajdonít, illetve (feltéve $X = Y$-t) az esetlegesen csökkenő vagyonhoz egy $h(W - V)$ hasznosságot rendel. Ha

$$h(W + V) - h(W) < h(W) - h(W - V), \tag{3.1}$$

azaz növekedéshez rendelt hasznosság növekedés kisebb, mint az elszenvedett veszteséghez rendelt hasznosság csökkenés, akkor a befektető **kockázatk-**

erülő. Átrendezve (3.1)-t

$$h\,(W) > \frac{h\,(W+V) + h\,(W-V)}{2}$$

azaz a h függvény alúlról konkáv. A **kockázatkereső** befektetőt konvex hasznossági függvény jellemzi.

A kockázat semleges befektető közöttük helyezkedi el, egyenes hasznossági függvénnyel bír, hiszen, ha

$$h\,(W+V) - h\,(W) = h\,(W) - h\,(W-V) \tag{3.2}$$

akkor

$$h\,(W) = \frac{h\,(W+V) + h\,(W-V)}{2}. \tag{3.3}$$

1. Figure.

3.1. Gyakorlat. *Idézzük vissza analízisbeli ismereteinket és igazoljuk, hogy az a függvény amely egy* $[a, b]$ *intervallumon értelmezett és minden belső pontban kielégíti a* (3.3) *összefüggést az csak lineáris függvény lehet.*

Térjünk vissza a valószínűségi megfontolásokra. Tekintsük a két lehetséges kimenettel bíró befektetést. Legyen a V hozam eloszlása a következő:

$$V = \begin{cases} v & p \text{ valószínűséggel} \\ -v & 1-p \text{ valószínűséggel} \end{cases}.$$

A várható vagyon

$$E(W_1) = W + pv + (1-p)(-v) = W - (1-2p)v,$$

speciálisan, ha $p = 1/2$, akkor

$$E(W_1) = W + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}(-v) = W,$$

azaz a vagyon átlagosan nem változik. Tekintsük most egy h karakterisztikával, hasznossági függvénnyel rendelkező befektető várható hasznosságát.

$$E[h(W_1)] = ph(W+v) + (1-p)h(W-v),$$

megint feltéve $p = 1/2$-t pedig

$$E[h(W_1)] = \frac{h(W+v) + h(W-v)}{2}.$$

Ha $E[h(W_1)] < E[h(W)] = h(W)$ azaz a kezdeti vagyon hasznossága nagyobb mint a befektetés végén várható átlagos hasznosság, akkor természetesen ebbe nem megy bele a befektető, de ez éppen azt jelenti, hogy

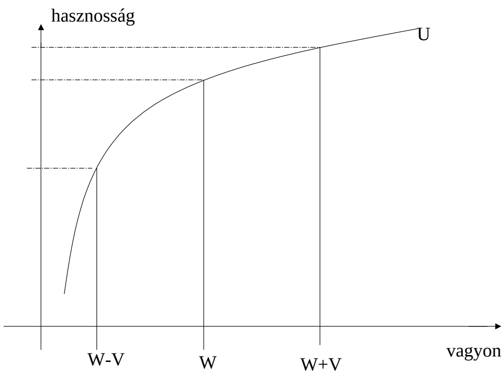
$$\frac{h(W+v) + h(W-v)}{2} < h(W),$$

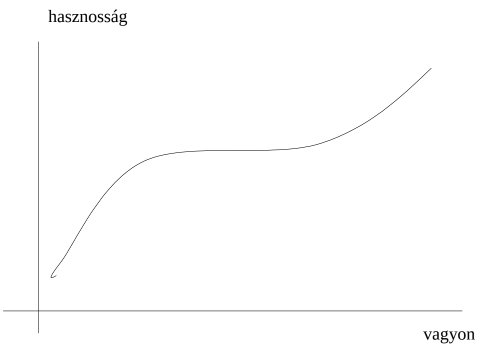
azaz a h függvény alúlról konkáv, ahogy korábban is okoskodtunk, a befektető kockázatkerülő. Ha

$$\frac{h(W+v) + h(W-v)}{2} = h(W),$$

akkor a befektetőt csak az elérhető átlaghozam befolyásolja, **kockáza semleges**. Hasonlóan a fordított irányú egyenlőtlenség esetén a kockázatkereső viselkedésre következtethetünk.

3.1. Megjegyzés. *Természetesen a kép ennél lehet árnyaltabb. Általában egy befektető a vagyon több részre bontásával különböző nagyságú befektetéseket eszközöl, eltérő kockázatú üzletekbe. Kockázatviselő hajlandósága esetleg megfordul, változik az összeg nagyságától függően.*





Általában az emberek kockázatkerülőek, egyre ellapuló alulról konkáv hasznossági függvény jellemzi őket.

Példáink jól lehet szemléltetik, hogy hogyan szolgálhat a kockázat mértékéül a szórás. Ha p és $1-p$ a $+1$, -1 változások valószínűsége, akkor a vagyon szórásnégyzete

$$\sigma^2 = E\left(X^2\right) - E^2\left(X\right) = 1 - \left(2p-1\right)^2 = 4p\left(1-p\right).$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt

$$\sigma = 2\sqrt{p\left(1-p\right)} \leq 2\frac{p+\left(1-p\right)}{2} = 1,$$

azaz

$$\sigma \leq 1.$$

Egyenlőség pedig csak akkor áll fent ha $p = 1-p = \frac{1}{2}$. Ez nem is olyan meglepő, hiszen, ha $p > 1/2$, akkor az $+1-$nek nagyobb az esélye, kisebb a bizonytalanságunk. Ha $p = 1, \sigma = 0$ a bizonytalanságunk, kocázatunk eltűnik. Vizsgáljuk most meg hogyan alakul a hasznosság szórása kockázat kerülő befektető esetén.

$$Eh(W_1) = ph(W+v) + (1-p)h(W-v) < h(W),$$

$$Eh^2(W_1) = ph^2(W+v) + (1-p)h^2(W-v),$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2(h(W_1)) &= Eh^2(W_1) - E^2 h(W_1) \\
&= ph^2(W+v) + (1-p)h^2(W-v) - (ph(W+v) + (1-p)h(W-v))^2 \\
&= p(1-p)\left[h^2(W+v) + h^2(W-v) - 2h(W+v)h(W-v)\right] \\
&= p(1-p)[h(W+v) - h(W) + h(W) - h(W-v)]^2 \\
&= p(1-p)(\triangle_1 + \triangle_2)^2 \geq 4p\triangle_1(1-p)\triangle_2,
\end{aligned}$$

ahol $\triangle_1 = h(W+v) - h(W)$, illetve $\triangle_2 = h(W+v) - h(W)$ a hasznosság változását méri. Ebből látható, hogy a hasznossági fügvény szórása (ebben az egyszerű esetbe) arányos a változó $4p(1-p)$ szórásával.

Az átlagos befektetőt gyakran jellemzik a következő hasznossági függvénnyel. Legyen r a befektetés megtérülési rátája és

$$U(r) = E(r) - 0.005A\sigma^2, \tag{3.4}$$

ahol az A paraméter a kockázatkerülés indexe, $A \approx 2.46$ a tapasztalati értéke.

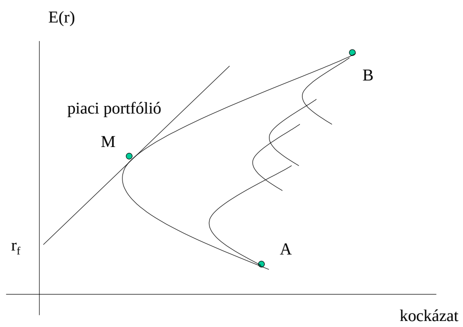
3.2. Definíció. *A befektető **indifferencia görbéje** azon pontok összesége, amelyekre az adott kockázat, hasznosság pár egyenrangú a befektető számára, az egyik vagy másik pont által reprezentált befektetés egyformán vonzó. Ezek között "nem tud" különbséget tenni az adott befektető.*

3.2. Gyakorlat. *Tegyük fel, hogy egy befektető* (3.4) *hasznossági függvénnyel rendelkezik. Legyen* $E(r) = 22\%, \sigma = 34\%$ *egy részvény esetén. A kockázatmentes kötvény* 5%*-ot fizet. Milyen* A *esetén fekteti a pénzét a részvénybe a befektető? Ábrázoljuk a kritikus* A *melett a befektető indifferencia görbéjét.*

3.3. A hozam és kockázat kapcsolata

Tulajdonképpen erről már beszéltünk. Most kissé más megvilágításban, más diagrammon mutatjuk be a kockázatkerülő és a kockázatsemleges befektetőt. Az új ábrázolási mód később lesz igazán hasznunkra, amikor nem egyetlen befektetést, hanem azok kombinációját, úgynevezett portfóliót vizsgálunk.

Ábrázoljuk most a kockázat versus átlag hozam síkon az **indifferencia görbét**.



3.3. Gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy ha két görbének van közös pontja, akkor minden pontjuk közös. Mi a befektető által preferált elmozdulás iránya egy adott pontban?*

3.4. Elvárt hozam

Figyelem, ez a kis, látszólag ártatlan fejezet a trójai faló. Itt csempésszük be az egyensúlyi elmélet alapgondolatát. Ha az alábbi nyilvánvaló gondolatsort elfogadjuk, akkor már elvesztünk, elköteleztük magunkat a klasszikus egyensúlyi elmélet mellett. Nos, jöjjön az okoskodás.

Legyen a kockázatmentes banki kamatláb (hitel és betéti egyaránt) egy évre 25%. Egy 100 Ft névértékű kötvény, akkor versenyképes ezzel, ha

$$\frac{100}{1.25} = 80$$

áron most megvehető és egy év múlva fizeti a névértéket. Ha a kötvényt nem 80-ért adják, akkor jön az arbitrazsőr! Ha mondjuk a kötvényt 78-ért meg lehet venni a kötvényt, akkor felvesz 80 hitelt ebből vesz 78-ért kötvényt, és *azonnal* realizál **2** hasznot, egy év múlva pedig visszafizeti a hitelt (kamatostul) a kötvényért kapott 100-ból. Fordítva, ha a kötvény 82, akkor a kibocsátó maga beteszi a kötvények ellenértékeként hozzá befolyt 82-ből 80-at a bankba, 2 hasznot azonnal realizál, majd az év végén a banki betét kamatából kifizeti a kötvénytulajdonos követelését.

Tehát bármely irányban tér el a kötvény ára a 80-tól kockázatmentes haszonra, arbitrázsra van lehetőség. Ennek pedig még a kockázatkerülő befektetők sem tudnak ellenállni. Azonnal működésbe lépnek és a kereslet-kínálat nyomásával a 80-hoz kényszerítik az árat. A példa olyan egyszerű, hogy azonnal látható: 80-nál többet nem hajlandó a befektető adni a kötvényért, a kibocsátó pedig nem adja 80-nál kevesebbért.

Az infláció az év során viszont változhat. A banki kamatlábak egy része szintén. Ezért aztán a fix kamatozású kötvénynek is van kockázata, hiszen a rövidebb lejáratú banki fix kamatok **alternatív befektetési** lehetőséget ígérnek az inflációt követve az év végére esetleg alacsonyabb, esetleg magasabb éves hozammal. Ha nagyobb a kockázat, nagyobb az **elvárt hozam** is, hiszen a kapott hozamnak fedeznie kell azt az elmaradó hasznot ami a kockázatmentes alternatív befektetés révén a miénk lehetett volna. Szokás ezt **alternatívaköltségnek** is nevezni. A kockázat tehát növeli az elvárt hozamot.

Szokás a hosszabb futamidőt is elvárt hozam növelőként említeni, de a szórás maga is általában nő (minden kezelhető modellünkben ilyen lesz) az idő növekedtével, ezért ennek külön kiemelése nem feltétlen szükséges. A piaci szereplők tevékenysége maga azt eredményezi, hogy a piac arbitrázsmentes. A kockázattal arányos az elvárt hozam, ha ugyanis nem így lenne az a fenti módon a piac azonnal kiegyenlítené a különbséget. Ha ez fennáll, akkor azt mondjuk, hogy a piac **hatékony**. Rövidebben a racionális szereplőkből álló piac akkor és csak akkor hatékony, ha arbitrázsmentes. Értsük ez alatt azt, hogy ha például megjelenik egy arbitrázs lehetőség, a piac nem tünteti el azonnal, az csak azért lehetséges, mert az információ nem áramlik megfelelően, a piac nem hatékony, a befektetők nem értesülnek a kockázatmentes nyereség létéről.

Hatékony piacon a

értékpapír elvárt hozama = az irányadó kamatlábbal = a piaci kamatlábbal

3.5. A Markowitz féle portfólió elmélet

"not all eggs in the same basket"

Egy cégre vonatkozó befektetés esetén kétféle kockázattal kell számolni:

1. specifikus kockázat, ami az adott cégre vonatkozik és
2. az általános piaci kockázat.

Utóbbi nem kerülhető el a portfólió ügyes megválasztásával, ez az úgynevezett beépített vagy piaci kockázat. Mint látni fogjuk a piaci portfólió kockázata az, amire kockázati prémiumot lehet kapni. A piac nem fizet kockázati prémiumot a specifikus kockázatra, hiszen mindenkinek módjában áll azt csökkenteni, attól megszabadulni diverzifikációval, azaz befektetés több cég közötti szétterítésével. Ha valaki ezt nem teszi, az magára vessen.

Magánbefektető vagy kisebb cég esetén általában 12-15 cégre érdemes szétteríteni a porfóliót. Ez már lényegében biztosítja a kockázat közel piaci kockázat szintre redukálását, de a felmerülő költségek még nem túl nagyok. Természetesen az új portfólió elemek beillesztése többletköltséggel jár, ezért nem érdemes a portfólió elemeinek számát nagyon megnövelni. Ugyanakkor a portfólió elemeinek kiválasztása nem olyan egyszerű, hiszen az egyes vállalatok más szektorokban, ágazatokban, földrajzi régiókban működnek eltérő környezeti kockázatok közepette. A jó keverék előállítása szakértelmet igényel. A jó brókercégek és befektetési alapok tőkéje ez a tudás.

Azt már tisztáztuk, hogy mi egy befektetés kockázata. A következő feladat annak tisztázása, hogy egy kockázatos befektetésekből álló portfólió kockázatát hogyan mérjük.

3.5.1. Portfólió hozama

Legyen a portfólióban N értékpapír. Legyen az összvagyonnak az i-edikre eső aránya w_i, várható hozama pedig $E(r_i)$, σ_i szórással, illetve $\sigma_{i,j}$ kovarianciával a párok között. A protfólió várható hozama

$$E(r_p) = E\left(\sum_{i=1}^{N} w_i r_i\right) = \sum_{i=1}^{N} w_i E(r_i).$$

A **portfólió szórásnégyzete**

$$\sigma_p^2 = \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{i,j} = w^* \sum w,$$

azaz

$$\sigma_p^2 = \sum_i \sum_j w_i w_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j,$$

ahol $\rho_{i,j}$ az a párok közötti korrelációs együttható. A képletből világos, hogy a negatív korreláció csökkenti a portfólió szórását a pozitív növeli.

Az egy értékpapírra vonatkozó okfejtéssel egyezően a portfólió kockázatát, annak szórásával mérjük.

3.3. Definíció. *Egy P* ***portfólió kockázata*** *a portfólió σ_p szórása.*

3.5.2. Két kockázatos elemet tartalmazó portfólió

Legyen befektetési alternatívánk A és B .

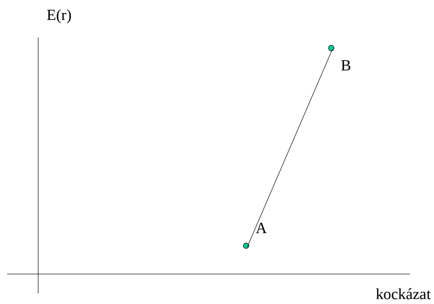
	A	B
$E(r)$	9%	14%
σ	12%	20%
$\sigma_{A,B}$	72	
$\rho_{A,B}$	0.3	

ekkor

$$\begin{aligned} E(r_p) &= w_A E(r_A) + w_B E(r_B), \\ \sigma_p^2 &= w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \rho_{A,B} \sigma_A \sigma_B. \end{aligned}$$

Nézzük, hogyan alakul a szórás-hozam ábra különböző $\rho - k$ esetén .

1. Ha $\rho = 1$, akkor a portfólió pontjainak halmaza az A és B pontokat összekötő egyenes.



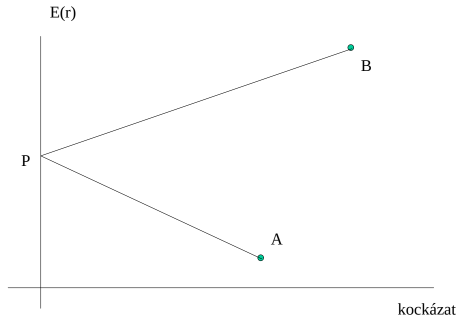
$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_A \sigma_B = \\ &= (w_A \sigma_A + w_B \sigma_B)^2 . \end{aligned}$$

2. Ha $\rho = -1$, akkor a portfólió pontjainak halmaza az A és B pontokra épített háromszög. Jól látható, hogy ekkor a minimális kockázatot a háromszög C csúcsán lehet elérni. A kockázat nullára redukálható!

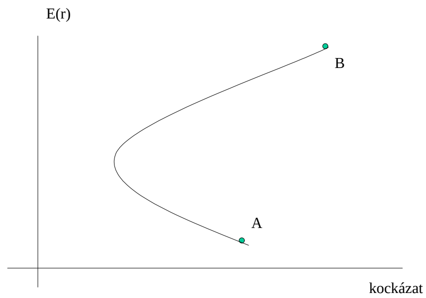
$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 - 2 w_A w_B \sigma_A \sigma_B = \\ &= (w_A \sigma_A - w_B \sigma_B)^2 , \end{aligned}$$

ezért $\sigma_p = 0$, ha

$$w_A = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}, w_B = \frac{\sigma_A}{\sigma_A + \sigma_B}.$$



3. Ha $|\rho| < 1$ akkor a a portfólió pontjainak halmaza egy parabola, aminek meghatározható a legkisebb kockázatot képviselő pontja.



Általában σ_p-t minimalizálja a

$$w_A^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{A,B}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{A,B}}. \tag{3.5}$$

3.4. Gyakorlat. *Végezzük el a szélsőérték meghatározását $\rho = -1, 0.3$ esetekre.*

3.5. Gyakorlat. *Tegyük fel, hogy a befektető hasznossági függvénye $U(r)$ (3.4). Maximalizáljuk $U(r_p)$-t. Igazoljuk, hogy*

$$w_A^U = \frac{E(r_A) - E(r_B) + 0.001A\left(\sigma_A^2 - \sigma_B\rho_{A,B}\right)}{0.001\left(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{A,B}\right)}.$$

3.5.3. Egy kockázatos és egy kockázatmentes papírból álló portfólió

Mielőtt az általános portfólió esetét tárgyalnánk a másik alapesetet vizsgáljuk meg. Álljon a portfólió egy kockázatos A, egy kockázatmentes F papírból.

Legyen a kockázatos befektetés részaránya a portfólióból y. Legyen r_A az A hozama, $E(r_A)$ a várható értéke, σ_A pedig a szórása. A kockázatmentes hozam r_f. Például $E(r_A) = 10\%$, $\sigma_A = 22\%$, $r_f = 2\%$.

3.4. Definíció. *A* ***kockázati prémium***

$$r_+ = r_A - r_f,$$

Esetünkben 8%. A portfólióvárható hozama

$$\begin{aligned} E(r_p) &= yE(r_A) + (1-y)\,r_f \\ &= yE(r_A - r_f) + r_f \\ &= yE(r_+) + r_f, \end{aligned}$$

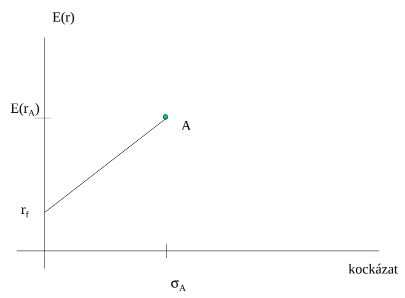
ami esetünkben $8 + 8y$. A portfólió szórás természetesen

$$\sigma_p = y\sigma_A,$$

azaz $22y$. A portfólió hamlaz pontjai az A, F egyenesen helyezkednek el. Az egyenes meredeksége

$$S = \frac{E(r_A) - r_f}{\sigma_A}$$

esetünkben $S = 8/22$.



$$E(r_p) = r_f + yE(r_A - r_f).$$

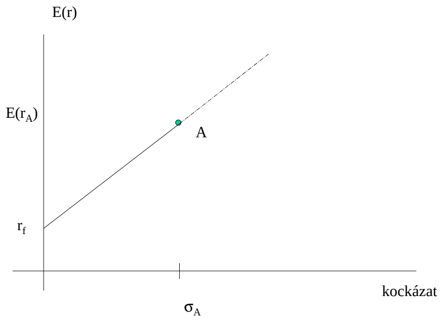
3.5. Definíció. *Az ábrán látható A, F egyenest nevezik tőke allokációs egyenesnek (capital allocation line) CAL.*

Ha a befektető valamennyi hitelt vesz fel a befektetéséhez, akkor az általa kialakított portfólió pontja a tőke allokációs egyenesen a A-tól jobbra helyezkedik el. Például, ha 200 a befektethető tőkéje, ehhez további 200 kölcsönt vesz fel és a rendelkezésére álló pénzt A-ba fekteti, akkor $y = \frac{400}{200} = 2$, $1 - y = -1$. Ekkor

$$E(r_p) = r_f + 2E(r_+) = 24\%,$$

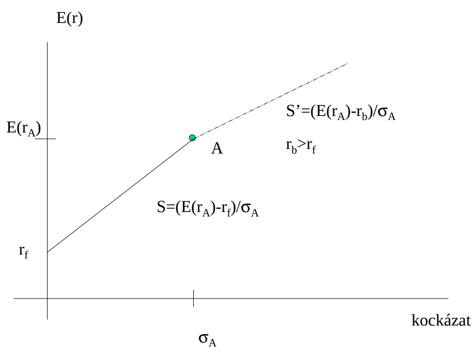
ugyanakkor

$$\sigma_p = y\sigma_A = 18\%.$$



A valóságban viszont a magánbefektető nem tud a kockázatmentes kamatszinten hitelt felvenni. Ezért a valóságban a befektető CAL-ja másképp alakul. Tegyük fel, hogy a hitel kamata $r_b = 4\%$. Ekkor $A-$től jobbra a meredekség kisebb,

$$S = \frac{E(r_A) - r_b}{\sigma_A} = \frac{6}{22}.$$



Vizsgáljuk most meg a tipikus hasznossági függvénnyel rendelkező befektető viselkedését ebben a helyzetben. A maximalizálandó érték ekkor

$$\begin{aligned} U(r_p) &= E(r_P) - 0.005A\sigma_p^2 \\ &= r_f + yE(r_A - r_f) - 0.005Ay^2\sigma_A^2. \end{aligned}$$

Elvégezve a deriválást és megoldva az egyenletet

$$y^* = \frac{E(r_A) - r_f}{0.01A\sigma_A^2}. \tag{3.6}$$

Ebből $y^* = 0.41$, ha $A = 4$. A várható hozam

$$E(r_p) = r_f + yE(r_A - r_f) = ...\%$$

a portfólió szórása

$$\sigma_p = 9.02\%$$

és a kockázati prémium

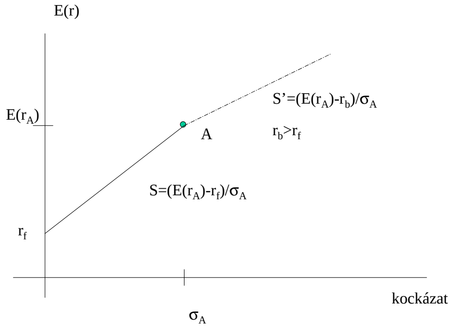
$$E(r_+) = ...\%$$

3.5.4. Az optimális keverék keresése

Tegyük most fel, hogy két kockázatos és egy kockázatmentes papírból álló portfóliót akarunk optimalizálni. Legyenek a papírok adatai a táblázatban láthatóak.

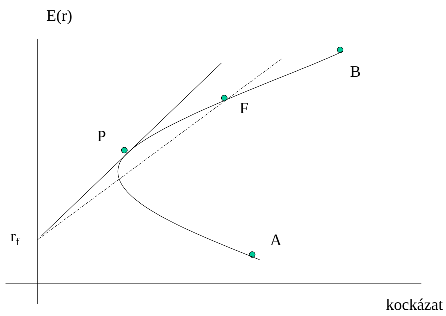
	A	B	F
$E(r)$	9%	14%	6%
σ	12%	20%	0
$\sigma_{A,B}$	72		
$\rho_{A,B}$	0.3		

Elkészítjük újra a kockázat-hozam diagrammot.



A lehetséges CAL-ok a kockázatmentes befekektést reprezentáló F pontból induló egyenesek. Ezek metszik vagy érintik az A és B keverékével kialakítható kockázatos portfólió lehetséges pontjainak görbéjét. F körül forgatva a CAL-t a meredekebb egyenesek jobb kockázat-nyereség pontokat tartalmaznak.

Az egyenesek szélső helyzete, amikor éppen még érintik az A, B görbét. Legyen az érintési pont P.



Az $F-P$ egyenes reprezentálja az elérhető legmagasabb hozam-kockázat arányt. Meg kell tehát találnunk azt a w_A, w_B súlypárt, ami P-hez tartozik. Optimalizáljuk tehát az

$$S=\frac{E\left(r_P\right)-r_f}{\sigma_P}$$

értékét, azaz

$$\frac{w_A E\left(r_A\right)+w_B E\left(r_B\right)-r_f}{\sqrt{w_A^2\sigma_A^2+w_B^2\sigma_b^2+2w_A w_B\sigma_{A,B}}}\text{-t.}$$

Megoldva a szélsőérték feladatot

$$w_A=\frac{E\left(r_A-r_f\right)\sigma_B^2-E\left(r_B-r_f\right)\sigma_{A,B}}{E\left(r_B-r_f\right)\sigma_A^2+E\left(r_A-r_f\right)\sigma_B^2-\left(Er_B+Er_A-2r_f\right)\sigma_{A,B}}$$

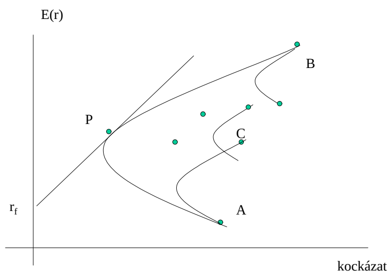
adódik, tehát $w_A^*=0.4$, $E\left(r_p\right)=12\%, \sigma_P=14.2\%$, $S=0.42$. Ha befektetőnk a tipikus hasznossági függvénnyel rendelkezik, és $A=4$ akkor az általa választott Q pont az

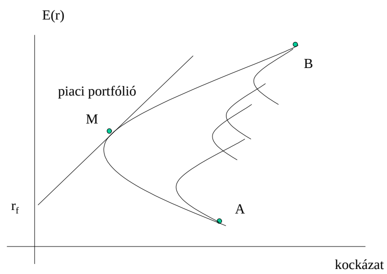
$$y=\frac{E\left(r_P\right)-r_f}{0.01A\sigma_P^2}=.744$$

lesz, tehát a kockázatos rész aránya 74.4% a kockázatmentessé 25.6%.

3.6. Gyakorlat. *Számoljuk ki mi a portfólió hozama és kockázata.*

Természetesen nem lehet kézzel kiszámolni a feladat optimalizálását több kockázatos papír esetén. Az optimalizálási feladat most már világos. A kockázatos papírok lineáris kombinációi egy balról konvex zárt C halmazta alkotnak.





A halmaz "bal felső" határa alkotja az optimális pontokat. Szokás ezt **hatékony határnak** nevezni. Mint előbb az $F-$ből a $C-$hez felőlről támaszkodó érintő érintési pontja(i) adják az optimális portfólió keverékeket. Ezek a pontok reprezentáják a **hatékony** portfóliókat.

Ebben a részben ismertettük a H. Markowitz által 1952-ben kifeljesztett portfólió elméletet. Ezért a munkájáért 1990-ben Közgazdasági Nobel Díjat kapott. Az elmélet egzakt magyarázatot ad a régóta ismert aranyszabályra, hogy ne tegyünk minden tojást ugyanabba a kosárba, ne egyetlen befektetésben tartsuk a pénzünket. Az elmélet receptet is ad az optimális befektetési mód kiválasztására, amit a mai számítástechnikai háttérrel gond nélkül realizálni is lehet.

4. fejezet

A tőkeallokációs modell

Ebben a fejezetben a Markowitz féle elméletre építve az egész piac viselkedését fogjuk tanulmányozni. A Markowitz féle elmélet az egyes befektetőnek "ad tanácsot", most azt vizsgáljuk meg, hogy ha minden befektető bizonyos elveket követ, akkor a piac hogyan működik. Ez a megközelítés arra fog vezetni, hogy az egyes befektetések kockázata és várható hozama között egyértelmű kapcsolat áll fenn, a piac egyensúly teremtő hatása rendet tesz az árak között. Ennek alapján eldönthető lesz, hogy egy adott papír ára korrekt-e, esetleg alul vagy felül árazott. Hasonlóan a bevezetés előtt álló papír árazásához is támpontot tudunk adni.

4.1. A CAPM feltevései

1. A befektetők racionálisak és mind az átlag-szórás optimalizálást használják.
2. Ugyanazon időtávlatra végzik a befektetéseiket. (egy periódus)
3. Minen befektető ugyanazon információk birtokában van.
4. Minden befektető kisbefektető, azaz egyedi tranzakcióik nem képesek a piac teljes működését lényegesen befolyásolni.
5. Nincs surlódás a piacon, azaz a kereskedés költségmentes.
6. A piacon van egy kockázatmentes vehető és eladható vagyon.
7. Szabad korlátlanul hitelt felvenni és a hitel és betéti kamata azonos.

8. A piacon lévő összvagyon fix és véges.
9. A kezelt vagyon korlátlanul osztható tetszőleges kis mennyiségek is adhatóak,vehetőek. (Folytonossági feltevés).

4.1. Definíció. *A piaci portfólió a piacon lévő összes vállalatnak papírok által megtestesített vagyonának megoszlása. Azaz az egyes cégekre az ár/részvény hányadost megszorozzuk a kintlévő papírok számával, ezzel megkapjuk a cég piaci értékét, ennek a teljes piacon lévő vagyonhoz viszonyított mértéke a cég részaránya a piaci portfólióból.*

4.1. Tétel. *1. Minden befektető olyan portfóliót alakít ki, amelyben a kockázatos papírok aránya a piaci portfólival azonos. A piaci portfólió nemcsak a hatékony határon van, hanem a kockázatmentes befektetés pontjából a kockázatos papírok konvex halmazához húzható érintő érintési pontja is.*

2. A kockázati prémium a piaci portfólión arányos az átlagos befektető kockázatkerülési indexével illetve a piaci portfólió szórásnégyzetével, azaz

$$E\left(r_M - r_f\right) = \widetilde{A}\sigma_M^2 \times 0.01$$

ahol r_M a piaci portfólió hozama, σ_M a piaci portfólió szórása és $\widetilde{A}$ befektetők kockázatkerülési indexének harmonikus közepe:

$$\widetilde{A} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{A_i}}.$$

3. Egy adott befektetés kockázati prémiuma arányos a piaci portfólió kockázati prémimával és az adott papír "bétájával" ami

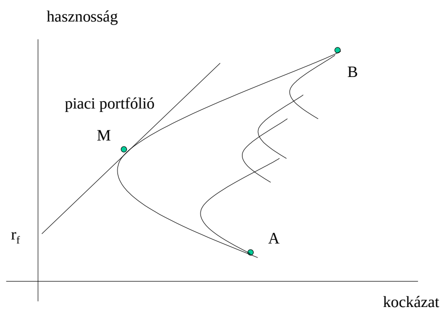
$$\beta_i = \frac{Cov\left(r_i, r_M\right)}{\sigma_M^2}$$

és

$$E\left(r_i\right) - r_f = \beta_i E\left(r_M - r_f\right). \tag{4.1}$$

4.1. Megjegyzés. *A* (4.1) *egyenlőséget szokták a CAPM relációnak nevezni.*

4.2. Definíció. *A **tőkeallokációs** egyenes másképpen a **tőkepiaci egyenes** (Capital Allocation Line) a kockázatos papírok piaci portfólió M pontját és a kockázatmentes befektetési pontot köti össze. A portfólió kockázati préiuma és a portfólió kockázat, a szórásnégyzet közötti kapcsolatot mutatja.*



4.1. Bizonyítás. *1. Könnyen látható, hogy minden befektető a kockázatos papírok ugyanolyan keverékében akarja tartani a vagyonát. Ez egyszerűen következik a CAPM 1-4 feltevésekből, hiszen ha mindannyian ugyanazon információ birtokában vannak, ugyanazon függvényt optimalizálják (a kockázatos papírok vonatkozásában), ugyanazon periódusra fektetnek be, akkor ugyanarra a következtetésre kell jutniuk, azaz ugyanazt a hatékony határt kell megkapniuk. Végül pedig a kockázatmentes papír pontjából húzott érintő érintési pontja adja az optimális keverékét a kockázatos portfólió elemeknek. Mivel minden befektető így határozza meg a CAL-t, a tőkeallokácós egyenest, ugyanahhoz az érintési ponthoz, ugyanahhoz a keverékhez jutnak. Megjegyezzük, hogy tulajdonképpen az egyes befektetők az egyéni A kockázatkerülési indexük alapján csak arról döntenek, hogy a tőkeallokácós egyenesen $y-t$ választva, milyen arányban fektetnek kockázatmentes és kockázatos papírba.*
2. Minden befektető a neki optimális y_i^*-t választja. Legyen A_i a befektető kockázatkerülési indexe. Az optimális y_i^* mint láttuk

$$y_i^* = \frac{E(r_M) - r_f}{0.01 A_i \sigma_M^2}.$$

A hitelnyújtó transzfer szerepet játszó tényezője a piacnak. A hitelfelvevők a kockázatmentes betétben elhelyezett tőkét veszik fel, azaz a hitelnyújtó a többi befektetőn keresztül az átlagos befektetőn keresztül fektet be a piacon és így a piaci portfólióba fektet be. Mivel a piac zárt, ezért a hitel és a betét előjeles összege 0. Azaz a teljes piacon a teljes vagyon a piaci portfólióba van fektetve, azaz $\overline{y} = 1$. Akkor pedig

$$\begin{aligned} 1 &= \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{E(r_M) - r_f}{0.01 A_i \sigma_M^2} \\ &= .\frac{E(r_M) - r_f}{0.01\sigma_M^2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{A_i}, \end{aligned}$$

azaz ha

$$\widetilde{A} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{A_i}}$$

az egyéni kockázatkerülési indexek hamonikus átlaga,akkor

$$1 = \frac{1}{\widetilde{A}} \frac{E(r_M) - r_f}{0.01\sigma_M^2}$$

tehát

$$E(r_M) - r_f = \widetilde{A} 0.01\sigma_M^2.$$

3. Tegyük fel, hogy a piaci portfólió N részvényből áll, amelyek hozama r_i, szórása σ_i. A piaci portfólió hozama

$$r_M = \sum_{i=1}^{N} w_i r_i,$$

ahol w_i az i-edik részaránya a teljes piaci portfólióból. A részvények és a piac hozama közötti kovariancia:

$$Cov(r_k, r_M) = Cov\left(r_k, \sum_{i=1}^{N} w_i r_i\right) = \sum_{i=1}^{N} w_i Cov(r_k, r_i).$$

Mivel tudjuk, hogy mekkora a piaci portfólió szórása és a piaci portfólió illetve az egyes részvények hozamának kovarianciája, meghatározhatjuk az $i-$edik részvény piac által akceptált kockázati prémiumát. Tudjuk, hogy a piaci portfólió kockázati prémiuma

$$E(r_M) - r_f$$

amit a piaci portfólió kockázatának, σ_M^2-nek az ellentételezésére fizet. Ezért mondják azt, hogy

$$\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M^2}$$

a kockázat piaci ára.

Világos, hogy az egyes individuállis részvények kockázati prémiumának ez a viszonyítási alapja.

A következő módszer a fizikában a legkisebb hatás elveként ismert. Tulajdonképpen arra szolgál, hogy a segítségével megkeressük egy rendszer egyensúlyi állapotát, azaz megoldjunk egy (esetleg igen bonyolult) variációs feladatot.

Legyen egy befektető portfóliója tökéletesen azonos a piaci portfólió arányaival. Tegyük fel, hogy egy $\delta > 0$ kis összeggel növelni kívánja a kockázatos befektetéseinek a mérékét, úgy hogy kockázatmentes kamaton hitelt vesz fel. Az új portfólió három elemből áll össze:

a.) az eredeti pozíció amelynek hozama r_M,
b.) δ *mértékű tartozás, aminek a "hozama"* -δr_f *lesz,*
c.) a piaci portfólióban elhelyezett δ *vagyon, aminek a növekménye* δr_M.
A portfólió hozama

$$r_M + \delta\left(r_M - r_f\right)$$

lesz. Véve a változások várható értékét

$$\begin{aligned} \triangle E(r) &= E\left(r_M + \delta\left(r_M - r_f\right)\right) - E\left(r_M\right) \\ &= \delta E\left(r_M - r_f\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ezután megvizsgáljuk, hogy hogyan változott a portfólió kockázata. Az új portfólió $1+\delta$ *súlyt helyez a kockázatos papírokba és* $-\delta-t$ *a kockázatmentesbe, ezért*

$$\sigma^2 = (1+\delta)^2 \sigma_M^2 = \sigma_M^2 + \left(2\delta + \delta^2\right)\sigma_M^2. \tag{4.3}$$

Szokás szerint a δ^2 *tagot elhagyjuk mondván, hogy az másodrendben kicsi* δ*-hoz képest, ezért*

$$\triangle\sigma^2 = 2\delta\sigma_M^2.$$

A kapott $(4.2), (4.3)$ *összefüggések hányadosát véve:*

$$\frac{\triangle E(r)}{\triangle\sigma^2} = \frac{E\left(r_M - r_f\right)}{2\sigma_M^2}.$$

*Ezt a hányadost szokták a **kockázat határára**-nak nevezni. Most más "irányban" variáljuk a feltételezett egyensúlyi pontot. Tegyük most fel, hogy a felvett* δ *hitelt az i-edik részvénybe fekteti. Az előzőhöz hasonlóan*

$$\triangle E(r) = \delta E\left(r_i - r_f\right).$$

A portólió helyzetét a következő súlyok határozzák meg.
1. 1 a piaci portfólióra,
2. további δ *az i-edik részvényre,*
3. -δ *a kockázatmentes befektetésre (hitelfelvétel).*
A szórásnégyzet ekkor

$$\sigma^2 = \sigma_M^2 + 2\delta Cov\left(r_M, r_i\right) + \delta^2\sigma_i^2,$$

$$\triangle\sigma^2 = 2Cov\left(r_M, r_i\right)$$

megint elhagyva a δ^2 *tagot. A kockázat ára:*

$$\frac{\triangle E(r)}{\triangle\sigma^2} = \frac{E\left(r_i - r_f\right)}{2Cov\left(r_M, r_i\right)}.$$

Ha egyensúly van akkor az i-edik részvényen a kockázat ára azonos kell, hogy legyen a kockázat piaci árával. Egyensúly pedig azért kell, hogy legyen, mert különben, ha az adott részvény a kockázatot magasabb hozammal honorálná, akkor a befektetők ezt preferálnák mindazokkal szemben, ami ez alatt van, beleértve a piaci portfóliót is, azaz ebbe fektetnének. Folytatva már két módon is érvelhetünk. Ennek következtében a részvény ára nőne, csökkentve a hozamot és az egyensúly felé térítve a kockázat árát, vegül is megszüntetve azt. Vagy érvelhetünk úgy, hogy akkor a piaci portfólió mozdulna el e felé a részvény felé, de azt már beláttuk, hogy stabilan egy ponton áll. Tehát (4.2) *és* (4.3)*-ből adódik, hogy*

$$\frac{E\left(r_M - r_f\right)}{2\sigma_M^2} = \frac{E\left(r_i - r_f\right)}{2Cov\left(r_M, r_i\right)},$$

ezt átrendezve

$$E\left(r_i - r_f\right) = Cov\left(r_M, r_i\right)\frac{E\left(r_M - r_f\right)}{\sigma_M^2},$$

vagy a kockázati mennyiségeket egybegyűjtve

$$\begin{aligned} E\left(r_i - r_f\right) &= \frac{Cov\left(r_M, r_i\right)}{\sigma_M^2} E\left(r_M - r_f\right), \\ Er_i &= r_f + \frac{Cov\left(r_M, r_i\right)}{\sigma_M^2} E\left(r_M - r_f\right) \end{aligned}$$

*bevezetve a **részvény bétáját**:*

$$\beta_i = \frac{Cov\left(r_M, r_i\right)}{\sigma_M^2},$$

$$E\left(r_i - r_f\right) = \beta_i E\left(r_M - r_f\right)$$

*Ez az átlagos **hozam - béta** összefüggés.*

Jelentése, hogy egy papír kockázati prémiuma egyenlő a piaci kockázati prémium és a papír bétájának szorzatával.

A béta mennyiség az adott részvény piaccal együtt mozgását méri, mennyit nő a részvény hozama, ha a piaci fellendülés 1%-os.

A béta jelöléssel élve a következő észrevételt tehetjük.

$$Er_i = Er_f + \beta_i E\left(r_M - r_f\right)$$

ezért

$$\begin{aligned} E\left(r_M\right) &= \sum w_i E r_i = r_f + \sum w_i \beta_i E\left(r_M - r_f\right), \\ E\left(r_M\right) - r_f &= \sum w_i \beta_i E\left(r_M - r_f\right) \end{aligned}$$

Tehát

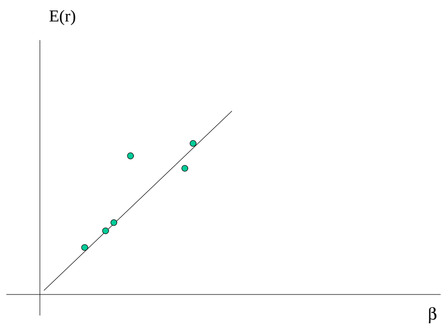
$$\sum w_i \beta_i = 1.$$

Másképpen, a piac bétája a piac önmagával együtt mozgásának mértéke természetesen 1, ezért

$$\beta_M = \sum w_i \beta_i = 1.$$

4.2. Az értékpapírpiaci egyenes

Az előző fejezet alapján azt mondhatjuk, hogy egy részvény bétája a részvény kockázatának egy másik releváns mértéke, hiszen azt mutatja, hogy az a részvény hogyan járul hozzá a piaci portfólió kockázatához. Másképpen az átlagos piaci kockázathoz viszonyítja az egyes részvények kockázatát, úgy hogy az átlagos kockázat most 1-re van normálva. Ábrázoljuk a várható hozam-béta diagrammon a részvénye pozícióját.

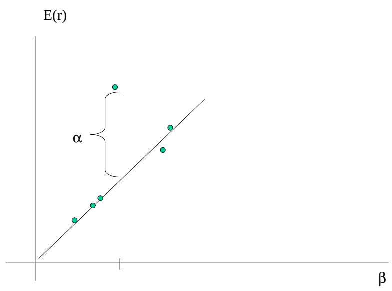


4.3. Definíció. *Az ábrán az 1 meredekségű egyenes az* ***értékpapírpiaci egyenes.***

Emlékeztetőül. A **tőkeallokációs** egyenes másképpen a **tőkepiaci egyenes** (Capital Allocation Line) a kockázatos papírok piaci portfólió M pontját és a kockázatmentes befektetési pontot köti össze. A portfólió kockázati préiuma és a portfólió kockázat, a szórásnégyzet közötti kapcsolatot mutatja. Tehát más mint az értékpapírpiaci egyenes.

A tőkepiaci egyenes és az értékpapír piaci egyenes más-más információt hordoz. A tőkepiaci egyenesen a hatékony befektetések helyezkednek el, amelyek a kockázatmentes befektetés és a piaci portfólió, azaz az optimális keverék valamilyen arányú elegyéből jöttek létre. Ez az egyenesen a kamatprémium és a szorásnégyzettel mért kockázat viszonyát mutatja. A pénzpiaci egyenes (illetve a hozam-béta ábra) viszont nem a befektetők pozícióját, hanem a részvények pozícióját mutatja. Az egyes részvények teljes piaci kockázathoz viszonyított releváns kockázati mérőszáma a béta, egyszerűen a normálás révén.

Ha egy részvény az értékpapír piaci egyenes felett helyezkedik el, akkor az adott bétához nagyobb várható hozamot biztosít, tehát alulárazott, ha alatta van fordítva, felülárazott.



4.4. Definíció. *Részvény* ***alfája*** *az aktuálisan várt hozam $E(r)$ és a bétához tartózó (a pénzpiaci egyenes adta) $E(r_i)$ hozam különbsége:*

$$\begin{aligned}\alpha_i &= E(r) - r_f - E(r_i) \\ &= E(r) - \beta_i E(r_M - r_f).\end{aligned}$$

4.2. Megjegyzés. *Ha egy részvényre $\beta_i > 1$, akkor a piaci kilengést felülmúlja a részvény kilengése, (ilyenkor szoktak agresszív részvényről beszélni), ha $\beta_i < 1$, akkor a kilengése a piaci átlagnál is kisebb, az ilyen részvényt deffenzívnek nevezik.*

5. fejezet

Emlékeztető a valószínűségszámítás alapjaira

Miután a későbbi fejezetekben számos valószínűségszámítási fogalomra lesz szükségünk ezeket egy-egy önálló fejezetben röviden összefoglaljuk. Megtehetnénk ezt egyetlen nagy definiciókat és állításokat tartalmazó fejezetben, de e helyett inkább azt a megoldást választottuk, hogy több kisebb fejezetben bővítjük e fogalmak körét. Mindíg csak annyival amennyit az új pénzügyi modell bevezetése igényel.

5.1. Definíció. *Valószínűségi mező az* $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ *hármas, ha* Ω *nem üres halmaz,* $\mathcal{F}$ $\sigma-$*algebra az* Ω *részhamlazainak, eseményeknek egy összesége, elemeit nevezzük mérhető halmazoknak, mérhető eseményeknek.* $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ *halmazfüggvény, mérték, amelyre* $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1, P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, *ha* $A_i \in \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \emptyset$ *minden* $i \neq j$*-re.*

5.2. Definíció. *Egy* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvényt valószínűségi változónak nevezünk, ha minden* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *valós Borel-halmazra* $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, *azaz a Borel-halmazok ősképei mérhetőek.*

Ez utóbbi feltevés teszi lehetővé, hogy "meg tudjuk, mondani", hogy a valószínűségi változó milyen valószínűséggel esik egy Borel halmazba speciálisan a $(-\infty, x)$ intervallumba.

5.3. Definíció. *Ha* X *valószínűségi változó, akkor* P_X *az* X *eloszlása, ha*

$$P_X(X \in B) = P\left(X^{-1}(B)\right).$$

Eloszlásfüggvénye

$$F(x) = P_X(X < x)$$

sűrűségfüggvénye pedig f_X, ha F abszolút folytonos, azaz ha létezik olyan f_X, amelyre

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\, dy.$$

5.4. Definíció. *Az X valószínűségi vektor változó, ha $X = (X_1, ...X_k)$ vektor és minden "koordinátája" valószínűségi változó. Eloszlása ismert, ha összes véges dimenziós együttes eloszlásuk adott, azaz ha minden k-dimenziós $B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^k\right)$ Borel-halmazra a P_X definiált a*

$$P_X(X \in B) = P\left(X^{-1}(B)\right)$$

összefüggés által.

5.5. Definíció. *Sztochasztikus folyamat a valószínűségi változók egy $\{X_t : t \in T\}$ családja, ha azok ugyanazon $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ felett értelmezettek és összes véges-dimenziós együttes eloszlásuk azaz $(X_{t_1}, X_{t_2}...X_{t_k})$ együttes eloszlása minden $k \geq 1 - re$ adott.*

5.6. Definíció. *Az X valószínűségi változó várható értéke*

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega)\, P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(y)\, dy.$$

utóbbi kifejezésnél feltéve, hogy f_X sűrűségfüggvény létezik és általában feltéve, hogy $E(X) = \int_{\Omega} |X(\omega)|\, P(d\omega)$ létezik. Diszkrét esetben

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

5.7. Definíció. *Az X valószínűségi változó szórásnégyzete*

$$\sigma^2(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

feltéve, hogy a szóban forgó várható értékek léteznek.

Mint jól ismert

$$\sigma^2(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2.$$

5.8. Definíció. *Legyen $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ Kolmogorov féle valószínűségi mező. Legyen $B \in \mathcal{F}, P(B) \neq 0$, ekkor legyen egy $A \in \mathcal{F}$ esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűsége*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

5.1. Lemma. *Legyen* $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ *Kolmogorov féle valószínűségi mező. Legyen* $B \in \mathcal{F}, P(B) \neq 0$, *ekkor* $\{B, \mathcal{F}|_B, P(.|B)\}$ *szintén Kolmogorov féle valószínűségi mező és* $P(.|B)$ *valószínűségi mérték.*

5.2. Lemma. *(Borell-Cantelli) Legyenek* A_n *tetszőleges események és*

$$A_\infty = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} A_i \tag{5.1}$$

akkor

$$P(A_\infty) = 0, \tag{5.2}$$

ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty. \tag{5.3}$$

Az állítás azt jelenti, hogy a (5.3) beli összeg végességéből következik, hogy az A_n események közül csak véges sok következhet be. Az állítás erősebb változatát teljesen független eseményekre lásd Rényi [**?**].

5.1. Bizonyítás. *Legyen*

$$B_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i.$$

Minden n*-re*

$$P(A_\infty) \leq P(B_n) \leq \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i)$$

de (5.3) *miatt a jobb oldal tart nullához, ha* n *tart végtelenhez.*

6. fejezet

Ami közös a lóversenyben és tőzsdében

Ebben a fejezetben a lóverseny és a tőzsde viselkedésének közös vonásait vizsgáljuk az információ elmélet eszközeivel. Mindkét szintéren fogadók vannak, az egyik esetben a lovakra a másik esetben a részvényekre (azok hozamára) fogadnak a játékosok. Mint látni fogjuk, az egyik alapvető közös vonás, hogy az árfolyamot maguk a játékosok alakítják ki. Egy adott futam, illetve tőzsdenap esetén a fogadásokat a mindenki által ismert korábbi teljesítmények alapján teszik meg a játékosok. A második közös vonás, hogy a játékosok a vagyonukat (játékra szánt pénzük) valamilyen meggondolás alapján szétosztják az egyes lovakra tehető tétek (egyes részvények) között, portfóliót alakítanak ki. Ahhoz, hogy a játék elemzéséhez kezdjünk először felidézzük az információelmélet néhány fogalmát.

6.1. Alapok

6.1. Definíció. *Legyen X diszkrét valószínűségi változó p_i eloszlással. Az X valószínűségi változó entrópiája*

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{\infty} p_i \log p_i.$$

6.2. Definíció. *Legyen X és Y diszkrét valószínűségi változó $p(x,y)$ együttes eloszlással. Az Y valószínűségi változó $X-re$ vonatkozó feltételes entrópiája*

$$H(Y|X) = -\sum_{x} p(x) H(Y|X=x),$$

ahol

$$H\left(Y|X=x\right)=-\sum_{x}p\left(y|x\right)\log\left(y|x\right).$$

Ez részletesebben azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} H\left(Y|X\right) &= -\sum_{x}p\left(x\right)\sum_{y}p\left(y|x\right)\log p\left(y|x\right)= \\ & -\sum_{x}\sum_{y}p\left(x,y\right)\log p\left(y|x\right). \end{aligned}$$

6.3. Definíció. *Két eloszlás p,q **relatív entrópiáján** vagy **távolságán** a következőt értjük. Legyen egy X diszkrét valószínűségi változó értékkészlet halmaza Q. A két eloszlás egyaránt Q-n legyen értelmezve, azaz $p,q:Q\rightarrow[0,1]$.*

$$D\left(p||q\right)=\sum_{x\in Q}p\left(x\right)\log\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}=E_p\left(\log\frac{p\left(X\right)}{q\left(X\right)}\right).$$

Miért távolságfogalom ez? Belátjuk, hogy $D\left(p||q\right)\geq 0$. Ugyanakkor a távolság elnevezés félrevezető. mert D nem szimmetrikus és nem igaz rá a háromszög egyenlőtlenség. Idézzük fel a Jensen egyenütlenség idevágó alakját.

6.4. Definíció. *Legyen $f\left(x\right)$ az $[a,b]$ intervallum felett konvex függvény, azaz minden $x_1,x_2\in[a,b]$-re és $\lambda\in[0,1]$-re*

$$\lambda f\left(x_1\right)+\left(1-\lambda\right)f\left(x_2\right)\geq f\left(x_1\lambda+\left(1-\lambda\right)x_2\right).$$

Azt mondjuk, hogy szigorúan konvex, ha az egyenlőség, csak $\lambda=0$ illetve $\lambda=1$ esetén áll fenn.

6.1. Tétel. *(Jensen egyenlőtlenség) Tegyük fel hogy f konvex függvény, X valószínűségi változó. Akkor*

$$Ef\left(X\right)\geq f\left(EX\right) \tag{6.1}$$

továbbá ha f szigorúan konvex, akkor a (6.1) *egyenlőtlenségben pontosan akkor áll egyenlőség, ha $X=EX$ 1-valószínűséggel.*

6.1. Bizonyítás. *A bizonyítást $|Q|-re$ vonatkozó indukcióval végezzük. Ha $|Q|=2$ akkor*

$$p_1f\left(x_1\right)+\left(1-p_1\right)f\left(x_2\right)\geq f\left(p_1x_1+\left(1-p_1\right)x_2\right)$$

közvetlenül következik a konvexitásból $\lambda = p_1$-el. tegyük ezután fel, hogy $k-1$-re már beláttuk az állítást. Ekkor legyen $q_i = \frac{p_i}{1-p_k}$, ha $i = 1, ...k-1$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} p_i f(x_i) &= p_k f(x_k) + \sum_{i=1}^{k-1} p_i f(x_i) \\
&= p_k f(x_k) + (1-p_k) \sum_{i=1}^{k-1} q_i f(x_i) \\
&\overset{Indukció}{\geq} p_k f(x_k) + (1-p_k) f\left(\sum_{i=1}^{k-1} q_i x_i\right) \\
&\overset{k=2}{\geq} f\left(p_k x_k + (1-p_k)\sum_{i=1}^{k-1} q_i x_i\right) \\
&= f\left(p_k x_k + \sum_{i=1}^{k-1} p_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k} p_i x_i\right).
\end{aligned}$$

Az állítás második részének igazolását az olvasóra bízzuk.

6.2. Tétel. *Legyen p, q két eloszlás Q felett, akkor*

$$D(p||q) \geq 0.$$

6.2. Bizonyítás. *Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy minden $x \in Q$-ra $p(x) > 0$.*

$$\begin{aligned}
-D(p||q) &= -\sum_x p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \\
&= \sum_x p(x) \log \frac{q(x)}{p(x)} \\
&\overset{Jensen}{\leq} \log \sum_x p(x) \frac{q(x)}{p(x)} \\
&= \log \sum_x q(x) \\
&= \log 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Speciálisan $D = 0$ akkor és csak akkor, ha $p = q$.

6.1.1. Láncszabályok

6.3. Tétel.

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$$

6.3. Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
H(X,Y) &= -\sum\sum p(x,y)\log[p(x,y)] \\
&= -\sum\sum p(x,y)\log[p(y|x)\,p(x)] \\
&= -\sum\sum p(x,y)\log[p(x)] - \sum\sum p(x,y)\log[p(y|x)] \\
&= -\sum_x p(x)\log[p(x)] - \sum\sum p(x,y)\log[p(y|x)] \\
&= H(X) + H(Y|X)\,.
\end{aligned}$$

6.4. Tétel.

$$H(X_1, ...X_n) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i|X_1, ...X_{i-1})\,.$$

6.4. Bizonyítás. *Egyszerű kiterjesztése a két változóra érvényes összefüggésnek.*

$$H(X_1, X_2) = H(X_1) + H(X_2|X_1)$$

$$\begin{aligned}
H(X_1, X_2, X_3) &= H(X_1) + H(X_2, X_3|X_1) \\
&= H(X_1) + H(X_2|X_1) + H(X_3|X_1, X_2)
\end{aligned}$$

... .

6.5. Definíció. *Az X, Y valószínűségi változóknak a kölcsönös információja*

$$I(X;Y) = \sum_x\sum_y p(x,y)\log\frac{p(x,y)}{p(x)\,p(y)}.$$

Világos, hogy a kölcsönös információ szimmetrikus a két változóban. Vegyük észre továbbá, hogy

$$\begin{aligned}
I(X;Y) &= D(p(x,y)\,||p(x)\,p(y)) \qquad (6.2)\\
&= E_{p(x,y)}\left(\log\frac{p(x,y)}{p(x)\,p(y)}\right).
\end{aligned}$$

Igaz továbbá, hogy

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)\,, \qquad (6.3)$$

ezért aztán az is igaz, hogy

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) \qquad (6.4)$$

6.1. Gyakorlat. *Igazoljuk, az* (6.2) – (6.4) *összefüggéseket.*

6.1. Következmény. *A 6.2 Tételben láttuk, hogy* $D(X||Y) \geq 0$, *ezért* (6.2)-*ból az is következik, hogy*

$$I(X;Y) \geq 0. \tag{6.5}$$

6.2. Következmény. *A* (6.5) *állításból és* (6.3)-*ből azonnal következik, hogy*

$$H(X) \geq H(X|Y)$$

azaz a feltétel csökkenti az entrópiát.

6.2. Fogadás a lóversenyen

Ebben a részben két jelenségre szeretnénk rávilágítani. Szoros kapcsolat van a befektetés növekedési rátája és az entrópia növekedési rátája között. Pontosabban az igaz, hogy összegük állandó. Ennek belátása során azt is látni fogjuk, hogy az információ értéke éppen lóverseny és a benntfentes információ közötti kölcsönös információ pénzbeli értékével azonos.

Mielőtt elmélyedünk a "lovi" rejtelmeiben, tisztázzuk, hogy mi is az entrópia növekedési ráta.

6.6. Definíció. *Legyen* $X_i \in Q$ *valószínűségi változó sorozat, azaz egy* $\mathcal{X}$ *diszkrét idejű sztohasztikus folyamat. A* $\mathcal{X}$ *folyamat entrópia növekedési rátája*

$$H(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1, X_2, ...X_n).$$

6.1. Megjegyzés. *Emlékeztetünk arra, hogy egy* $\mathcal{X}$ *stabilis Markov lánc esetén van* μ_i *stacionárius eloszlás és ebben az esetben*

$$H(\mathcal{X}) = -\sum_{i,j} \mu_i p_{i,j} \log p_{i,j}$$

6.2.1. A lóverseny fogadás szabályai

Tegyük fel, hogy m lovat futtatnak a versenyen és annak a valószínűsége, hogy az i-edik ló nyer p_i, ebben az esetben a nyeremény o_i 1 font tét esetén, nulla font a nyereség, ha veszít. A font pénznemet azért használjuk e helyütt, mert a lóverseny és különösen annak itt leírt szabályai Angliából származnak.

Két módon lehet a fogadást leírni. Az első "a-t 1-ért" a második "b-re 1-et" rendszerű. Ez a következőt jelenti. Az első azt jelenti, hogy a játékos a verseny előtt 1 fontot tesz le a fogadáskor és a fontot zsebel be a verseny után, ha a lova nyer, egyébként nem kap semmit. Az utóbbi esetben a játékos a fogadást megköti a lóra a verseny előtt, azzal a feltétellel, hogy ha veszít a lova, akkor a verseny után fizet 1 fontot, ha nyer b-t tehet zsebre.

6.2. Gyakorlat. *Lássuk be, hogy az a-t 1-ért fogadás ekvivalens a b-re 1-et fogadással, ha $b = a - 1$.*

A továbbiakban ezért az a-t 1-ért szisztémában vizsgálódunk.

A továbbiakban feltesszük, hogy a játékos a rendelkezésre álló teljes vagyonát mindíg felteszi a lovakra. Legyen b_i a teljes vagyonnak az i-edik lóra eső hányada, azaz $0 \leq b_i \leq 1$ és

$$\sum_i b_i = 1$$

Ez azt jelenti, hogy a futam végén, $o_i b_i$ nyereményre tesz szert, ha az i-edik ló nyert, a többi tét elvész. Ennek az eseménynek a valószínűsége p_i. Időnként a $b(i) = b_i$ jelölést is használjuk majd.

A cél nyilván a vagyon maximalizálása. E vagyon valószínűségi változó. Csábító mindent feltenni a legesélyesebb lóra ($i = 1$) ekkor a várható vagyon $o_1 p_1$, de ugyanakkor "nagy a kockázat", megvan az esélye, hogy mindent elvesztünk (persze feltéve, hogy van valódi verseny, azaz $p_1 < 1$).

6.7. Definíció. *Legyen S_n a játékos vagyona az n-edik futam után. Legyen X_i az i-edik futamban a nyerő ló (sorszáma) és*

$$S(X) = b(X)\, o(X)$$

*a **vagyon növekmény** (hányados), ha az X ló nyer. Ekkor*

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} S(X_i)$$

vagy másképpen

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = S(X_n) = b(X_n)\, o(X_n),$$

$$S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \cdots \frac{S_2}{S_1} = S(X_n)\, S(X_{n-1}) \ldots S(X_1).$$

A **vagyon kettőződési ráta**, vagy rövidebben a **növekedési ráta**

$$W(b, p) = E \log S(X) = \sum p_k \log b_k o_k.$$

Az elnevezést a következő tétel teszi érthetővé.

6.5. Tétel. *Legyenek a futamok kimenetelei* $X_{1,}X_2,...$ *független azonos eloszlású valószínűségi változók, a közös eloszlás* $p(x)$. *Ekkor*

$$S_n \approx 2^{nW(b,p)}.$$

6.5. Bizonyítás. *A feltételből következik, hogy* $y_i = \log[S(X_i)]$*-k is független azonos eloszlású valószínűségi változók ezért a nagy számok gyenge törvénye szerint*

$$\frac{1}{n}\log S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log S(X_i) \to E\log S(X)$$

sztochasztikus értelemben. Ugyanakkor ezért

$$S_n = 2^{n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i} \simeq 2^{nE\log S(X)} = 2^{nW(b,p)}.$$

A tétel másik mondanivalója az, hogy a vagyon maximalizálásához elég a $W(b,p)$ növekedési rátát maximalizálni, a b azaz a portfólióvektor optimális megválasztásával.

1. Definition. *Jelölje*

$$W^*(p) = \max_b W(b,p) = \max_{b_i\geq 0,\sum b_i=1}\sum_{i=1}^{m}p_i\log b_i o_i$$

a növekedési ráta maximumát.

Az optimális b megkeresését a Lagrange féle multiplikátor segítségével végezzük el.

$$J(b) = \sum_{i=1}^{m}p_i\log b_i o_i + \lambda\sum b_i.$$

Elvégezve, rendre a $b_i - k$ szerinti deriválást

$$\frac{\partial J}{\partial b_i} = \frac{p_i}{b_i} + \lambda.$$

Ezt nullával egyenlővé téve

$$b_i = -\frac{p_i}{\lambda}$$

adódik. Figyelembe véve a $\sum b_i = 1$ megszorítást, $\lambda = -1$ azaz

$$b_i = p_i.$$

Tehát azt kaptuk, hogy $b = p$ a jelöltünk a maximumhelyre.

6.6. Tétel. *A $p-$vel arányos portfólió optimális. Azaz*

$$W^*(p) = \sum p_i \log o_i - H(p)$$

az optimális növekedési ráta és ezt a $b^* = p$ valósítja meg.

6.6. Bizonyítás. *A bizonyítás elkerüli a második deriváltak körülményes vizsgálatát. E helyett tekintsük a növekedési ráta formuláját.*

$$\begin{aligned} W(b,p) &= \sum p_k \log b_k o_k \\ &= \sum p_k \log \frac{b_k}{p_i} p_i o_k \\ &= \sum p_k \log o_k - H(p) - D(b||p). \end{aligned}$$

Viszont a (6.2) *Tétel szerint $D \geq 0$, ezért*

$$W(b,p) \leq \sum p_k \log o_k - H(p).$$

Egyenlőség pedig csak a $b = p$ esetben áll.

6.3. Következmény. *Tekintsük az $m = 2$ (két ló) esetét. Tegyük fel azt is, hogy $o_i = 2$-t 1-re tétekkel lehet fogadni. Az optimális fogadás $b_i = p_i, i = 1, 2$.*

$$W^*(p) = \sum p_i \log o_i - H(p) = 1 - H(p),$$

ezért

$$S_n = 2^{n(1-H(n))}.$$

Ha most azt is feltesszük, hogy az ajánlott fogadási feltételek (odsz-ok) korrektek, a teljes befizetett összeg felosztásra kerül, nincs pályabérlet, akkor

$$\sum \frac{1}{o_i} = 1.$$

Ebben az esetben jelölje $r_i = \frac{1}{o_i}$. Ez tulajdonképpen a boookmaker becslése p_i-re vonatkozóan. Ekkor

$$\begin{aligned} W(b,p) &= \sum p_i \log b_i o_i \\ &= \sum p_i \log \frac{b_i}{p_i} \frac{p_i}{r_i} \\ &= D(p||r) - D(p||b). \end{aligned}$$

Azaz a növekedési ráta nem más mint a p és r távolságából levonva a p és b távolságát. Azaz a játékos akkor keres a bolton, ha jobb becslést ad p-re (e becslését a b reprezentálja) mint a bookmaker adta r becslés.

6.4. Következmény. *Tekintsünk egy még speciálisabb esetet. Legyen most* $o_i = m$ *minden* i*-re. Ezek az odszok az egyenletes* p *esetén korrektek. Az optimális növekedési ráta*

$$W^*(p) = D\left(p||\frac{1}{m}\right) = \log m - H(p).$$

Ebben az esetben jól látható a növekedési ráta és az entrópia közötti kapcsolat, dualitás.

6.7. Tétel. *Megmaradási tétel. Egyenletes eloszlású korrekt odszok esetén*

$$W^*(p) + H(p) = \log m,$$

azaz a növekedési ráta és az entrópia összege állandó.

6.3. Az információ értéke

Most azt vizsgáljuk, hogy hogyan nő a fogadó vagyona, ha bizonyos információkkal rendelkezik a lovak teljesítményéről. Azt vizsgáljuk, mennyit ér ez az információ.

Az információ értékét a megmaradási tétel fényében egyszerűen úgy mérjük, hogy mennyivel növekszik a növekedési ráta az adott többletinformáció felhasználása révén. Természetesen a növekedést a kölcsönös információ határozza meg. Ezt látjuk be az alábbiakban.

Legyen megint m versenyző ló, azaz $X \in \{1, ...m\}$, és ennek eloszlása $p(x)$. Legyenek az odszok $o(x)$. Legyen a feltételes fogadási stratégia $b(x|y)$ az $Y = y$ háttér-információ esetén, feltéve persze, hogy $\sum b(x|y) = 1$. Az X, Y együttes eloszlása legyen $p(x, y)$, a feltétel mentes fogadási stratégia $b(x) \geq 0$, $\sum b(x) = 1$. Tekintsük a feltétel nélküli és a feltételes optimális növekedési rátát.

$$W^*(X) = \max_b \sum p(x) \log b(x) o(x),$$

$$W^*(X|Y) = \max_b \sum p(x, y) \log b(x|y) o(x).$$

Legyen

$$\Delta W = W^*(X|Y) - W^*(X).$$

Megjegyezzük, hogy a (X_i, Y_i) független azonos eloszlású valószínűségi változók alkotta lóverseny esetén a vagyon

$$2^{nW^*(X|Y)}$$

szerint növekszik ha van háttér-információ, és

$$2^{nW^*(X)}\text{-t}$$

követi a növekedése annélkül.

6.8. Tétel.

$$\Delta W = I(X;Y).$$

6.7. Bizonyítás. *Definíció szerint*

$$\begin{aligned} W^*(X|Y) &= \max_{b(x|y)} E\log S \\ &= \max_{b(x|y)} \sum p(x,y)\log o(x)\,b(x|y) \\ &= \sum p(x,y)\log o(x)\,p(x|y) \\ &= \sum p(x,y)\log o(x) - H(X|Y). \end{aligned}$$

Másrészt

$$W^*(X) = \sum p(x,y)\log o(x) - H(X),$$

ezért különbségük

$$\Delta W = H(X) - H(X|Y) = I(X;Y).$$

Ezzel tehát beláttuk, hogy a növekedési ráta egyenlő a futam és a háttér-információ közötti kölcsönös információ mennyiségével, azaz ha a háttér-információ 1 bittel nő, az megkettőzi a vagyont.

6.2. Megjegyzés. *Mint látni fogjuk, ez az állítás a tőzsde esetében úgy módosul, hogy ott a növekedési rátára felső becslés a kölcsönös információ. Egyenlőség csak a lóverseny egyszerűbb modelljében áll fent.*

6.4. A tőzsde információelmélete

Ebben a fejezetben levezetjük, hogy a vagyon növekedési rátája és a tőzsde entrópiája között is dualitás áll fenn. Megvizsgáljuk az optimális befektetési stratégiát és annak tulajdonságait. Ki fog derülni, hogy az nem csak átlagosan a legjobb, de aszimptotikusan is, továbbá bizonyos értelemben már egyetlen kereskedési ciklus esetében is jobb, mint bármely más stratégia, azaz portfólió.

6.4.1. A tőzsde modellje

Legyen a tőzsdén m részvény. Ezek árhányados vektora $X = (X_1, ..., X_m)$, $X_i \geq 0$. Ez azt jelenti, hogy a záró ár és a nyitó ár hányadosa pl. az 1. részvény esetén X_1. Megjegyezük, hogy X_i általában 1-hez közeli érték. Például az $X_1 = 1.03$ azt jelenti, hogy az 1. részvény 3%-t emelkedett az adott napon. Tegyük fel, hogy $X \sim F(x)$ eloszlású.

A portfólió vektora $b = (b_1, b_2, ... b_m)$, $b_i \geq 0, \sum b_i = 1$, azaz b az egyes részvények részarányát reprezentálja a teljes (tőzsdén forgatott) vagyonból. A napi vagyonváltozás tehát

$$S = b^t X = \sum b_i X_i = \sum b_i \frac{p_1(i)}{p_0(i)},$$

ahol $p_0(i)$ az i-edik részvény nyitó, $p_1(i)$ pedig a záró ára.

Célunk az S valószínűségi változó maximalizálása valamilyen értelemben. Korábban az első két momentum, illetve a várható érték és a szórás figyelembe vételével vizsgáltuk az optimumot a CAPM keretében. Pontosabban az $E(S)$ maximalizálására törekedtünk a szórásra vonatkozó valamilyen megkötést feltételezve. Ez a megközlelítés természetesen lényegesen egyszerűbb, mint az amelyik a teljes eloszlást figyeleme veszi. Az átlag-szórás alapú optimalizálás ugyan az $E(S)$-t maximalizálja, de ez csak hosszú távon éretik el, míg a tőzsdén naponta kell és lehet az optimális portfólióval játszani, erre viszont nem ad optimális javaslatot a CAPM. A napi hozamrátára vonatkozó optimumot a logaritmus várható értékének optimalizálásától remélhetjük.

Kezdjük egy kis aritmetikával.Jelölje V a befektetett összvagyont a nap elején, V^+ a nap végén. Az i-edik részvényben tartott vagyon V_i a nap elején, V_i^+ a nap végén. Ekkor

$$S = b^t X = \sum b_i X_i = \sum b_i \frac{V_i^+}{V_i} = \sum b_i \frac{V_i^+}{b_i V} = \sum \frac{V_i^+}{V} = \frac{V^+}{V},$$

azaz a $b^t X$ valóban a napi vagyonnövekmény.

Bevezetjük a növekedési rátát. A lóverseny modellel ellentétben itt az eloszlás F folytonos, ez picit átalakítja a képleteket.

6.8. Definíció. *A növekedési ráta*

$$W(b, F) = \int \log \left[b^t x\right] dF(x) = E\left(\log \left[b^t X\right]\right).$$

6.9. Definíció. *Az optimális növekedési ráta legyen*

$$W^*(F) = \max_b \int \log\left[(b^*)^t x\right] dF(x),$$

ahol $b_i \geq 0, \sum_{i=1}^m b_i = 1$. *Azt a* b^* *portfóliót, ami ezt a maximumot megvalósítja,* ***log-optimális*** *portfóliónak nevezzük.*

6.9. Tétel. *Legyenek* $X_{1,}X_2, ...$ *független azonos eloszlású valószínűségi vektor változók* $F(x)$ *eloszlással. Legyen*

$$S_n^* = \prod_{i=1}^m (b^*)^t X_i$$

a vagyon a naponta kiigazított konstans b^* *portfólió hoz létre. Ekkor*

$$\frac{1}{n} \log S_n^* \overset{1.v.}{\to} W^*$$

azaz 1*-valószínűséggel.*

6.8. Bizonyítás.

$$\frac{1}{n} \log S_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log (b^*)^t X_i \overset{1.v.}{\to} W^*$$

a nagy számok erős törvénye szerint.

6.1. Lemma. *A fenti definíciókkal élve* $W(b, F)$

1. *konkáv* b*-ben.*

2. *lineáris* F*-ben.*

3. $W^*(F)$ *konvex* F*-ben.*

6.9. Bizonyítás. *1.A logaritmus konkavitása miatt:*

$$\log\left[(\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2) x\right] \geq \lambda \log [b_1 x] + (1-\lambda) \log [b_2 x]$$

amiből következik az állítás.

2. Mivel $d(\lambda F_1 + (1-\lambda) F_2) = d\lambda F_1 + (1-\lambda) dF_2$, *ezért a*

$$W(b, F) = \int \log b^t x dF(x)$$

integrál lineáris F-ben, így W is az.

3. Legyen F_1 és F_2 két eloszlás és W_1^*, W_2^* illetve b_1^*, b_2^* az optimális növekedési ráta rájuk nézve, illetve az azt megvalósító portfóliók.

$$W^*\left(\lambda F_1 + (1-\lambda) F_2\right) = W\left(b_\lambda^*, \lambda F_1 + (1-\lambda) F_2\right)$$

ahol b_λ^* a $\lambda F_1 + (1-\lambda) F_2$ kevert eloszláshoz tartozó optimális portfólió. Ekkor 2. szerint

$$\begin{aligned} & W\left(b_\lambda^*, \lambda F_1 + (1-\lambda) F_2\right) \\ = \; & \lambda W\left(b_\lambda^*, F_1\right) + (1-\lambda) W\left(b_\lambda^*, F_2\right) \\ \leq \; & \lambda W^*\left(F_1\right) + (1-\lambda) W^*\left(F_2\right). \end{aligned}$$

Tehát W^* alúlról konvex.

6.2. Lemma. *Az egy adott $F-$re vonatkozó log-optimális b^* portfóliók B^* halmaza konvex.*

6.10. Bizonyítás. *Legyen $b_1^*, b_2^* \in B^*$ két log-optimális portfólió. A 6.1 Lemma 1. állítása szerint*

$$W\left(\lambda b_1^* + (1-\lambda) b_2^*, F\right) \geq \lambda W\left(b_1^*, F\right) + (1-\lambda) W\left(b_2^*, F\right),$$

ami azt jelenti, hogy $\lambda b_1^* + (1-\lambda) b_2^*$ is optimális, azaz eleme B^*-nak.

6.5. A log-optimális portfólió Kuhn-Tucker féle karakterizációja

Hasonlóan a CAPM modellhez, itt is egy konkáv függvény konvex halmaz feletti optimalizálási feladatot kell megoldani. A lóverseny esetétől eltérően most nem konstruáljuk meg a szélsőértéket, hanem megsejtjük azt majd ellenőrizzük, hogy valóban optimális-e.

6.10. Tétel. *Legyen egy $b.$ portfólió akkor és csak akkor maximalizálja $W(b, F)$-t ha*

$$E\left(\frac{X_i}{b^t X}\right) : \begin{cases} 1 & ha\ b_i > 0 \\ \leq 1 & ha\ b_i = 0 \end{cases}.$$

6.11. Bizonyítás. *Mivel $W(b) = E \log b^t X$ konkáv, amikor a b befutja a B^* konvex halmazt, azaz szimplexet, akkor b^* akkor és csak akkor lehet* *optimális, ha $W(b)$-nek az iránymenti deriváltja a b^* pontban valamely b irányban nem pozitív (ez a Kuhn-Tucker feltétel). Azaz ha*

$$b_\lambda = \lambda b + (1-\lambda) b^*$$

akkor

$$\frac{d}{d\lambda} W(b_\lambda)|_{\lambda=0} \leq 0, \tag{6.6}$$

ellenkező esetben ugyanis ha pozitív, akkor volna olyan b_λ $\lambda > 0$ portfólió vektor, amire $W(b_\lambda) > W(b^*)$ lenne, ami ellentmond az optimalitásnak. A (6.6) képlet tovább egyszerüsíthető, $\lambda = +0$-ban

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} W(b_\lambda)|_{\lambda=0} &= \frac{d}{d\lambda} E \log b^t X|_{\lambda=0} \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} E \log \frac{\lambda b^t X + (1-\lambda)(b^*)^t X}{(b^*)^t X} \\
&= E \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \log \frac{\lambda b^t X + (1-\lambda)(b^*)^t X}{(b^*)^t X} \\
&= E \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \log \left[1 + \lambda \left(\frac{b^t X}{(b^*)^t X} - 1\right)\right] \\
&= E\left(\frac{b^t X}{(b^*)^t X}\right) - 1.
\end{aligned}$$

A limesz és a várható érték felcserélhető mert a szóban forgó kifejezés felülről korlátos. Így azt kaptuk, hogy

$$E\left(\frac{b^t X}{(b^*)^t X}\right) - 1 \leq 0$$

minden b-re. Két esetet kell vizsgálni. Ha a $b \to b^*$ vektor a szimplexen belül meghosszabbítható a b^*-n túl is akkor a kétoldali derivált eltűnik, azaz egyenlőség kell hogy fent álljon. Ha a $b \to b^*$vektor meghoszabbítása kivezet a szimplexből, akkor elegendő az egyenlőtlenség. Ezzel megkaptuk az állítást.

2. Figure.

3. Figure.

6.11. Tétel. *Legyen $S^* = (b^*)^t X$ a log-optimális portfólió generálta véletlen vagyon, $S = (b)^t X$ pedig egy másik b által generált vagyon. Ekkor*

$$E\frac{S}{S^*} \leq 1 \tag{6.7}$$

és fordítva, ha (6.7) minden b-re, akkor

$$E\log\frac{S}{S^*} \leq 0. \tag{6.8}$$

Azaz rövidebben

$$E\frac{S}{S^*} \leq 1 \text{ minden } S\text{-re} \Longleftrightarrow E\log\frac{S}{S^*} \leq 0 \text{ minden } S\text{-re}. \tag{6.9}$$

6.12. Bizonyítás. *A 6.10 Tétel szerint, ha b^* log-optimális portfólió, akkor minden $i-re$*

$$E\left(\frac{X_i}{(b^*)^t X}\right) \leq 1. \tag{6.10}$$

Szorozzuk meg ezt az egyenlőtlenséget b_i-vel majd összegezzünk i-re.

$$\sum b_i E\left(\frac{X_i}{(b^*)^t X}\right) \leq \sum b_i \leq 1.$$

Viszont a baloldal

$$\sum b_i E\left(\frac{X_i}{(b^*)^t X}\right) = E\left(\frac{\sum b_i X_i}{(b^*)^t X}\right) = E\frac{S}{S^*},$$

azaz (6.10) ekvivalens az

$$E\frac{S}{S^*} \leq 1$$

egyenlőtlenséggel. Az állítás megfordítása a Jensen egyenlőtlenségből következik.

$$E\log\frac{S}{S^*} \leq \log E\frac{S}{S^*} \leq \log 1 = 0.$$

A tétel tehát azt igazolja, hogy a log-optimalitás ekvivalens a vagyonnövekedés optimalizálásával, azaz a napi gyarapodási hányados átlagának maximalizálásával. A rövid távú optimumokra később, játékelmélei megközelítésben fogunk visszatérni.

A Kuhn-Tucker karakterizáció másik következménye az, hogy az átlagos vagyonmegoszlás az egyes részvények között a log-optimális portfólió esetében változatlan. Ez a következő átalakításból látható be.

$$E\left(\frac{W_i^+}{W^+}\right) = E\left(\frac{b_i^* X_i}{(b^*)^t X}\right) = b_i^* E\left(\frac{X_i}{(b^*)^t X}\right) = b_i^*.$$

Mert $E\left(\frac{X_i}{(b^*)^t X}\right) = 1$ ha $b_i^* \neq 0$ a Kuhn-Tucker kritérium miatt, illetve ha $b_i^* = 0$ akkor az állítás triviális. Azaz a nap végén a vagyonarányok várható értéke egyenlő a nap kezdeti arányokkal.

6.6. A log-optimális portfólió asszimptotikus optimalitása

Ebben az alfejezetben belátjuk, a címbeli optimalitást és azt, hogy semmilyen más befektetési stratégia nem dominálja azt.

Legyenek $X_1, X_2, ...$ független azonos eloszlású valószínűségi változók $F(x)$ eloszlással. Legyen $S_n = \prod_{i=1}^{n} b_i^t X_i$ az n-edik nap végén a vagyon. $W^* = \max_b W(b, F) = \max_b E \log b^t X$. Az optimális portfólióval szembeállított portfóliók esetében megengedjük, hogy a részvények korábbi teljesítményétől függjön, de természetesen a jövőtől független. A definícióból azonnal következik az alábbi lemma.

6.3. Lemma. *Legyen S_n^* a log-optimális portfólió hatására kialakuló vagyon az n-edik nap végére független azonos eloszlású részvényeket feltételezve. Legyen S_n valamely más stratégia által kialakított vagyon. Ekkor*

$$E \log S_n^* = nW^* \geq E \log S_n.$$

6.13. Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\max_b E \log S_n &= \max_b E\left(\sum_{i=1}^{n} \log b_i^t X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \max_b E\left(\log b^t\left(i | X_1, ..X_{i-1}\right) X_i\right) \overset{fgtl.}{=} \sum_{i=1}^{n} E \log W^* \\
&= nW^*.
\end{aligned}$$

Ez egyben azt is helenti, hogy

$$S_n^* = 2^{nW^*}.$$

6.12. Tétel. *(A log-optimális portfólió asszimptotikus optimalitása.) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók $F(x)$ eloszlással. Legyen továbbá b^* a log-optimális portfólió valamint*

$$S_n^* = \prod_{i=1}^{n} (b^*)^t X_i,$$

hasonlóan, S_n egy tetszőleges b_i portfólió sorozathoz tartozó vagyon. Ekkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{S_n}{S_n^*} \le 0 \quad \text{1-valószínűséggel.}$$

6.14. Bizonyítás. *A Kuhn-Tucker kritérium következménye, pontosabban a 6.11 Tétel miatt minden $1 \le i \le n$-re) (áttérve X_i-re a napi árhányadosok vektorának sorozatára)*

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} b_i^t X_i.$$

$$E\frac{b^t X_i}{(b^*)^t X_i} \le 1,$$

ezért a függetlenség miatt

$$E\frac{S_n}{S_n^*} \le 1.$$

A Markov egyenlőtlenség alapján

$$P(S_n > t_n S_n^*) = P\left(\frac{S_n}{S_n^*} > t_n\right) \le \frac{1}{t_n},$$

azaz

$$P\left(\frac{1}{n}\log\frac{S_n}{S_n^*} > \frac{1}{n}\log t_n\right) \le \frac{1}{t_n}.$$

Legyen $t_n = n^2$ és összegezzünk $n-re$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{1}{n}\log\frac{S_n}{S_n^*} > \frac{2\log n}{n}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

A Borell-Cantelli lemma szerint viszont ebből az következik, hogy az

$$A_n = \left\{\frac{1}{n}\log\frac{S_n}{S_n^*} > \frac{2\log n}{n}\right\}$$

eseményekből csak véges sok következik be, pontosabban

$$P\left(\textit{végtelen sok } A_n \textit{ bekövetkezik}\right) = 0.$$

Azaz a tőzsde majdnem minden realizációjára (x_i sorozatára) van olyan (esetleg igen nagy) N, hogyha $n > N$, akkor

$$\frac{1}{n}\log\frac{S_n}{S_n^*} < \frac{2\log n}{n}$$

azaz

$$\limsup \frac{1}{n}\log\frac{S_n}{S_n^*} \le 0.$$

6.7. A háttér-információ és a növekedési ráta

A lóverseny esetében kiderítettük, hogy menyit ér a háttér-információ. Mint láttuk azt a kölcsönös információ mennyiség határozza meg. Ebben az alfejezetben ugyanezt a jelenséget vizsgáljuk a tőzsde vonatkozásában.

6.13. Tétel. *Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, közös $F(x)$ eloszlással, amelynek van $f(x)$ sűrűségfüggvénye. Legyen b_f^* az ehhez tartozó log-optimális portfólió. Legyen egy másik eloszlás sűrűségfüggvénye g, hozzá tartozó log-optimális portfólió pedig b_g^*. Ekkor*

$$\Delta W = W\left(b_f^*, F\right) - W\left(b_g^*, F\right) \le D\left(f||g\right).$$

6.15. Bizonyítás. *Definíció szerint*

$$\begin{aligned}
\Delta W &= \int f(x)\log\left[\left(b_f^*\right)^t x\right]dx - \int f(x)\left[\log\left(b_g^*\right)^t x\right]dx \\
&= \int f(x)\log\left[\frac{\left(b_f^*\right)^t x}{\left(b_g^*\right)^t x}\right]dx \\
&= \int f(x)\log\left[\frac{\left(b_f^*\right)^t x}{\left(b_g^*\right)^t x}\right]\frac{g(x)}{f(x)}\frac{f(x)}{g(x)}dx \\
&= \int f(x)\log\left[\frac{\left(b_f^*\right)^t x}{\left(b_g^*\right)^t x}\right]\frac{g(x)}{f(x)}dx + D\left(f||g\right) \\
&\overset{Jensen}{\le} \log\left[\int f(x)\frac{\left(b_f^*\right)^t x}{\left(b_g^*\right)^t x}\frac{g(x)}{f(x)}dx\right] + D\left(f||g\right) \\
&\le \log\left[\int g(x)\frac{\left(b_f^*\right)^t x}{\left(b_g^*\right)^t x}dx\right] + D\left(f||g\right).
\end{aligned}$$

A b_g^* log-optimális portfólió a $g-$re nézve ezért a Kuhn-Tucker kritérium következményeként kapott (6.7) szerint

$$\int g(x)\frac{\left(b_f^*\right)^t x}{\left(b_g^*\right)^t x}dx = E_g\left(\frac{S}{S^*}\right) \leq 1,$$

azaz

$$\Delta W \leq \log\left[\int g(x)\frac{\left(b_f^*\right)^t x}{\left(b_g^*\right)^t x}dx\right] + D(f||g) \leq D(f||g).$$

6.14. Tétel. *Legyen Y a háttér-információ. Ekkor*

$$\Delta W \leq I(X,Y).$$

6.16. Bizonyítás. *Legyen $Y = y$ a háttér-információ realizációja. Ekkor a log-optimális befektető az $f(x|Y=y)$ ellenében játszik, illetve a szerint alakítja ki a log-optimális portfóliót. A 6.13 Tétel szerint*

$$\Delta W_{Y=y} \leq D(f(x|Y=y)||f(x)) = \int f(x|Y=y)\log\frac{f(x|Y=y)}{f(x)}dx.$$

Átlagolva y-ra.

$$\begin{aligned}\Delta W &\leq D(f(x|Y)||f(x)) = \int f(y)\int f(x|y)\log\frac{f(x|y)}{f(x)}dxdy \\ &= \int\int f(x|y)f(y)\log\frac{f(x|y)}{f(x)}\frac{f(y)}{f(y)}dxdy \\ &= \int\int f(x,y)\log\frac{f(x,y)}{f(x)f(y)}dxdy \\ &= I(X;Y).\end{aligned}$$

6.8. Stacionárius piacok

Az előző fejezet eredményei a független valószínűségi változók sorozatáról átvihetőek a realítást jobban tükröző stacionárius $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változó sorozatra. Legyen tehát $X_1, X_2, \ldots$ stacionárius valószínűségi vektor változó sorozat. Természetesen olyan befektetési stratégiákat vizsgálunk, amelyek csak a múlttól függnek. Azaz egy tetszőleges b portfólió vektor az i-dik napra $b_i = b(X_1, X_2 \ldots X_{i-1})$ az $X_1, X_2 \ldots X_{i-1}$ változók függvénye. A vagyon

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} b_i^t(X_1, X_2 \ldots X_{i-1})X_i.$$

Célunk most is $E\log S_n$ maximalizálása. Jelölje b_i^* a log-optimális portfóliót az i-edik napon. Azaz

$$\max_{b_1,b_2...b_n} E\log S_n = \sum_{i=1}^{n} \max_{b_i} E\left(\log b_i^t X_i\right)$$

Jelölje a napi maximális átlagos vagyon növekményt az előző napok feltétele melett

$$W^*\left(X_i|X_1,...X_{i-1}\right) = \max_{b_i} E\left(\log b_i^t X_i|X_1...X_{i-1}\right).$$

Amiről beszélünk az tulajdonképpen nem más mint a változó $F\left(x|x_1...x_{i-1}\right)$ melett egyetlen napra alkalmazott log-optimális portfólió amit az előző fejezetben ismertetett módon lehet karakterizálni, itt viszont a feltételek naponta változnak, tehát b_i^* naponta más és más.

Legyen

$$W^*\left(X_1,...X_n\right) = \max_{b_1,b_2...b_n} E\log S_n.$$

Vegyük észre, hogy igaz a következő láncszabály:

$$W^*\left(X_1,...X_n\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(\log\left(b_i^*\right)^t X_i|X_1...X_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} W^*\left(X_i|X_1,...X_{i-1}\right) \tag{6.11}$$

hiszen a vagyon optimális növekedési rátája nem más mint az egyes ráták összege, naponta optimalizálva.

Mivel a körülmények naponta változnak a növekedési ráta nem lehet állandó. Ez indokolja az következő definíció létjogosultságát.

6.10. Definíció. *Definiáljuk a növekedési rátát mint*

$$W_\infty^* = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}W^*\left(X_1,...X_n\right),$$

ha a limesz létezik.

6.15. Tétel. *Stacionárius piacon a növekedési ráta*

$$W_\infty^* = \lim_{n\to\infty} W^*\left(X_n|X_1,...X_{n-1}\right).$$

6.17. Bizonyítás. *A stacionaritás miatt, ha $n,m\geq 0$*

$$W^*\left(X_n|X_1,...X_{n-1}\right) = W^*\left(X_{n+m}|X_{m+1},...X_{n+m-1}\right)$$

de a többletinformáció nem csökkentheti a növekedési rátát, ezért

$$W^*\left(X_n|X_1,...X_{n-1}\right) = W^*\left(X_{n+m}|X_{m+1},...X_{n+m-1}\right) \leq W^*\left(X_{n+m}|X_1,...X_{n+m-1}\right)$$

azaz $W^*(X_n|X_1,...X_{n-1})$ *nem csökkenő ezért létezik limesze (esetleg végtelen). Felhasználva* (6.11) $-t$

$$W^*_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} W^*(X_1,...X_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} W^*(X_i|X_1,...X_{i-1})$$

és a Cesaro középre vonatkozó konvergencia tétel miatt

$$W^*_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} W^*(X_i|X_1,...X_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} W^*(X_i|X_1,...X_{i-1})$$

amit bizonyítani kelett.

A következő tétel a log-optimális portfólió asszimptotikus optimalitást mondja ki stacionárius piacokra.

6.16. Tétel. *Legyen* S_n^* *a múltra vonatkozó feltételes log-optimális portfólió által létrehozott vagyon,* S_n *pedig egy tetszőleges másik stratégia eredménye. Ekkor*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{S_n}{S_n^*} \leq 0.$$

6.18. Bizonyítás. *A Kuhn-Tucker kritériumot alkalmazzuk a lépésenkénti feltételes eloszlásokra és újra azt kapjuk, hogy*

$$E\frac{S_n}{S_n^*} \leq 1.$$

Innen a bizonyítás lépésről lépésre azonos a független változókra vonatkozóval csak azt minden egyes napra külön kell alkalmazni a feltételes várható értékre vonatkozóan majd.

Végül igaz a következő tétel az log-optimális növekedési ráta és log-optimális portfólió által létrehozott vagyon közötti kapcsolatra vonatkozóan.

6.17. Tétel. *Ha stacionárius piacon*

$$S_n^* = \prod_{i=1}^{n} (b_i^*)^t X_i$$

akkor

$$\frac{1}{n} \log S_n^* \to W^*_\infty.$$

1-valószínűséggel.

A bizonyítás az ekvipartició tételén alapszik, nem tárgyaljuk részletesen.

6.9. A log-optimális portfólió rövid távú optimalitása

Tekintsük újra X_1,X_2,... független azonos eloszlású valószínűségi változók által meghatározta piacot. Az előző fejezetekben az asszimptotikus optimalitást vizsgáltuk, most fix n-re szeretnénk a log-optimális portfólió dominanciáját kimutatni más portfóliókkal szemben. Mint azt a Kuhn-Tucker kritérium következményeként beláttuk

$$E\frac{S_n}{S_n^*} \leq 1.$$

ezért

$$P\left(S_n > tS_n^*\right) \leq \frac{1}{t}.$$

Ugyanakkor ebből nem következik a log-optimális portfólió dominanciája mindne $n - re$. Erre a következő egyszerű példa adható.

6.1. Példa. *Tekintsünk egy két részvényből álló piacot, összesen két lehetséges kimenetellel.*

$$(X_1, X_2) = \begin{cases} (1, 1+\varepsilon) & 1-\varepsilon \text{ valószínűséggel} \\ (1, 0) & \varepsilon \text{ valószínűséggel} \end{cases}.$$

Ilyen piacon a log-optimális portfólió a teljes vagyont az 1. részvényre allokálja, $b^* = (1, 0)$. Ugyanakkor az a befektető, aki teljes vagyonát a második részvénybe fekteti az $(1 - \varepsilon)$ valószínűséggel többet keres mint a log-optimális portfóliót alkalmazó.

6.3. Gyakorlat. *Ellenőrizzük, hogy a log-optimális portfólió valóban $b^* = (1, 0)$.*

A felmerült korlát, tehát szükségszerű. Ennek feloldására a játékelméletben szokásos módszert alkalmazzuk. Feltesszük, hogy a kezdeti feltételek kevertek.

6.18. Tétel. *Legyen S^* a log-optimális portfólió által létrehozott vagyon egyetlen nap végén, S pedig egy másik portfólió eredménye. Legyen U a $[0, 2]$-n egyenletes eloszlású X-től független valószínűségi változó. Legyen $V \geq 0$ pedig tetszőleges valószínűségi változó, amely független $X-$től és U-tól $EV = 1$ várható értékkel. Ekkor*

$$P\left(VS \geq US^*\right) \leq \frac{1}{2},$$

azaz ha U, V a piacon lévő teljes vagyon igazságos, véletlen elosztása a befektetők között, akkor a log-optimális portfóliónál jobb teljesítmény valószínűsége legfeljebb 1/2.

6.19. Bizonyítás.

$$P(VS \geq US^*) = P\left(\frac{VS}{S^*} \geq U\right) = P(W \geq U),$$

ahol $W = \frac{VS}{S^*}$. *Viszont*

$$EW = E\frac{VS}{S^*} = E(V)\,E\left(\frac{S}{S^*}\right) \leq 1$$

a függetlenség és a Kuhn-Tucker kritérium miatt. Legyen F *a* W *eloszlása.*

$$\begin{aligned}
P(W \geq U) &= \int_0^2 P(W \geq w)\, dF_U(w) \\
&= \int_0^2 P(W \geq w)\, \frac{1}{2} dw \\
&= \int_0^2 \frac{1 - F(w)}{2} dw \\
&\leq \int_0^\infty \frac{1 - F(w)}{2} dw \\
&= \frac{1}{2} EW \\
&\leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

7. fejezet

Bevezetés az opciós termékek árazásába

Ebben a fejezetben.a tőzsdén forgalmazott részvényekre vonatkozó opciós, határidős ügyletekkel foglalkozunk. Például X-nek van Zöld részvénye. Fizetünk X-nek 30 -t, azért, hogy egy év múlva 400-ért megvehessük tőle ezt a Zöld részvényt. Ha ez egy év múlva megéri nekünk (például 550 az aktuális árfolyama) akkor lehívjuk az opciót, megvesszük 400-ért a részvényt és 120 nyereséget realizálunk, ha azonnal eladjuk. Ha viszont egy év múltán az árfolyam 350, akkor nem hívjuk le az opciót, az üzleten 30-t veszítettünk.

Sok tisztázandó kérdés merül fel ennek az egyszerű ügyletnek a kapcsán. Reális-e a 30 opciós ár? Az opciós piac egyensúlyban van-e és milyen árak alkotják ezt az egyensúlyt? Hogyan lehet meghatározni az opció árát és milyen stratégiával kell játszani az opciós piacokon?

Azt fogjuk végül is találni, hogy az ismeretlen jövőbeli áralakulás ellenére létezik az opciós termékeknek is egyensúlyi ára, a piac lehet hatékony, lehet arbitrázs mentes és meg lehet konstruálni az opciós árat és a hatékony befektetési stratégiát, fedezeti portfóliót is.

7.1. Bevezetés

7.1. Definíció. *Az opció olyan szerződés, amely az egyik félnek jogot biztosít arra, hogy valamit a jövőben megtegyen, anélkül azonban, hogy erre kötelezné is.*

Konkrétan vételi és eladási opcióról, call és put opcióról fogunk először beszélni. Egy opciónak van egy kiírója, aki az ajánlatot teszi és vevője aki elfogadja, megveszi azt.

7.2. Definíció. ***Vételi opció a következő:*** *Az opció vevője jogot vásárol arra hogy egy év múlva megveheti az A részvényt 800-ért, ha akarja, nem vesszi meg, ha nem akarja. Ezért az opcióért most fizet 200-t, azaz az opció ára* $C_0 = 200$. *Ez egy vételi, azaz call opció, aminek ára 200, lehívható a lejáratkor az év végén, kötési ára 800. A 4 ábra ennek az opciónak kifizetés függvényét mutatja.*

4. ***Figure.***

Világos, hogy nem ér semmit az opció, ha a részvény árfolyama a lejáratkor 800 alatt van.

A vételi opcióval szemben áll az eladási opció (put option), lényege a következő. Most szerződést köt az opció vevője arra, hogy egy év múlva eladhat 800-ért egy A részvényt (ha akar). Ezért a jogért most fizet 200-t. Az opció értékét a részvény lejáratkor érvényes árfolyamának függvényében a 7.1 ábra mutatja.

5. Figure.

Vizsgáljuk meg, mi történik akkor, ha vételre és eladásra is jogot vásárolunk.

6. Figure.

Ekkor nyereségünk nem az árfolyamváltozás irányától fog függeni, hanem annak mértékétől. Tegyük fel, hogy 100 volt a vételi és az eladási opció értéke egyaránt. Ha az árfolyam 600 alá csökken vagy 1000 fölé növekszik, akkor az eladási joggal illetve a vételi joggal élve egyaránt nyereséget lehet realizálni.

Példánk fiktív, természetesen az opciós árak tartalmazzák a kockázat árát, ezért nincs szó arbitrázsról.

7.3. Definíció. *A lejárati nyereség a pozíció lejárati értéke csökkentve annak létrehozásának költségével (pontosabban annak az inflációval kiigazított értékével).*

1. Example. *Tegyük fel, hogy az inflációs ráta 5%. A vételi jog 190,48, ennek a lejáratakor tehát az értéke 200. A kiírási ár 800. Ha a lejáratkor az árfolyam 800 alatt van akkor a veszteség 200. Ha 800 és 1000 között van akkor szinté% n veszteséges az ügylet. Ha az árfolyam 1010 felett van akkor a nyereség az e feletti rész. Előbbit hívják nyereségküszöbnek.*

7. Figure.

1. Exercise. *Vezessük végig a nyereség alakulását a put opció és a call-put opciópár vásárlása esetére.*

Néhány megjegyzés az opciós piac jellegzetességeiről. Az egyszerű közvetítők összegyűjtik a kínálati és keresleti ajánlatokat és létrehozzák a párosítást, azaz a kötéseket. Az opciós piacon viszont általában többen szeretének jogot vásárolni , mint jogot eladni. Ezt a hiányt a **profik pótolják** úgy hogy szintetikus úton előállítják a szükséges opciókat. Ezek fedezeteképpen természetesen a megfelelő folyamatosan kiigazított portfóliót tartják különböző részvényekből (és esetleg opciókból).

Mint ebben a fejezetben látni fogjuk, ellentétben a részvény jelen árával (ami a jöbőbeli hozam-várakozást tükrözi) amit nem lehet kiszámolni, az opció ára egyértelműen meghatározható, csak kicsit bonyolultabban mint egy egyszerű diszkontálás.

7.2. Opciók tulajdonságai

7.2.1. Bevezetés: Opció és az opciós piac

A 7.1 definició túl általános, hiszen nem csak a pénzpiacokra alkalmazható, ezért leszűkítjük a részvényekre kötött opciókra. Általánosan az értékpapírpiaci opciókat a következő hatossal tudjuk jellemezni:

1. T *lejárati dátum* az a dátum, ameddig az opciós szerződés érvényes.

2. K *kötési vagy lehívási árfolyam* azaz előre rögzített árfolyam, amelyen a jogosult majd a jövőben élhet az opciós jogával.

3. *call (vételi) vagy put (eladási) opció*: a call részvények vételére míg a put részvények eladására biztosít jogot az előre biztosított K kötési árfolyamon.

4. C_t *vagy* P_t *opciós díj*: a díj, amelyet a jogot szerző fél fizet a kötelezettség vállaló számára, $t \in [0, T]$.

5. *opció típusa* számtalan fajta lehet, mi az európai és amerikai opciókkal foglalkozunk. Az opció európai, ha csak a lejárat napján T időpontban lehet lehívni; amerikai, ha a tulajdonos a lejárat napjáig bármikor élhet kereskedési jogával.

6. *részvény*, amelyre az opciót kötötték (S_t a t időpontban az adott részvény árfolyama)

A kifizetés függvények egyszerűbb kezelhetősége érdekében bevezették a következő jelölést:

7.4. Definíció.

$$x^+ = \begin{cases} x & ha\ x \geq 0 \\ 0 & ha\ x < 0 \end{cases}$$

Ennek segítségével felírva a call opció kifizetés függvénye $(S_T - K)^+$ míg a put opcióé $(K - S_T)^+$.

Egyetlen részvényhez sok opciós részpiac tartozik. Ezek a lejárat időpontjában és a lehívási árfolyamban különböznek. Általában 5 lehívási árfolyam és 4 lejárati időpont van, ez 20 részpiac eladási jogokra és ugyanennyi vételi jogokra.

7.2.2. Méltányos árak és fedezeti portfoliók

Az opciók (vagy más származtatott termék) esetében fontos szerepe van a kalkulációnak, szemben a részvények árfolyamának mozgásával. A derivatívák árfolyamát egyértelműen ki lehet számítani az adott részvényár mellett, azaz azt, hogy mekkora értéket rendeljünk az opcióhoz egy adott pillanatban. Ha az opciós díj ("belépés díja") túl alacsony,(pl: 0), akkor a vevő kockázatmentes profitra tehet szert, ha a lejárat napján a opciót lehívja. Míg ha túl magas a díj, akkor senki se vásárolná meg az opciót.

Az opció árának meghatározáshoz meg kell becsüljük azt az összeget, amelybe reálisan gondolkodva mindkét fél beleegyezik.

A *méltányos ár* jellemzésének egyik módja azon elsődleges termékekből, azaz részvényekből kötvényekből illetve bankbetétből (hitelből) álló portfolió adott pillanatban vett árának megadása, amely pontosan ugyanazt a jövedelmet nyújtja a lehívási időpontban, mint az opció. Ez az ár szigorúan véve csak az opció kiirójának méltányos, hiszen úgy határozza meg az árat, mint azt a legkisebb összeget, amely egy olyan részvényekből és kockázatmentes kötvényekből álló portfolió előállításához szükséges, amely reprodukálja az opció értékét a $T \in \mathbb{N}$ időpontokban. Általánosságban a vevő és eladó opciójának ára nem fog megegyezni, az egyezés csak a *teljes piaci modellekre* jellemző. Mi csak azzal az esettel foglalkozunk. Első feladatunk ennek a méltányos árnak a meghatározása, illetve az opció reprodukálásához szükséges *fedezeti portfolió* előállítása.

7.2.3. Put-call paritás

A put-call paritás elv szerint a vételi és az eladási opciók árai között szoros összefüggés van. Ebből az fog következni, hogy figyelmünket elég csak a call opciókra fordítanunk. Az ehhez szükséges döntő feltételezés, hogy a modellünk kizárja az arbitrázs (NA =nincs arbitrázs) lehetőségét, tehát nem lehet kockázatmentes profitot realizálni. Ez a feltételezés alapvető az opcióárazás elméletében, enélkül nem állhatna fenn a piaci egyensúly. Átmenetileg eltekintünk az inflációtól, a kockázatmentes hitel és betét kamata egyaránt 0.

7.1. Tétel (Put-call paritás elve). *Ha a piac arbitrázs mentes (NA) akkor*

$$C_t - P_t = S_t - K \tag{7.1}$$

$\forall\ t \in \mathbb{N} \cap [0,T]$*-re. Ahol* C_t *és* P_t *call opció és a put opció vételi ára* t *időpontban, az* S_t *a részvényára a* t *időpontban és* K *a kötési árfolyam.*

7.1. Bizonyítás. *A definícióból következik, hogy T lejáratkor teljesül a feltétel:*

$$C_T - P_T = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K,$$

hiszen ekkor ismert az S_T értéke.

Ahhoz, hogy ne keletkezzen arbitrázs a köztes időpontokban is fenn kell állnia a (7.1) *összefüggésnek. Ennek bizonyításához tekintsük a következő fedezeti stratégiát. Vegyünk $t \in \mathbb{N}$ időpontban egy részvényt S_t-ért, egy put opciót P_t-ért, írjunk ki és adjunk el egy azonos T lejáratú és K kötési árfolyamú call opciót C_t-ért. Mindkét opció a részvényünk eladásának lehetőségét hordozza magában. A poziciók elérésének költsége pedig*

$$C_t - P_t - S_t. \tag{7.2}$$

Két eset lehetséges $S_T > K$ vagy $S_T \leq K$, azaz a részvény ár magasabb vagy alacsonyabb, mint a kötési ár (egyenlőséget az összes eset lefedése miatt használjuk).
1.eset: $S_T > K \rightarrow$ Lehívják a call opciót, nekünk nem éri meg lehívni a put opciót így K összegű készpénzt realizáltunk.
2.eset: $S_T \leq K \rightarrow$ Nem hívják le a call opciót, nekünk viszont megéri lehívni a put opciót, amiért szintén K összegű készpénzt kapunk.
Összegezve S_T árától függetlenül K kockázatmentes profithoz jutunk a T időpontban. Mivel kezdeti költségünk (7.2) *volt, ezért a lejáratkor az egyenlegünk a*

$$\underbrace{C_t - P_t - S_t}_{\textit{költség}} \quad \underbrace{+K}_{\textit{nyereség}}$$

elemekből áll. Mivel kamatláb nulla, nem kell K-t diszkontálni (hiszen csak azonos időpontban lévő pénzek hasonlíthatunk össze), ezért minden $t \in \mathbb{N}$-re

$$C_t - P_t - S_t + K = 0$$

fenn kell hogy álljon. Ellenkező esetben, ha $C_t - P_t - S_t + K \neq 0$, akkor vagy a mi vagy a velünk üzletet kötő partner részéről lehetőség van kockázatmentes profit szerzésére, az általunk konstruált stratégiával.

A fenti tétel miatt nem kell külön foglalkoznunk az put opciókkal elég, ha call opciókkal számolunk.

7.3. Egyperiódusos opcióárzási modellek

Első közelítésben egy egyszerűbb modell csoport, az egyperiódusos modellek vizsgálatát végezzük el. E modell estén azt korlátozó feltételezést tesszük, hogy a piac csak *egyetlen kereskedési periódussal* rendelkezik, azaz T halmaz csupán két időpontot tartalmaz 0-t és T-t.

A részvény árának korrekt kezeléséhez be kell vezetni diszkontálás fogalmát. Ennek segítségével bármely t időpontban lévő pénz értékét kiszámolhatjuk (diszkontálhatjuk) bármely korábbi időpontba (általában a 0 időpontba). A diszkontálást felfoghatjuk a kamat megfordítottjának (nem előre haladunk az időben, hanem visszafelé).

A kamatláb legyen 10%, azaz $r = 0.1$ és a kamattényező: $1 + r = 1.1$. Ekkor a jövő évi 99 Ft diszkontáltja az adott évre 90 Ft.

7.5. Definíció. *A diszkonttényező jele β, értéke a kamattényező reciproka.*

$$\beta = \frac{1}{1+r}.$$

Ezáltal eleget tehetünk annak a a közgazdasági alapelvnek, mely megköveteli, hogy azonos időpontban történő kifizetéseket ("pénzek") hasonlítsunk össze.

Ezzel szorosan összefügg a biztosítási praxisból származó ekvivalencia elv.

> A termék (biztosítás, opció) ára fedezetet kell, hogy biztosítson a jövőbeli várható költségekre, pontosabban egyenlőnek kell lennie annak jelenértékével.

A részvény jövőbeli árfolyama (S_t, $t \in \{0, T\}$) egy valószínűségi változó a Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. H feltételes követelés szintén egy véletlen váltózóval adott, hiszen S_t függvénye. Mivel nem ismert S_t jövőbeli értéke ezért H kifizetés függvényt diszkontált várható értékével $E(\beta H)$-val becsülhetjük. A várható érték kiszámításához szükségünk van egyes elemi eseményekhez rendelt valószínűségekre, azaz egy *valószínűségi mértékre.* Érezhető, hogy néhány speciális esettől eltekintve ez a mérték függ az egyes befektetők kockázati preferenciáitól. A későbbiekben bevezetésre kerül majd a martingál tulajdonság, amely éppen egy ilyen preferencia független mérték létezésének szükséges feltétele.

Tegyük fel, hogy a részvény jövőbeli ára csupán két értéket vehet fel. A következő példával a méltányos ár és a fedezti portfolió közötti összefüggést mutatjuk be.

7.6. Definíció. *A fedezeti portfólió az értékpapírok olyan keveréke, amely a lejáratkor minden lehetséges esemény melett azonos értékű az opció kifizetési függvényével, azaz fedezi azt. Azaz ha H a kifizetési függvény, V_T a portfólió értéke a lejáratkor, akkor minden $\omega \in \Omega$ esetén*

$$H(\omega) = V_T(\omega)$$

vagy másszóval $H = V_T$ 1−valószínűséggel.

Legyen $r = 0$, tehát $\beta \equiv 1$. Tegyük fel, hogy a részvény ára a 0 időpontban $S_0 = 10$ (dollár) míg T lejárati időpontban csak két értékeket vehet fel.

$$S_T = \begin{cases} 20 & p \text{ valószínűséggel} \\ 7.5 & 1-p \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$$

A részvényre kiírt európai call opció kötési árfolyam pedig $K = 15$. A kifizetés függvény $H = (S_T - K)^+$. Az opció 5 dollár hasznot hoz, ha a részvény értéke 20 dollár, egyébként pedig nem kerül lehívásra, tehát 0-t. A részvény jövőbeli árának a valószínűségei $(p, 1-p)$ a befektető kockázatviselési hajlandóságától függenek. Tegyük fel, hogy a befektető(k) kockázatsemleges. Az ekvivalencia elv szerint a diszkontált jövőbeli árfolyam várható értéke meg kell, hogy egyezzen a részvény árával a 0 időpillanatban, különben a racionális kiíró illetve befektető között nem jönne létre üzlet. Jelölje Q a kockázat-semleges valószínűségi mértéket, q és $1-q$ a két valószínűséget. Az ekvivalencia elv és a kockázat-semlegeség következményeképpen a Q mértéket meghatározza a

$$E_Q(\beta S_T) = E_Q(S_T) = S_0$$

összefüggés. A fenti példára felírva a következő egyenletet kapjuk

$$10 = 20q + 7.5(1-q)$$

ebből $q = 0.2$ és $1 - q = 0.8$. A kifizetés függvény várható értéke Q mérték mellett:

$$E_Q(H) = 5q + 0(1-q) = 5q = 1$$

Ekkor az opció méltányos ára $C_0 = E_Q(H) = 1$.
Ezzel kiszámoltuk az opció méltányos árát, amelyről a fedezeti portfolió segítségével, amit meg fogunk konstruálni, belátjuk, hogy ez az egyetlen "racionális ár", illetve egyetlen ár ami melett nincs lehetősége az egyik vagy másik félnek arbitrázsra. Célunk egy készpénzből és részvényből álló fedezeti portfolió megkonstruálása, amely reprodukálja az opció végső értékét. A készpénzben tartott összeget jelölje η (dollár), míg a birtokolt részvény darabszámát Θ. A portfoliónk (vagyonunk) értéke a 0 és T időpillanatban:

$$\begin{aligned} V_0 &= \eta + \Theta S_0 \\ V_T &= \eta + \Theta S_T. \end{aligned}$$

Mivel $r = 0, \beta = 1$, ezért a készpénz értéke nem változik, így portfolió értékének változása csak a részvény árának ingadozásából adódhat. A portfolió értékének változását a *nyereség függvény* (gain) írja le.

$$V_T - V_0 = \Theta(S_T - S_0) = \Theta(\Delta S) = G$$

η és Θ megtalálásához az opció kifizetés függvényét kell megvalósítanunk a portfoliónkkal, $H_T = V_T$. A kifizetés függvény két értéket vehet fel a részvény árától függően:

$$\begin{aligned} 5 &= \eta + 20\Theta \\ 0 &= \eta + 7.5\Theta. \end{aligned}$$

Az egyenlet megoldása: $\eta = -3$, $\Theta = 0.4$. Kiszámolva a kezdeti vagyonunkat $V_0 = \eta + \Theta S_0 = -3 + 4 = 1$ kapunk, amely megegyezik a példa elején kiszámolt méltányos árral.

A fedezeti stratégia megvalósítása a következőképpen történik. A 0 időpontban eladjuk az opciót 1 dollárért, felvesszünk 3 dollár hitelt és a meglévő 4 dollár vagyonunkat részvénybe fektetjük, azaz vásárolunk 0.4 részvényt (A piacon megengedett a tört kereskedés). A T időpontban két eset lehetséges

1.eset $S_T = 20.$

$$\begin{array}{rrc} - & 5 & \text{opció lehívása } (K - S_T) \\ - & 3 & \text{a hitel visszafizetés} \\ + & 8 & \text{meglévő részvény eladása } (0.4 \cdot 20) \end{array}$$

A kereskedés nettó egyenlege 0.

2.eset $S_T = 7.5.$

$$\begin{array}{rrc} & 0 & \text{opciót nem hívjuk le} \\ - & 3 & \text{a hitel visszafizetés} \\ + & 3 & \text{meglévő részvény eladása } (0.4 \cdot 7.5) \end{array}$$

A kereskedés nettó egyenlege 0.

Így ha a opció értéke 1 dollár, akkor az opció eladása és a fedezti portfolió tartása pontosan kiegyenlíti egymást. Bármely, ettől eltérő ár arbitrázs lehetőséget jelentene a fenti fedezeti portfolióval. Ha $C_0 > 1$, akkor az opció eladásával és a portfolió megvételével kockázatmentesen szerezhetünk profitot. Ha $C_0 < 1$, akkor "helyet cserélve" vevővel szintén arbitrázs érhető el.

7.4. Általános egyperiódusos modell

Az előző példában a részvény jővőbeli ár csak két értéket vehetett fel, általánosítsuk ezt a modellt: a részvényár és a feltételes követelés legyen valószínűségi változó valamilyen véges valószínűségi mezőn $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. A β most már nem konstans 1, így már számolnunk kell vele. A β gyakori használata miatt, egyszerűsítő jelölést vezettek be a szakirodalomban, amelyet a továbbiakban gyakran használunk. Most nem binomiális modellt vizsgálunk, azaz $|\Omega| > 2$, ami azt jelenti, hogy a fenti egyenleteknél több megszorítás áll fenn, ezért általában nincs is megoldás. Található megoldás, ha megengedjük külső forrás bevonását is. ekkor az egyértelmű megoldást egy másodlagos elv bevezetésével szokás biztosítani. Minimalizáljuk a többletköltség (esetleg bevétel) szórását.

7.7. Definíció. *Jelölje X árfolyamat t időponbeli értékét X_t. Ekkor X_t 0 időpontba diszkontált értéke $\overline{X}_t$. Másképp X_t jelenértéke (Present Value) $\overline{X}_t$.*

$$\overline{X}_t = \beta^t X_t.$$

Mivel egyelőre csak egyperiódusos modellel foglalkozunk, ezért max. $t = 1$.

$$\overline{X}_1 = \beta X_1.$$

A feladatunk egy olyan fedezeti portfolió keresése, amely költségének szórása minimális. A költség a portfolió létrehozásának és fenntartásának költsége. Első lépésben felírjuk a fedezeti portfoliót feltételét, majd regressziós becsléssel minimalizáljuk a portfolió költségének szórását.

Legyen H tetszőleges kifizetési függvény, S_0, S_1 a részvény ára 0 és 1 időpillanatokban, V_0, V_1 a vagyonaink és β a diszkonttényező. A portfoliónak fedeznie kell a $H(\omega)$ költségét 1-ben. (Ehhez feltételezzük, hogy ismerjük az összes elemi eseményhez, ω-ákhoz tartozó valószínűségeket.)

$$H = V_1. \tag{7.3}$$

7.8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy piac teljes, ha minden H kifizetési függvényhez van fedezeti portfólió.*

Ezt diszkontálva:

$$\overline{H} = \overline{V}_1. \tag{7.4}$$

A (η, Θ) portfóliót keressük, η a készpénz összege, Θ részvény darabszáma a portfólióban. A 0 és 1 időpontban a vagyonunk:

$$\begin{aligned} V_0 &= \eta_0 + \Theta S_0 \\ V_1 &= \eta_1 + \Theta S_1. \end{aligned}$$

A (7.4) feltétel miatt a vagyonunknak a lejáratkor meg kell egyeznie a kifizetés függvénnyel, azaz

$$H = V_1 = \eta_1 + \Theta S_1.$$

Ahhoz, hogy ezt teljesíteni tudjuk azt az engedményt tesszük, hogy külső forrásokhoz is hozzáférhetünk, azaz 1-ben tehetünk be még készpénzt a bankba. Legyen ezért $\eta_1 \equiv H - \Theta S_1$, így kiegészítve a bent lévő összeget a részvényár változásának függvényébe létrehoztuk a fedezetet.

$$V_1 = \eta_1 + \Theta S_1 = H - \Theta S_1 + \Theta S_1 = H.$$

Ahhoz, hogy a fedezeti portfoliót adott H mellett pontosan meghatároztuk, V_0-t és Θ-t kell megválasztanunk. Ennek a költségét a (C_0, C_1) folyamattal jellemezzük. C_0 a portfolió létrehozásánának költsége:

$$C_0 = V_0 = \eta_0 + \Theta S_0.$$

C_1 -ben a költség C_0-tól a bankba pluszba betett (vagy kivett) pénz mennyiségében tér el:

$$C_1 \quad = \quad \beta^{-1} C_0 + \underbrace{\eta_1 - \beta^{-1}\eta_0}_{+\text{készpénz}}.$$

A minimalizáljuk 1 időpillanatban szükséges plusz pénzt. Ehhez bevezetjük a következő jelölést:

$$\Delta C = C_1 - C_0.$$

De ΔC közgazdasági értelemben hibás, mivel különböző időpontban lévő pénzeket hasonlít össze, azért hogy ezt kijavítsuk diszkontálni kell C_1-et.

$$\Delta\overline{C} = \beta C_1 - C_0.$$

Most már kiszámolhatjuk a diszkontált költségnövekmény $\Delta\overline{C}$ értékét:

$$\begin{aligned} \Delta\overline{C} &= \beta C_1 - C_0 = \beta\eta_1 - \eta_0 = \beta\left(V_1 - \Theta S_1\right) - \left(V_0 - \Theta S_0\right) \\ &= \beta H - V_0 - \beta\Theta S_1 + \Theta S_0 \\ &= \overline{H} - \left(V_0 + \Theta\Delta\overline{S}\right). \end{aligned} \tag{7.5}$$

azaz

$$\overline{H} = \Delta\overline{C} + \left(V_0 + \Theta\Delta\overline{S}\right), \tag{7.6}$$

mivel a feltevés szerint $\overline{H} = \beta V_1$. Minimalizáljuk a $\overline{H} = \beta V_1$ feltélel mellett $\Delta\overline{C}$ négyzetének várható értékét, a kockázati függvényt.

$$R \equiv E\left[\left(\Delta\overline{C}\right)^2\right].$$

A regressziós becslésből adódó értékek:

$$\Theta = \frac{Cov\left(\overline{H}, \Delta\overline{S}\right)}{\sigma^2\left(\Delta\overline{S}\right)}, \quad V_0 = E\left(\overline{H}\right) - \Theta E\left(\Delta\overline{S}\right). \tag{7.7}$$

Abban a speciális esetben, ha

$$E\left(\Delta\overline{C}\right) = 0,$$

azaz az átlagos diszkontált költség változatlan, **átlagosan fedez a portfólió**, akkor a Steiner formula szerint a szórásnégyzet megegyezik $\Delta\overline{C}$ négyzetének várható értékével :

$$\sigma^2\left(\Delta\overline{C}\right) = E\left(\left[\Delta\overline{C}\right]^2\right) - E\left(\Delta\overline{C}\right)^2 = E\left(\left[\Delta\overline{C}\right]^2\right) = R. \tag{7.8}$$

Vegyük a (7.5) egyenletnek a szórásnégyzetét:

$$\sigma^2\left(\overline{H}\right) = \sigma^2\left(\Delta\overline{C}\right) + \Theta^2\sigma^2\left(\Delta\overline{S}\right).$$

Az egyenletet átrendezve és (7.6) egyenletet behelyetesítve kapjuk

$$\begin{aligned}\sigma^2\left(\Delta\overline{C}\right) &= \sigma^2\left(\overline{H}\right) - \Theta^2\sigma^2\left(\Delta\overline{S}\right)\\ &= \sigma^2\left(\overline{H}\right) - \frac{Cov^2\left(\overline{H}, \Delta\overline{S}\right)}{\sigma^4\left(\Delta\overline{S}\right)}\sigma^2\left(\Delta\overline{S}\right)\\ &= \sigma^2\left(\overline{H}\right)\left[1 - \frac{Cov^2\left(\overline{H}, \Delta\overline{S}\right)}{\sigma^2\left(\overline{H}\right)\sigma^2\left(\Delta\overline{S}\right)}\right].\end{aligned}$$

Az (7.8) egyenlet miatt

$$R_{\min} = \sigma^2\left(\overline{H}\right)\left(1 - \rho^2\right)$$

ahol a ρ a $\overline{H}$ és $\Delta\overline{S}$ korrelációs együthatója. Világos, hogy a kockázat megint csak akkor tüntethető el, ha $|\rho| = 1$.

7.5. A binomiális modellek

Ebben a részében egy és több periódusos binomiális modellekről lesz szó.

7.9. Definíció. *Binomiális modellről beszélünk ha S árfolyamának a megváltozását egy binomiális fának tekintjük, azaz S_t egy olyan v. v., hogy*

$$\Pr\left[S_t = (1+b)\, S_{t-1}\right] = p$$
$$\Pr\left[S_t = (1+a)\, S_{t-1}\right] = 1-p,$$

ahol $a < r < b$, $0 < p < 1$.

Az $a < r < b$ feltételnek, azért kell fennálnia mert különben lehetőség lenne az arbitrázsra.

7.5.1. Egy periódusos binomiális modell

Azért egyperiódusos a modell, mert t értéke csak 0 vagy 1 lehet. Ezentúl feltesszük még, hogy nincs külső forrás, vagyis a játékot saját vagyonomból kell finanszírozni. Ez azt jelenti, hogy diszkontálva η_1-et η_0 kapjuk.

$$\eta := \eta_0 = \beta\eta_1.$$

Vagyonunk a 0 és 1 időpontokban:

$$\begin{aligned} V_0 &= \eta_0 + \Theta S_0 = \eta + \Theta S_0 \\ V_1 &= \eta_1 + \Theta S_1 = \beta^{-1}\eta + \Theta S_1. \end{aligned}$$

Számoljuk ki a diszkontált vagyon növekmény $\Delta\overline{V}$ értékét:

$$\overline{V_1} = \eta + \Theta\overline{S_1}$$

$$\Delta\overline{V} = \overline{V_1} - V_0 = \eta + \Theta\overline{S_1} - (\eta + \Theta S_0) = \Theta(\Delta\overline{S}). \tag{7.9}$$

Ezzel beláttuk, hogy portfoliónk változása csak a részvény árának változásától függ.

Bemutatjuk az egyperiódusos binomiális modellben létezik fedezeti portfolió és meg is konstruáljuk azt.

7.2. Tétel. *Adott egy binomiális modell:*

$$P\left[S_1 = (1+b)\,S_0\right] = p$$
$$P\left[S_1 = (1+a)\,S_0\right] = 1-p,$$

ahol $a < r < b$, $0 < p < 1$, *akkor minden* H *követelés estén van olyan* Θ *és* V_0, *hogy*

$$P\left[\overline{H} = V_0 + \Theta\Delta\overline{S}\right] = 1.$$

7.2. Bizonyítás. *Legyen a kifizetési függvény értéke* h^a, *illetve* h^b *aszerint, hogy a illetve b esemény következett be. Ha a következik be, akkor* $S_1^a = (1+a)S_0$, *ha b, akkor* $S_1^b = (1+b)S_0$. *A* Θ *és* V_0 *úgy kell megválasztani, hogy kielégítsék a következő egyenleteket:*

$$\begin{aligned} \overline{h^a} &= \beta h^a = \beta V_1^a = \beta(\eta_1 + \Theta S_1^a) = \eta_0 + \beta\Theta(1+a)S_0 \qquad (7.10)\\ &= (\eta_0 + \Theta S_0) + \Theta(\beta(1+a)S_0 - S_0) = \\ &= V_0 + \Theta\left[\beta\,(1+a)\,S_0 - S_0\right] \end{aligned}$$

$$\overline{h^b} = V_0 + \Theta\left[\beta\,(1+b)\,S_0 - S_0\right].$$

Vonjuk ki a két egyenletet egymásból:

$$\Theta = \frac{h^b - h^a}{(b-a)\,S_0} = \frac{h^b - h^a}{S_1^b - S_1^a} = \frac{\partial V}{\partial S}. \qquad (7.11)$$

Ez a portfólió értékváltozása a részvény értékének változásában mérve. Ezt hívják az opció deltájának. V_0 *kiszámításához helyetesítsük be a 7.11 egyenletet a 7.10 egyenletbe:*

$$\begin{aligned} V_0 &= \beta h^a - \frac{h^b - h^a}{S_1^b - S_1^a}\left(\beta S^a - S_0\right) \\ &= \beta\left(h^b\frac{\beta^{-1}S_0 - S_1^a}{S_1^b - S_1^a} - h^a\frac{S_1^b - \beta^{-1}S_0}{S_1^b - S_1^a}\right). \end{aligned}$$

Evvel megadtuk az egyértelmű portfóliót V_0, Θ, *amiből már kiszámolható* η_0. *Mivel van egyértelmű megoldás, ezért nincs kockázat, kockázati prémium és nincs arbitrázs sem.*

7.10. Definíció. *A stratégia önfinanszírozó, ha egy periódus után a következőt fedezi az előző végi vagyon, azaz*

$$\Theta_n S_n = \Theta_{n+1} S_n.$$

Fenti esetben a C költség függvény állandó (értéke éppen V_0) ezért a fenti stratégia önfinanszírozó ($\eta = V_0 - \Theta S_0$ volt).

7.1. Példa. Európai call. *Legyen* $H = (S_1 - K)^+$. $a < r < b$, $\beta^{-1} = 1 + r$. *Akkor*

$$h^b = (1+b)\, S_0 - K,$$
$$h^a = 0$$

ebből

$$\Theta = \frac{h^b - h^a}{(b-a)\, S_0} = \frac{(1+b)\, S_0 - K}{(b-a)\, S_0}$$

az opció értéke pedig

$$V_0 = \frac{1}{1+r} \frac{r-a}{b-a} \left[(1+b)\, S_0 - K\right]. \qquad (7.12)$$

Legyen

$$1 + \xi = \frac{S_1}{S_0}$$

és a ξ *szórása* $\sigma = (b-a)\sqrt{p\,(1-p)}$ *ez a részvény volatilitása.*

7.1. Megjegyzés. V_0 *nem feltétlenül nő, ha* σ *nő. Legyen* $r = 0$.

$$S_0 = K = 1$$
$$V_0 = -\frac{ab}{b-a}$$

ha

$$b = -a = 0.05$$

akkor $V_0 = 0.025$ *és* $\sigma^2 = 0.1p\,(1-p)$. *Viszont, ha*

$$b = 0.01, a = -0.19$$

akkor $V_0 = 0.0095$, *és* $\sigma^2 = 0.2p\,(1-p)$.

Áttérve a (η, Θ) stratégia jelölésre

$$\Theta\,(1+b)\, S_0 + \eta\beta^{-1} = h^b$$
$$\Theta\,(1+a)\, S_0 + \eta\beta^{-1} = h^a$$

megoldva: Θ ugyanaz,

$$\eta = \beta\frac{(1+b)\, h^a - (1+a)\, h^b}{b-a}.$$

Eddig p valószínűség tetszőleges volt. Belátjuk, hogy meg lehet úgy választani, hogy a "játék" igazságos legyen.

7.1. Állítás. *Az egyperiódusú, európai call binomiális modelljében mindig van $Q = \{p, 1-p\}$-nek olyan választása, hogy a játék igazságos, azaz*

$$E_Q\left(\overline{S}_1\right) = S_0$$

Másképpen fogalmazva, átlagosan nem változik a vagyon, mert a (7.9) *összefüggés szerint.*

$$E\left(\Delta\overline{V}\right) = \Theta E_Q\left(\triangle\overline{S}_1\right) = 0.$$

7.3. Bizonyítás. *Legyen*

$$q = \frac{\beta^{-1}S_0 - S^a}{S^b - S^a}, 1 - q = \frac{S^b - \beta^{-1}S_0}{S^b - S^a}$$

ekkor

$$V_0 = E_Q\left(\overline{H}\right)$$

mert

$$\begin{aligned}
E_Q\left(\overline{H}\right) &= \beta\left[qh^b + (1-q)\,h^a\right] \\
&= \beta\frac{\beta^{-1}S_0 - S^a}{S^b - S^a}h^b \\
&= \frac{1}{1+r}\frac{(1+r)\,S_0 - (1+a)\,S_0}{S^b - S^a}\left[(1+b)\,S_0 - K\right] \\
&= \frac{1}{1+r}\frac{r-a}{b-a}\left[(1+b)\,S_0 - K\right] \\
&= V_0
\end{aligned}$$

és hasonlóan a részvény diszkontált értékének várható értéke Q szerint

$$\begin{aligned}
E_Q\left(\overline{S}_1\right) &= \beta\left[qS^b + (1-q)\,S^a\right] \\
&= \beta\left[\frac{\beta^{-1}S_0 - S^a}{S^b - S^a}S^b + \frac{S^b - \beta^{-1}S_0}{S^b - S^a}S^a\right] \\
&= \beta\frac{\left(S^b - S^a\right)\beta^{-1}S_0}{S^b - S^a} = S_0,
\end{aligned}$$

azaz a játék igazságos.

7.6. Több periódusos binomiális modellek

7.6.1. Egy lépés

Legyen $t = 0, 1...T$ egész idők, S_t binomiálisan fejlődik

$$S_{t+1} = \begin{cases} (1+b)\, S_t & p \\ (1+a)\, S_t & (1-p) \end{cases}$$

a kamatláb r. H kifizetési függvény. Mi H értéke $T-1$ -ben?

8. Figure.

Most ez az egy periódus kezdete és van (η, Θ) fedezeti stratégia, amely reprodukálja H-t $T-1$-ben, Q kockázat semleges. Legyen Európai opció, $H = (S_T - K)^+$, jelenleg $S = S_{T-1}$

$$V_{T-1} = E_Q\left(\overline{H}\right) = \beta\left(qh^b + (1-q)\, h^a\right)$$

mint korábban

$$q = \frac{(1+r)\, S - (1+a)\, S}{(1+b)\, S - (1+a)\, S} = \frac{r-a}{b-a}$$

ebből

$$\begin{aligned} & E_Q\left(S_T | S_{T-1} = S\right) \\ & = q\,(1+b)\, S + (1-q)\,(1+a)\, S \\ & = (1+r)\, S. \end{aligned}$$

7.6.2. Két lépés

Most ugyanezen gondolatot $T-2$ -re alkalmazzuk Jelölje $S_{T-2}=S$

$$S_T=\begin{cases}(1+b)^2 S & p^2\\ \\ (1+b)(1+a)S & 2p(1-p)\\ \\ (1+a)^2 S & (1-p)^2\end{cases}$$

$$h_T=\begin{cases}h^{bb} & p^2\\ \\ h^{ab} & 2p(1-p)\\ \\ h^{aa} & (1-p)^2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}V_{T-2}&=\beta\left(qV^b+(1-q)V^a\right)\\ &=\beta\begin{pmatrix} q\beta\left(qh^{bb}+(1-q)h^{ab}\right)\\ +(1-q)\beta\left(qh^{ab}+(1-q)h^{a,a}\right)\end{pmatrix}\\ &=\beta^2\begin{Bmatrix} q^2\left[(1+b)^2 S-K\right]^+\\ +2q(1-q)\left[(1+b)(1+a)S-K\right]^+\\ +(1-q)^2\left[(1+a)^2 S-K\right]^+\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

azaz a követelés jelenértéken vett várható értéke meghatározott. Ebből minden lépésben a (η,Θ) igazítása mint az egylépésesnél meghatározható.

7.6.3. A CRR képlet

Mint láttuk

$$E_Q(S_1)=S_0$$

egyensúlyhoz (igazságos játék, martingál) ha

$$q=\frac{r-a}{b-a}$$

állandó, $t=0,1,...,T$ bármely periódusban. Ehhez van fedezeti portfólió is mint láttuk (η,Θ) ,illetve (V_0,Θ).

Legyen $x=(1+b)$, $y=(1+a)$, q, $p=1-q$!

$$\begin{aligned}V_{T-1}&=E_Q(H)=\beta\left(qh^b+(1-q)h^a\right)\\ &=\beta\left(q\left[xS-K\right]^++(1-q)\left[yS-K\right]^+\right)\end{aligned}$$

$$V_{T-2} = \beta^2 \left\{ \begin{array}{c} q^2 \left[x^2 S - K\right]^+ \\ +2pq \left[xyS - K\right]^+ \\ +p^2 \left[y^2 S - K\right]^+ \end{array} \right\}$$

ezt folytatva

$$\begin{aligned} V_0 &= \beta^T \sum_{t=0}^{T} \binom{T}{t} q^t p^{T-t} \left[x^t y^{T-t} S_0 - K\right]^+ \\ &= \beta^T \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} q^t p^{T-t} x^t y^{T-t} S_0 \\ &- \beta^T \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} q^t p^{T-t} K \end{aligned}$$

ahol $A = \min\{k : x^k y^{T-k} S_0 > K\}$. Azaz

$$V_0 = \beta^T \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} (qx)^t (py)^{T-t} S_0 - \beta^T \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} q^t p^{T-t} K$$

$$V_0 = \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} (q')^t (1-q')^{T-t} S_0 - \beta^T \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} q^t p^{T-t} K$$

ahol $q' = \beta q x = \frac{1+b}{1+r} q, 1 - q' = \frac{1+a}{1+r}(1-q)$.

Azaz van egyensúlyi (kockázat semleges) mérték, ezt használva van fedezeti stratégia is vagyis a modell teljes. Ugyanezen gondolamenettel

$$V_t = \beta^{T-t} \sum_{s=A_t}^{T-t} \binom{T-t}{s} (qx)^s (py)^{T-t-s} S_0 - \beta^{T-t} \sum_{t=A_t}^{T-t} \binom{T-t}{s} q^s p^{T-t-s} K$$

$$V_0 = \sum_{t=A_t}^{T} \binom{T}{t} (q')^t (1-q')^{T-t} S_0 - \beta^T \sum_{t=A_t}^{T} \binom{T}{t} q^t p^{T-t} K,$$

ahol most $A_t = \min\left\{k : S_t (1+b)^k (1+a)^{T-t-k} > K\right\}$. Ugyanez (η, Θ)-ra elmondható $[t-1, t]$ intervallumban $\left(\eta_{t-1}, \Theta_{t-1}\right)$ reprodukálja $V_t - t$

$$\Theta_{t-1} S_t + \eta_{t-1} (1+r) = V_t$$

a két eseményre bontva

$$\Theta_{t-1} (1+b) S_{t-1} + \eta_{t-1} (1+r) = V_t^b$$

$$\Theta_{t-1}\left(1+a\right)S_{t-1}+\eta_{t-1}\left(1+r\right)=V_t^a$$

amiből mint korábban

$$\Theta_{t-1}=\frac{V_t^b-V_t^a}{\left(b-a\right)S_{t-1}}$$

$$\eta_{t-1}=\frac{\left(1+b\right)V_t^a-\left(1+a\right)V_t^b}{\left(1+r\right)\left(b-a\right)}$$

azaz rekurzívan felülről lefelé a portfólió megkapható.

$$\Theta_t=\sum_{s=A_t}^{T-t}\binom{T-t}{s}\left(q'\right)^s\left(1-q'\right)^{T-t-s},$$

$$\eta_t=-K\left(1+r\right)^{-(T-t)}\sum_{s=A_t}^{T-t}\binom{T-t}{s}q^{\mathrm{s}}\left(1-q\right)^{T-t-s}.$$

7.7. Összefoglalás

1. kezdetben $\beta=1$ mellett az ekvivalencia elvből levezettünk egy kockázat semleges piaci szereplőkre vonatkozó $Q=(q,1-q)$ valószínűséget, ami meghatározza a méltányos árat. Ami egyben az egyetlen olyan, ami mellett nincs arbitrázs. Ezzel együtt konstruáltunk fedezeti portófiót, minden kimenetel esetén. Megmutattuk, hogy ezen opciós ár esetén (1$ volt) van fedezeti stratégia. Általában nem igaz, hogy van minden kimenetelre fedezeti stratégia, de a kockázatsemleges értékelés az egyetlen ami kizárja az arbitrázst.

2. Ha $\beta>1, r>0, \beta=1+r$ akkor megkötve a hozamokat $(1+b), (1+a)$ van $Q=(q,1-q)$.

$$\beta E_Q\left(H_1\right)=V_0$$

$$\beta^T E_Q\left(H_T\right)=V_0$$

   Ugyanezen Q-val a lepéseket ismételve van fedezeti stratégia és meghatározható az opció aktuális egyetlen méltányos, racionális ára.

7.7.1. Az opciók árainak kapcsolata

Egyetlen feltevésünk, hogy nincs arbitrázs.(NA)

7.1. Lemma. *Ha NA akkor*

$$C_0\left(A\right) \geq C_0\left(E\right) \geq 0.$$

7.4. Bizonyítás. *Tegyük fel indirekt, hogy* $C_0\left(A\right) < C_0\left(E\right)$*. Vegyünk egy amerikai opciót, és írjunk ki egy európait. Legyen a kötési árfolyamuk azonos,* K*. Megtartjuk az amerikait végig. Ez fedezi az europait bármi is történik és zsebrevágjuk* $C_0\left(A\right) - C_0\left(E\right) - t$*.*

7.2. Lemma.

$$C_0\left(A\right), C_0\left(E\right) \leq S_0$$

7.5. Bizonyítás. *Ha ugyanis* $>$ *akkor vegyünk egy részvényt* S_0*-ért és írjunk ki egy* C_0*-t. A fedezetünk meg van* T*-ig, ekkor bármi történik a miénk* $C_0 - S_0$*.*

7.3. Lemma.

$$P_0\left(A\right), P_0\left(E\right) \leq S_0$$

A bizonyítás ugyanígy elvégezhető.

7.4. Lemma.

$$C_0\left(E\right) - P_0\left(E\right) = S_0 - K$$

Ezt már beláttuk a call-put paritásnál.

7.1. Következmény.

$$C_0\left(E\right) \geq S_0 - K$$

mert $P \geq 0, \beta \geq 1$.

7.3. Tétel.

$$C_0\left(A\right) = C_0\left(E\right)$$

$$C_t\left(A\right) = C_t\left(E\right)$$

minden $0 \leq t \leq T$*.*

7.6. Bizonyítás.

$$C_0(A) \geq C_0(E) \geq S_0 - K$$

azaz az opciót nem hívják le azonnal, hiszen többet (nem kevesebbet) ér, mint részvény. Ugyanígy bármely t-re lehet úgy felfogni, hogy egy periódus van ami $T - t$ hosszú, erre egy Európai opcióra vonatkozóan

$$C_t(E) \geq S_t - \beta^{T-t} K.$$

Az opciós kötelezettséget el lehet adni, meg lehet venni t-kor is, azaz $C_t(E)$ ezt az árat takarja.

$$C_t(A) \geq C_t(E) \geq S_t - \beta^{T-t} K$$

ezért t-ben sem érdemes lehívni.

7.8. A CRR-től a B-S-ig

Legyen $S_t, f_T = (S_T - K)^+$ folytonos időben, azaz $t \in [0, T]$. Kezdünk S_0-ban és diszkretizáljuk az ármozgást N lépésre az időben, azaz az egység idő

$$h = \frac{T}{N}.$$

$\mathbf{T} = \{0, h, 2h, ...Nh\}$ ezentúl felső index N utal a diszkretizálásra pl. C_T^N

$$V_0^N(X) = \beta_N E_Q\left(\left[S_0^N \prod_{u=0}^{N} R_u^N - K\right]^+\right) =$$

$$(1+r)^{-N} E_Q\left(\left[S_0^N \prod_{u=0}^{N} R_u^N - K\right]^+\right).$$

$$R_u^N = \frac{S_{uh}}{S_{(u-1)h}}$$

erről tesszük fel, hogy binomiális $(1+b)$, $(1+a)$, BK$>$ q, $(1-q)$. R a h periódusra eső kockázatmentes kamatláb. Meghatározható a, b, R

$$Q\left(R_i^N = 1 + b\right) = q = \frac{R-a}{b-a}$$

mint korábban. Ugyanakkor

$$R = r\frac{T}{N}$$

ahol r a pillanatnyi kamatláb (vö $e^{rt} = \lim_{N\to\infty} (1+R)^N$).

$$R_u^N = e^{\eta_u}$$

ahol η független, azonos eloszlású valószínűségi változó

$$\eta = \begin{cases} \log(1+b) & q \\ \log(1+a) & 1-q \end{cases}$$

amiből

$$S_{nh}^N = S_0 \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i\right)$$

ha az S^N értékpapír volatilitása h időegység alatt, szórása $\sigma > 0$.

$$\log\left(\frac{b+1}{R+1}\right) = \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} = \sigma\sqrt{h}$$
$$\log\left(\frac{a+1}{R+1}\right) = -\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} = -\sigma\sqrt{h}.$$

és a diszkontált hányadosok

$$\overline{R}_i = \exp(\sigma\xi_i)$$

ahol

$$\xi = \begin{cases} \sigma\sqrt{h} & q \\ -\sigma\sqrt{h} & 1-q \end{cases}.$$

A centrális határeloszlás tétel szerint, ha Y_i^N független valószínűségi változók szériasorozata olyan, hogy: $E\left(Y_i^N\right) = \mu_N$,

$$N\mu_N \to \mu$$

továbbá

$$E\left[\left(Y_i^N\right)^2\right] \tilde{} \frac{\sigma^2}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)$$

akkor

$$Z_N = \sum^{N} Y_i^N \to Z$$

vv. amelyre

$$Z \tilde{} N(\mu, \sigma).$$

Legyen

$$(1+R)^{-N} = \left(1+\frac{rt}{N}\right)^{N},$$

$$\begin{aligned} Y_i^N &= \log\left(\frac{R_i^N}{1+R}\right), \\ Z_N &= \sum^{N} Y_i^N. \end{aligned}$$

Ennek megfelelően

$$(1+R)^{-N}\prod_{u=0}^{N} R_u^N = \exp\sum^{N} Y_i^N = \exp Z_N,$$

azaz

$$V_0^N = E_Q\left[\left(S_0 e^{Z_N} - (1+R)^{-N} K\right)^{+}\right].$$

az időskálázást és az árak volatilitására kirótt feltételt figyelembe véve, továbbá mert R csak két értéket vehet fel, ezért Y éréke az nem lehet más, mint

$$\pm\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} = \pm\sigma\sqrt{h}$$

ezért ennek második momentuma $\sigma^2\frac{T}{N}$, míg várható értéke

$$\mu_N = q\sigma\sqrt{h} + (1-q)\,\sigma\sqrt{h} = (2q-1)\,\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}.$$

A CLT alklamazásához belátjuk, hogy a szórás illetve a várható értéke megfelelően konvergál.

$$\begin{aligned} 2q-1 &= 1-2\,(1-q) = 1-2\frac{b-R}{b-a} \\ & \quad 1-2\frac{(1+R)\left(e^{-\sigma\sqrt{h}}-1\right)}{(1+R)\left(e^{-\sigma\sqrt{h}}-e^{\sigma\sqrt{h}}\right)} \\ &\simeq 1-2\frac{-\sigma\sqrt{h}+\frac{1}{2}\sigma^2 h - o\,(1)}{1-\sigma\sqrt{h}+\frac{1}{2}\sigma^2 h - o\,(1) - \left(1-\sigma\sqrt{h}+\frac{1}{2}\sigma^2 h - o\,(1)\right)} \\ &= 1-2\frac{-\sigma\sqrt{h}+\frac{1}{2}\sigma^2 h - o\,(1)}{1-\sigma\sqrt{h}+\frac{1}{2}\sigma^2 h - o\,(1) - 1 + \sigma\sqrt{h} - \frac{1}{2}\sigma^2 h + o\,(1)} \\ &= 1-2\frac{-\sigma\sqrt{h}+\frac{1}{2}\sigma^2 h - o\,(1)}{2\sigma\sqrt{h} - o\,(\sigma^2 h)} = 1-1-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{h} + o\left(\frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

azaz

$$N\mu_N \simeq -\frac{1}{2}\sigma^2 T + o(1),$$

valamint

$$\begin{aligned}
\sigma^2\left(Y_i^N\right) &= E\left(\left[Y_i^N\right]^2\right) - E^2\left(Y_i^N\right) \simeq \sigma^2\frac{T}{N} - \frac{1}{4}\sigma^2\frac{T^2}{N^2} \\
N\sigma^2\left(Y_i^N\right) &\simeq \sigma^2 T - \frac{1}{4}\sigma^2\frac{T^2}{N} \simeq \sigma^2 T,
\end{aligned}$$

vagyis

$$\sigma^2\left(\sum_i^N Y_i^N\right) \simeq \frac{1}{2}\sigma^2 T,$$

ezért

$$Z_N \to Z\tilde{\ }N\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T\right).$$

Az ár ennek alapján

$$V_0^N \to V_0 = E\left(S_0 e^Z - e^{-rT}K\right)^+$$

Vegyük észre , hogy $2q-1 \simeq -\frac{1}{2}\sigma\sqrt{h} \to 0$ miatt $q = 1/2$.

A B-S formula

$$X = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(Z + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\tilde{\ }N(0,1)$$

e szerint

$$\begin{aligned}
V_0 &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} - e^{-rT}K\right)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \int_{\gamma}^{\infty}\left(S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} - e^{-rT}K\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.
\end{aligned}$$

A γ meghatározásához a feltétel hogy $x > \gamma$

$$\begin{aligned}
S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + x\sigma\sqrt{T}} &> e^{-rT}K \\
\frac{S_0}{K}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + x\sigma\sqrt{T} \ + rT\right) &> 1 \\
\log\frac{S_0}{K} &> -\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + x\sigma\sqrt{T} \ + rT\right) \\
x &> \frac{-\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right)T}{\sigma\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

azaz

$$\gamma = \frac{-\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

ezzel tovább számolva

$$\begin{aligned}
V_0 &= \int_\gamma^\infty \left(S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} - e^{-rT}K\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= S_0\int_\gamma^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x - \frac{1}{2}x^2}dx - e^{-rT}K\left(1-\Phi(\gamma)\right) \\
&= S_0\int_\gamma^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{T}x - x\right)^2}dx - e^{-rT}K\left(1-\Phi(\gamma)\right) \\
&= S_0\int_{\gamma-\sigma\sqrt{T}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy - e^{-rT}K\left(1-\Phi(\gamma)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_0 &= S_0\left(1-\Phi\left(\gamma-\sigma\sqrt{T}\right)\right) - Ke^{-rT}\left(1-\Phi(\gamma)\right) \\
&= S_0\Phi\left(-\left(\gamma-\sigma\sqrt{T}\right)\right) - Ke^{-rT}\Phi(-\gamma).
\end{aligned}$$

mert $1-\Phi(\gamma) = \Phi(-\gamma)$.

De

$$\gamma - \sigma\sqrt{T} = \frac{-\log\left(\frac{S_0}{K}\right) - \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + r\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Legyen

$$d_+ = -\left(\gamma - \sigma\sqrt{T}\right) = -\gamma + \sigma\sqrt{T} = \frac{-\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + r\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

és legyen

$$d_- = -\gamma$$

azaz

$$d_\pm = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\pm\frac{1}{2}\sigma^2 + r\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

akkor ezzel a jelöléssel

$$V_0 = S_0\Phi(d_+) - e^{-rT}K\Phi(d_-)$$

adódik a Black-Shole formula.

Közbülső t-re T helyett $T-t$ -vel adódik

$$V_t = S_t\Phi(d_{t+}) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_{t-})$$

ahol

$$d_{t\pm} = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) - \left(\pm\frac{1}{2}\sigma^2 + r\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Ez egyben a megvalósító potfóliót is definiálja, azaz nem csak az árat, hanem a fedezeti stratégiát is ismerjük.

$$\begin{aligned} \Theta_t &= S_t \Phi\left(d_{t+}\right) \\ \eta_t &= -e^{-r(T-t)} K \Phi\left(d_{t-}\right). \end{aligned}$$

Ha $\sigma \to 0$ akkor $d_\pm \to \infty$, kötvénnyé válik.

Ha $t \to T$ és $S_t > K$ akkor $d_\pm \to \infty$, $V_t \to S_T - K$,de ha $S_T < K, V_t \to 0$.

8. fejezet

Feltételes várható érték

Ebben a fejezetben tovább bővítjük a valószínűségszámítási alapfogalmaink gyűjteményét.

8.1. Feltételes valószínűségek

8.2. A binomiális sorozat

A binomiális sorozat állandó visszatérő modellje vizsgálatainknak. Most a szigmaalgebrák sorozatának megértéséhez, a martingálok fogalmának megalapozásához hívjuk őket segítségül. Ebben a szakaszban Steven Shere [?] és Erika Schubert [?] munkájára támaszkodunk.

Legyen $S_0 \in \mathbb{Z}$ és $X_i \in \{-1, +1\}, i = 1, 2....$ valószínűségi változó sorozat, azaz sztohasztikus folyamat, továbbá

$$S_n = S_0 + X_1 + ... + X_n.$$

Az egyszerűség kedvéért gyakran feltesszük, hogy $S_0 = 0$. Legyen az X_i sorozatot definiáló valószínűségi mező a pézfeldobás sorozat, azaz egy pénzfeldobás mezeje $\left\{\{F, I\}, 2^{\{F,I\}}, P\right\}$, ahol $P(F) = p, 0 \leq p \leq 1$, leggyakrabban persze feltéve $p = 1/2$-t is. Először a $F-I$, fej-írás sorozatokat vegyük szemügyre. A szóbanforgó egy pénzfeldobáshoz tartózó eseméytér igen egyszerű

$$\mathcal{A}_1 = 2^{\{F,I\}} = \{\emptyset, F, I, \{F, I\}\}.$$

nem más mint az

$$\Omega = \{F, I\}$$

halmaz teljes Boole algerbrája. Ha három dobást végzünk, akkor az eseménytér

$$\Omega^3 = \{FFF, FFI, FIF, FII, IFF, IFI, IIF, III\}$$

lesz és a megfelelő eseménytér $\mathcal{A}_3$, ennek teljes Boole algebrája. Jelölje most Ω_i az $i-$edik pénzfeldobás jól megkülönböztetett kísérletének terét. Egy n hosszú dobássorozat akkor a

$$\Omega^n = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ...\Omega_{n-1} \times \Omega_n$$

elemeiből áll. Az S_k valószínűségi változó az $\omega_1, \omega_2...\omega_k$ elemi eseményektől függ csak. Például

$$S_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = S_1(\omega_1),$$

$$S_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = S_2(\omega_1, \omega_2).$$

Ezzel összhangban, S_1 $\mathcal{A}_1-$mérhető, hiszen X_1 és S_1 valószínűségi változó, S_k $\mathcal{A}_k$-mérhető.

8.3. Információ

8.1. Definíció. *(Az első k dobás által meghatározott halmazok) Egy $A \subset \Omega^n$ (itt később az $n = \infty$ azaz végtelen dobássorozatot is megengedjük) halmazt meghatároz az első k dobás, ha az $\omega_1, \omega_2, ...\omega_k$ ismeretében már eldönthető, hogy bekövetkezett-e A, azaz ha $(\omega_1, \omega_2, ...\omega_k, \omega_{k+1}, ...\omega_n) \in A$ egy adott $\omega = (a_{1,}a_2, ...a_n)$ sorozatra, akkor minden olyan $(b_1, b_2....b_n)$ sorozatra ahol az első k elem azonos az $(a) - val$, vagyis minden $(a_1, a_2, ...a_k, \omega_{k+1}, ...\omega_n)$ sorozat benne van A-ban. Fordítva is persze, ha egy adott $(a_1, a_2, ...a_k, a_{k+1}, ...a_n) \notin A$, akkor minden $(a_1, a_2, ...a_k, \omega_{k+1}, ...\omega_n) \notin A$.*

8.2. Definíció. *Jelölje $\mathcal{F}_k$ azon halmazok összeségét, amelyeket meghatároz az első k dobás.*

8.1. Lemma. *1. $\mathcal{F}_k$ szigma-algebra.*

2. S_k $\mathcal{F}_k-$mérhető.

8.1. Megjegyzés. *Formálisan, ha $\sigma(U)$, jelöli az U halmazcsalád generálta szigma-algebrát, akkor*

$$\mathcal{F}_k = \sigma(\{\{\omega_1\} \times \{\omega_2\} \times ... \{\omega_k\} \times \Omega_{k+1}...\Omega_n : \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2, ...\omega_k \in \Omega_k\})$$

azaz $\mathcal{F}_k$ elemei azok az információ, amik a dobássorozatot megfigyelőnek a k-adik dobás után a rendelkezésére állnak.

8.1. Példa. *Legyen $n = 2$. Ekkor $\mathcal{F}_1$ a következő halmazokból áll.*

$$\begin{aligned} A_F &= \{FF, FI\}, \\ A_I &= \{IF, II\}, \\ &\emptyset, \\ &\Omega. \end{aligned}$$

Ábrázolhatjuk ez a következő módon. Az **??**-**??** *ábrákon az $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ szigma-algebrák generáló részhalmazait mutatjuk be "krumplikkal", ezek alkotják a generáló partíciókat.*

9. Figure.

10. Figure.

11. Figure.

Legyen $n = 3$. Ekkor például $\mathcal{F}_2$ a következő halmazokból áll.

$$\begin{aligned}
A_{FF} &= \{FFF, FFI\}, \\
A_{IF} &= \{IFF, IFI\}, \\
A_{FI} &= \{FIF, FII\} \\
A_{IF} &= \{IFF, IFI\} \\
&\quad \text{a fenti halmazok komplementer} \\
&\quad \text{a fentebb definiált halmazok úniói} \\
&\quad \emptyset \\
&\quad \Omega.
\end{aligned}$$

12. Figure.

13. Figure.

14. Figure.

8.3. Definíció. *Egy valószínűségi változó információ tartalma. Legyen X valószínűségi változó. Azt mondjuk, hogy egy eseményt meghatároz X, ha az X értékének ismeretéből eldönthető, hogy A bekövetkezett-e. Ez pontosan azt jelenti, hogy ha $X(\omega) = y$ ismert, akkor az $X^{-1}(y) \subset \Omega$ ősképhalmazra vagy $X^{-1}(y) \subset A$ vagy $X^{-1}(y) \subset \Omega \backslash A$ lesz igaz.*

8.4. Definíció. *Ha X véges sok értéket vehet fel, valamely U halmazból, akkor az*

$$\sigma(X) = \sigma\left\{A : A = X^{-1}(u), u \in U\right\}$$

az X által generált szigma algebrának nevezzük. (Az általános definíció is igen hasonló.)

Visszatérve példánkhoz, az S_2 által generált szigma algebra az $n = 3$ esetben éppen a 8.3 definíció beli. Világos, hogy az $X_1, ...X_k...$ valószínűségi változók által meghatározott $S_1, ...S_k$ valószínűségi változók esetében kapott szigma algebrák növő sorozatot alkotnak, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 ... \subset \mathcal{F}_k$.

8.5. Definíció. *Általában szigma algebrák növő sorozatát $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 ... \subset \mathcal{F}_k ...$ filtrációnak nevezzük és azt mondjuk, hogy az X_i folyamat adaptált a filtrációhoz, ha X_i $\mathcal{F}_i$ mérhető.*

Mi általában az egyszerűbb utat járjuk, azaz az adott valószínűségi változó sorozat határozza meg a filtrációt.

8.4. Feltételes várható érték

Legyen most $A \subset \Omega, A \in \mathcal{F}$. A közönséges várható érték

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega).$$

Jelölje

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{ha} \quad \omega \notin A \end{cases}.$$

Természetesen az $1_A X = 1_A \times X$ függvény is valószínűségi változó.

$$E(1_A X) = \sum_{\omega \in \Omega} 1_A(\omega) X(\omega) P(\omega) = \sum_{\omega \in A} X(\omega) P(\omega)$$

Azaz $E(1_A X)$ egy részösszeg alapján képzett részleges átlag.

Legyenek S_0, S_1, S_2 a pézfeldobás példa változói. Mivel a feltételes valószínűség is valószínűségi mérték, ezért ha $P(S_2 = y) > 0$, akkor tekinthetjük a $Q(A) = P(A|S_2 = y)$ új valószínűségi mértéket. Erre is lehet várható értéket számolni.

$$E_Q(S_1) = E(S_1|S_2 = y) = \sum_x xP(S_1 = x|S_2 = y).$$

Ezt szoktuk a regressziós függvény y beli értékének nevezni. Ebből könnyű az S_2 szerinti feltételes várható értéket definiálni.

$$E(S_1|S_2) = \sum_y E(S_1|S_2 = y)\, 1_{\{S_2=y\}} = \sum_y \left[\sum_x xP(S_1 = x|S_2 = y)\right] 1_{\{S_2=y\}}.$$

Ha tehát S_2 értéke ismert, mondjuk 2. akkor az $E(S_1|S_2)$ valószínűségi változó. Legyen most $P(X_i) = p$, akkor

$$\sum_x xP(S_1 = x|S_2 = 2) = 1P(S_1 = 1|S_2 = 2) + 3P(S_1 = 3|S_2 = 2) = 2p - 1.$$

Általában is így definiálunk feltételes várható értéket.

8.6. Definíció. *Legyenek X, Y valószínűségi változók.*

$$E(X|Y) = \sum_x \sum_y xP(X = x|Y = y)\, 1_{\{Y=y\}} \tag{8.1}$$

8.7. Definíció. *Legyen X valószínűségi változó, $\mathcal{G}$ szigma algebra, akkor az $X-$nek a $\mathcal{G}$-re vonatkozó feltételes várható értékén azt az $Y = E(X|\mathcal{G})$ valószínűségi változót értjük, amelyre igaz, hogy*
1. Y $\mathcal{G}$-mérhető
2. Minden $A \in \mathcal{G}$-re

$$E(1_A Y) = E(1_A X).$$

8.1. Állítás. *1. Az $E(X|Y)$ valószínűségi változó $\sigma(Y)-$mérhető.*

2. Minden $A \in \sigma(Y)$-re

$$\sum_{\omega \in A} Y(\omega) P(\omega) = \sum_{\omega \in A} X(\omega) P(\omega). \tag{8.2}$$

8.1. Bizonyítás. *Az első állítás abból következik, hogy a változó értékeinek ősképhalmaza mindíg az $\sigma(Y)$ halmazainak valamilyen uniója. Azt kell belátnunk (diszkrét esetben, hogy minden $u \in \mathbb{R}$-re $\{\omega : E(X|Y)(\omega) = u\} \in \sigma(Y)$ Ha ez a halmaz üres, akkor természetesen eleme $\sigma(Y)$ -nak. Tegyük fel, hogy*

$$A_u = \{\omega : E(X|Y)(\omega) = u\}$$

nem üres. Legyen $Z(\omega) = E(X|Y)(\omega)$ és $U = \{v : E(X|Y = v) = u\}$. Ekkor

$$A_u = \cup_{v \in U} \{\omega : Y = v, E(X|Y)(\omega) = u\}$$

de a zárójelben lévő első eseményből az U *definíciója szerint következik a második, ezért*

$$\begin{aligned} A_u &= \cup_{v\in U}\{\omega : Y = v, E(X|Y)(\omega) = u\} \\ &= \cup_{v\in U}\{\omega : Y = v\} \end{aligned}$$

és világos, hogy $\{\omega : Y = v\} \in \sigma(Y)$. *A második állítás egyszerű összegzéssel adódik* (8.1)*-ből.*

8.2. Lemma. *Feltéve a megfelelő objektumok létezését*

$$E(E(X|Y)) = E(X), \tag{8.3}$$

ha h *valós függvény, akkor*

$$E(h(Y)X|Y) = h(Y)E(X|Y), \tag{8.4}$$

ha pedig Z $\sigma(Y)-$*mérhető valószínűségi változó, akkor*

$$E(ZX|Y) = ZE(X|Y). \tag{8.5}$$

8.2. Bizonyítás.

$$\begin{aligned} E(E(X|Y)) &= \sum_v E(X|Y = v)P(Y = v) \\ &= \sum_v \sum_x xP(X = x|Y = v)P(Y = v) \\ &= \sum_x x \sum_v P(X = x|Y = v)P(Y = v) \\ &= \sum_x x \sum_v P(X = x, Y = v) \\ &= \sum_x xP(X = x) \\ &= E(X). \end{aligned}$$

A második állítás az előzőhöz hasonlóan adódik. A harmadik állítás következik a definíciókból.

8.1. Gyakorlat. *Bizonyítsuk be a lemma második és harmadik állítását.*

8.2. Megjegyzés. *A feltételes várható érték úgy is felfogható, mint egy döntési fán egy adott csomóponti érték, ami nem más mint az onnan induló ágak végein lévő értékek várható értéke. A* **??** *ábra fája elágazási valószínűségeket* *mutat, a fa ágvégein az elérhető nyereménnyel. Ezen nyeremények az $X = X_3$ valószínűségi változó lehetséges értékei. Az egyes értékek valószínűsége a fa gyökerétől az ágvégig vezető ágak valószínűségeinek szorzatai. Ez igaz a belső pontok elérésére is. Nevezzük a fa gyökerét nulladik generációnak, szomszédait első generációnak, sorra így tovább. Mint a Fermat-Pascal problémánál. Kérdezhetjük, mi az átlagos várható nyeremény, ha a második generáció valamely pontjában vagyunk. Világos, hogy a második generációs pontokon a nyereség X_2 a belőlük induló ágak segítségével számolható várható érték*

$$X_2 = E\left(X|\mathcal{F}_2\right).$$

Ezen értékek láthatóak a **??** *ábrán. Az első generáció $X_1 = E\left(X|\mathcal{F}_1\right)$ értékei a* **??** *ábrán, végül $X_0 = 44$ a játszma nyereségének várható értéke, ha a gyökérben vagyunk, azaz a mérhető események $\mathcal{F}_0$ szigma algebrája a triviális.*

8.5. A feltételes várható érték további tulajdonságai

8.2. Állítás. *1. Ha az X valószínűségi változó $\sigma(Y)$-mérhető, akkor*

$$E\left(X|Y\right) = X.$$

2.

$$E\left(aX + bY|Z\right) = aE\left(X|Z\right)E\left(X|Y\right) + bE\left(Y|Z\right).$$

3. Ha $X \geq 0$ majdnem biztosan, akkor

$$E\left(X|Y\right) \geq 0.$$

4. Jensen egyenlőtlenség. Tegyük fel, hogy f konvex és $E\left(f\left(X\right)\right) < \infty$, ekkor

$$E\left(f\left(X\right)|Y\right) \geq f\left(E\left(X|Y\right)\right),$$

5. Láncszabály Legyen $\mathcal{H}$ rész szigma algebrája $\mathcal{G}$-nek, akkor

$$E\left(E\left(X|\mathcal{G}\right)|\mathcal{H}\right) = E\left(X|\mathcal{H}\right).$$

6. Ha X független Y-tól, akkor

$$E\left(X|Y\right) = E\left(X\right).$$

8.3. Bizonyítás. *1. következik* (8.5)*-ből* $X = 1, V = X$ *helyettesítéssel. 2,3. az olvasóra van bízva. 4. következik a közönséges Jensen egyenőtlenségből*

$$E\left[f\left(X\right)\right] \geq f\left(E\left(X\right)\right) \tag{8.6}$$

alkalmazva azt először az $Y = v$ *feltétel mellett, majd felösszegezve:*

$$E\left(f\left(X\right)|Y = v\right) \geq f\left(E\left(X|Y = v\right)\right)$$

$$\begin{aligned} E\left(f\left(X\right)|Y\right) &= \sum_v E\left(f\left(X\right)|Y = v\right) 1_{\{Y=v\}} \\ &\geq \sum_v f\left(E\left(X|Y = v\right)\right) 1_{\{Y=v\}} \\ &= f\left(E\left(X|Y\right)\right). \end{aligned}$$

Az 5. állítás abból következik, hogy $\mathcal{G}$ *több információt tartalmaz mint* $\mathcal{H}$*. Ezért, ha* X*-et először annak az információnak az alapján becsüljük* $E\left(X|\mathcal{G}\right)-$*el amit* $\mathcal{G}$ *biztosít majd annak alapján amit* $\mathcal{H}$ *akkor azt kapjuk, mintha a becslést a kevesebb információ alapján, azaz* $\mathcal{H}$*-val végeztük volna. A 6. állítás következik a feltételes várható érték és a függetlenség definíciójából.*

8.6. Martingálok

A martingálok az igazságos játék fogalmából fejlődtek ki. Fontos szerepet játszanak az opcióárazás elméletében is.

8.8. Definíció. *Az* X_i $(\mathcal{F}_i)$*-hez adaptált valószínűségi változó sorozat martingál az* $(\mathcal{F}_i)$ *filtrációra nézve, ha minden* $0 \leq k \leq n-$*re*

$$X_k = E\left(X_{n+1}|\mathcal{F}_k\right). \tag{8.7}$$

Speciálisan, az $E\left(X_n|X_k\right) = E\left(X_n|\sigma\left(X_k\right)\right)$ *jelölést használva*

$$X_k = E\left(X_{n+1}|X_k\right), \tag{8.8}$$

azaz $k = n$*-re*

$$X_n = E\left(X_{n+1}|X_n\right). \tag{8.9}$$

Szokás és elegendő ez utóbbit tekinteni a definíciónak. Tehcnikai egyszerűsítés céljából mi a (8.7)-et választottuk, de az alábbiakban a legtöbb esetben elég a (8.9)-ra gondolni majd, ha martingálról beszélünk.

8.2. Gyakorlat. *Lássuk be, hogy* $\{X_i\}$ *akkor és csak akkor martingál, ha minden* k*-ra* $A \in F_k$*-re*

$$E(1_A X_{k+1}) = E(1_A X_n).$$

Haszáljuk a 8.7 Definíciót.

8.2. Példa. *A közönséges bolyongás. Legyen* $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, *ahol*

$$X_i = \begin{cases} 1 & 1/2 \text{ valószínűséggel} \\ -1 & 1/2 \text{ valószínűséggel} \end{cases},$$

függetlenek. $X_0 \in \mathbb{Z}$. *Ekkor* S_n *martingál.*

8.3. Példa. *Bolyongás véges intervallumon. Legyen* $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, *ahol*

$$X_i = \begin{cases} 1 & 1/2 \text{ valószínűséggel} \\ -1 & 1/2 \text{ valószínűséggel} \end{cases},$$

függetlenek. $X_0 \in \mathbb{Z}$. *Legyen* $N, x \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \tau_x &= \min\{k > 0 : S_k = x\} \\ \tau &= \min\{\tau_0, \tau_N\} \end{aligned}$$

$M_n = S_n$, *ha* $n < \tau$. *Ekkor* M_n *martingál.*

8.4. Példa. *A 8.3 Példát folytatva. Legyen*

$$h(x) = P(\tau_0 < \tau_N | X_0 = x),$$

$$M_n = h(S_n) \text{ ha } n < \tau,$$

akkor M_n *martingál*

8.5. Példa. *Bolyongás drifttel véges intervallumon. Legyen* $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, *ahol*

$$X_i = \begin{cases} 1 & p \text{ valószínűséggel} \\ -1 & 1-p \text{ valószínűséggel} \end{cases},$$

függetlenek. $X_0 \in (0, N)$. *Szokásos módon ketten játszanak,* A, B. *A játékot* A *nyeri, ha* $\tau = \tau_N$. *Legyen a nyeremény* Q. *Mint a valószínűségszámítás kezdetét jelentő kérdésnél, határozzuk meg azt a* $h(x)$ *függvényt, ami megadja, hogyha bármikor megállítjuk játék vége előtt a játszmát és ekkor* $S_n = x$, *mi az* $A-t$ *illető méltányos nyeremény? Másképpen fogalmazva, ha lépésenként valóban pénzcsere történik* $h(x)$ *szerint, azaz pl. ha* $S_n = x$ *és egy lépésben*

A nyer, tehát $S_{n+1} = x+1$, akkor a vagyona $h(x+1) - h(x) -$ el változik, éppen $h(x+1)$-re.
Mi legyen h, hogy a játék igazságos legyen?
Először is tisztázzuk, hogy mit jelent, hogy a játék igazságos, ha tetszőleges $X_0 = x$ pontból indul a játék és A vagyona ekkor $h(x)$? A következő elvárások tűnnek természetesnek.
1. Bárhonnan is indulunk, bármikor is ellenőrizzük, minden lépésben legyen igazságos a játék, azaz ha az A játékos ekkor $h(y)$ vagyonnal rendelkezik, akkor a lépés eredményeképpen átlagosan újra ennyi legyen a vagyona.
2. A Pascal-Fermat féle klasszikus gondolat szerint a vagyont aszerint kell felosztani, hogy kinek mekkora esélye van teljes játék megnyerésére. Az egyes y pozíciókon a $h(y)$ vagyon úgy legyen meghatározva, hogy, az A várható nyeresége csak a kezdeti $X_0 = y$ ponttól függjön
Az első elvárás formálisan a következőképpen írható le.

$$E(h(S_{n+1})) = E(h(S_n)) = h(y),$$

de

$$h(y) = E(h(S_{n+1})) = ph(y+1) + (1-p)h(y-1), \tag{8.10}$$

amiből átrendezéssel

$$h(y+1) - h(y) = \frac{p}{1-p}[h(y) - h(y-1)].$$

Nyilván

$$h(y+1) - h(y) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^y [h(1) - h(0)].$$

A második elvárás formálisan, ha a vagyont most egy pillanatra $v(x)$-el jelöljük

$$P(\tau_0 > \tau_N | X_0 = x) = Cv(x)$$

valamilyen ismeretlen C konstanssal. Vegyük észre, hogy a

$$Cv(x) = P(\tau_0 > \tau_N | X_0 = x)$$

függvény természetesen kielégíti a

$$v(y) = pv(y+1) + (1-p)v(y-1) \tag{8.11}$$

egyenletet. Azaz v és h egyaránt megoldása a lineáris egyenletrendszernek. az ismeretlenek és egyenletek száma egyaránt $N-1$. Ugyanakkor tudjuk, hogy

$v(N) = 1, v(0) = 0,$ *ezen peremfeltételek melett* v *-re megoldható a feladat és csak egy megoldás van (mivel az egyenletek függetlenek). Ez viszont azt is jelenti, hogy* $h(x) = Cv(x)$ *is hiszen ugyanannak a lineáris egyenletrendszernek a megoldásai.*

8.3. Gyakorlat. *Lássuk be, hogy*

$$h(x) = Cv(x) = C\left[A\left(\frac{q}{p}\right)^{N-x} + B\right]$$

alakú és határozzuk meg A, B, C*-t.*

8.4. Gyakorlat. *Igazoljuk, hogy*

$$E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n+1}} |X_0 = x\right) = E\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} |X_0 = x\right] = \left(\frac{q}{p}\right)^x$$

azaz ha $M_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} = h(S_n)$, *akkor*

$$E(h(S_{n+1})|X_0 = x) = E(h(S_n)|X_0 = x) = h(x)$$

azaz

$$E(M_{n+1}|X_0 = x) = E(M_n|X_0 = x) = M_0$$

illetve, hogy

$$E(h(S_n)) = E(h(S_\tau)).$$

8.9. Definíció. *Az* X_t *folyamat szub- illetve, szupermartingál, ha*

$$E(X_{t+1}|\mathrm{F}_t) \leq X_t$$

ill.

$$E(X_{t+1}|\mathrm{F}_t) \geq X_t$$

8.10. Definíció. *Az* M_t *valószínűségi változó sorozat differenciája a*

$$\Delta M_{t+1} = \delta_{t+1} = M_{t+1} - M_t$$

sorozat.

8.3. Állítás. *Az* M_t *valószínűségi változó sorozat akkor és csak akkor martingál, ha*

$$E(\Delta M_{t+1}|\mathrm{F}_t) = 0.$$

8.4. Állítás. *Ha M_t, N_t két martingál (ugyanarra a valószínűségi mezőre), akkor*

$$aM_t + bN_t + c$$

is az, továbbá M_t csakkor martingál. ha

$$E\left(M_{t+s}|\mathrm{F}_t\right) = M_t$$

és csakkor ha

$$M_t - M_0$$

is az. Így $M_0 = 0$ általában feltehető.

A bizonyítás gyakorlófeladat.

8.5. Állítás. *Legyen $M_t = E\left(X|\mathrm{F}_t\right)$, akkor M_t martingál.*

8.4. Bizonyítás.

$$E\left(M_{t+1}|\mathrm{F}_t\right) = E\left(E\left(X|\mathrm{F}_{t+1}\right)|\mathrm{F}_t\right) = M_t.$$

8.6. Állítás. *Ha $E\left(M_{t+1} - M_t\right) = 0$ és $M_{t+1} - M_t$ független F_t -től, akkor M_t martingál.*

8.5. Bizonyítás. $E\left(M_{t+1} - M_t|\mathcal{F}_t\right) = E\left(M_{t+1} - M_t\right) = 0.$

8.7. Állítás. *Legyenek δ_t-k független valószínűségi változók. $E\left(\delta_t\right) = 0$, $X_t = \sum_{i=0}^{t} \delta_i$, akkor X_t martingál.*

8.6. Bizonyítás. *Mint előbb $M_{t+1} - M_t = \delta_{t+1}$, $X_0 = M_0$.*

$$E\left(X_t\right) = E\left(X_0\right) + E\left(\sum_{i=0}^{t} \delta_i\right) = E\left(X_0\right).$$

8.11. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy X_i folyamat előre jelezhető $(\mathcal{F}_i)$-ra nézve, ha X_{i+1} $\mathcal{F}_i$-mérhető.*

8.8. Állítás. *Ha egy M_t martingál előre jelezhető, akkor állandó.*

8.7. Bizonyítás. *Ha előre jelezhető, akkor*

$$E\left(M_{t+1}|\mathrm{F}_t\right) = E\left(M_{t+1}\right),$$

de mert martingál is

$$E\left(M_{t+1}|\mathrm{F}_t\right) = M_t.$$

8.12. Definíció. *Legyen M_t martingál, Θ_t előre jelezhető folyamat, (ugyanarra az $(\mathcal{F}_t)$ filtrációra nézve) akkor $X = \Theta \bullet M$ jelentse*

$$X_t = \Theta_1 \Delta M_1 + \Theta_2 \Delta M_2 ... + \Theta_t \Delta M_t$$

összegek sorozatát, $X_0 = 0$, akkor az X az M Θ szerinti transzformáltja.

A stabilitási tulajdonság

8.1. Tétel. *Ha* $(M_t, \mathcal{F}_t)$ *martingál* Θ *korlátos,* $(\mathcal{F}_t)$ *előre jelezhető, (létezik a várható értéke) és legyen* $\Delta X_t := \Theta_t \Delta M_t$ *akkor*

$$\begin{aligned} E(\Delta X_{t+1}|\mathcal{F}_t) &= E(\Theta_{t+1}\Delta M_{t+1}|\mathcal{F}_t) \\ &= \Theta_{t+1} E(\Delta M_{t+1}|\mathcal{F}_t) = 0 \end{aligned}$$

azaz a martingál transzformált is martingál.

8.2. Tétel. M_t *csakkor martingál, ha minden előre jelezhető* Θ*-ra*

$$E([\Theta \bullet M]_t) = 0$$

megj: $[\Theta \bullet M]_t = \sum_{i=1}^t \Theta_i \Delta M_i$.

8.8. Bizonyítás. *Oda. A transzformáltra a fent mondott miatt. Vissza. Legyen* $t > s > 0$, $A \in \mathcal{F}_s$. $\Theta_{s+1} = 1_A$, $\Theta_t = 0$,*ha* $t \neq s+1$. *Nyilván*

$$E([\Theta \bullet M]_t) = 0$$

ha $t > s+1$. *Ha* $t = s+1$, *akkor a feltevés. szerint*

$$\begin{aligned} 0 &= E([\Theta \bullet M]_t) = E\left(\sum_{i=1}^t \Theta_i \Delta M_i\right) \\ &= E(1_A (M_{t+1} - M_t)) \end{aligned}$$

fennáll minden $A \in \mathcal{F}_s$*-re, ezért*

$$E(M_{t+1} - M_t|\mathcal{F}_s) = 0.$$

9. fejezet

Martingál mértékek

9.1. Az általános diszkrét piaci modell

9.1.1. Az infomációs rendszer

Legyen $\mathbb{T}=[0,1,2,...T]$, az időhorizont és $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ valószínűségi mező. Tegyük fel, hogy a valószínűségi mező véges, atomos $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 ... \omega_m\}$ és $P(\omega_i) > 0$

E helyett elég kevesebbet feltenni, hogy $\mathcal{F}$ végesen $\{A_{1,..}A_l\}$ -el generálható, ahol $P(A_i) > 0$.

Minden befektetőnek van egy P-je az Ω, $\mathcal{F}$-hez, ezek a piac modelljei. Csak véges piaci modellekkel foglalkozunk.

Az információk F **rendszere** egy $F_0 \subset F_1 \subset ...F_t$ filtráció, ami az adott időpontig rendelkezésre álló megfigyelhető események (esetleg rész) algebrája.

Amit tudnak, hogy a $P_0 = \{\Omega\} \subset P_1 \subset P_2 .. \subset P_t$ sorozatban a halmazok közül melyik tartalmazza a piac valódi állapotát. $P_i \subset F_i$ az F_i-t generáló partíciója Ω-nak.

Feltevés:

1. A filtráció F_t eleme bármely t-re nem tartalmazza a jövőt.
2. Minden befektető kis befektető, nem képes befolyásolni a jövőt.
3. Minden kis befektető tudja magáról, hogy kis befektető.
4. A piac súrlódás mentes, azaz nincs tranzakciós költség.
5. Korlátlanul köthető short eladás (azaz fedezet nélküli).
6. Korlátlan a hitel.

7. A részvény tetszőleges tört része vehető/eladható.

9.1.2. A piaci ármérce

Van egy kockázatmentes termékünk, S^0, $S_0^0 = \beta_t S_t^0$, és d db kockázatos, aminek alakulását a $d+1$ dim térben $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ írja le, nem ismert P-vel. Az árvektort

$$S = \left(S^0, S^1, ..S^d\right)$$

írja le, ez t-ban

$$S_t = \left(S_t^0, S_t^1, ..S_t^d\right).$$

az egyes papírok ($k = 1...d$) az S_t^k időben fejlődő sztohasztikus folyamattal vannak leírva.

Feltesszük, hogy adaptált az F filtrációhoz, vagyis minden korábbi esemény mérhető, a korábbi árak ismertek.

$\{\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{T}, F, S\}$ az értékpapír piaci modell.

Kell egy numerare, ármérce, egy viszonyítási alap, amire $S > 0$ minden időpontban. Ez legyen S^0 általában kötvény (de lehet bankszámla stb).

9.1.3. Érték folyamatok

Az egyszerűség kedvéért

$$S_0^0 = 1.$$
$$\beta_t = \frac{1}{S_t^0}$$

speciálisan, ha konstans a kamat: $\beta_t = (1+r)^{-t}$.

Portfólió

$\Theta_t = \left\{\Theta_t^0, \Theta_t^1, ...\Theta_t^d\right\} \in R^{d+1}$ vektor $t \in \mathbb{T}$.

Az érték (vagyon) folyamat:

$$V_0(\Theta) = \Theta_0 S_0$$

az induló vagyon.

$$V_t(\Theta) = \Theta_t S_t = \sum_{i=0}^{d} \Theta_t^i S_t^i : t \in \mathbb{T}, t \geq 1.$$

Az idők jelentése: a $t-1$ ben ismert árak alapján alakítják ki Θ_t-t a befektetők ez marad állandó $[t-1, t)$-ben. t-kor újra igazítanak, ez lesz Θ_{t+1}.

9.1.4. Feltevések

1. Θ előre jelezhető (jósolható) azaz Θ_{t+1} F_t mérhető. Persze Θ_1 konstans és hasonlóan, ha fix piaci árakat ismerünk, akkor ezek determinisztikus függvénye a következő Θ.
2. Θ_t^i tetszőleges valós lehet.

9.1.5. Önfinanszírozó stratégiák

Megint feltesszük, hogy nincs külső pénzforrás, illetve pénzkihelyezés sem (a tört időkben a Θ konstans).

$$\Theta_{t-1}S_{t-1} = \Theta_t S_{t-1}$$

minden t-re.

9.1. Lemma. *Mint korábban legyen:* $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$.

$$(\Delta\Theta_t)\, S_{t-1} = 0.$$

Ha önfinanszírozó a Θ*, akkor a vagyon vátozása:*

$$\begin{aligned}\Delta V_t(\Theta) &= \Theta_t S_t - \Theta_{t-1}S_{t-1} \\ &= \Theta_t S_t - \Theta_t S_{t-1} \\ &= \Theta_t \Delta S_t.\end{aligned}$$

A gain, vagyis a nyereség folyamat $G_t(\Theta)$:

$$G_0(\Theta) = 0$$

$$G_t(\Theta) = \sum_{i=1}^{t} \Theta_i \Delta S_i.$$

A portfólió sorozat akkor és csak akkor önfinanszírozó, ha

$$V_t(\Theta) = V_0 + G_t(\Theta)$$

azaz csak a részvényeken realizált nyereség változtatja a vagyont.

9.1. Bizonyítás. *Mint előbb, megint*

$$\begin{aligned}\Delta V_t = V_t - V_{t-1} &= \Theta_t S_t - \Theta_{t-1}S_{t-1} \\ &= \Theta_t(S_t - S_{t-1}) + (\Theta_t - \Theta_{t-1})\, S_{t-1} \\ &= \Theta_t \Delta S_t + (\Delta\Theta_t)\, S_{t-1}\end{aligned}$$

azaz

$$(\Delta\Theta_t)\, S_{t-1} = 0.$$

Tehát Θ *stratégia akkor és csak akkor önfinanszírozó, ha*

$$(\Delta\Theta_t)\, S_{t-1} = 0.$$

9.1.6. Az ármérce

Ha az árfolyamat vektort megszorozzuk egy $Z_t > 0$ skalár függvénnyel, akkor ekvivalens modelt kapunk. Ha Θ önfinanszírozó akkor a Z -szerese is az. Ennek következtében a $S_0^0 = 1$ választás nem jelenti az általánosság megszorítását.

9.1. Definíció. X_t *diszkontáltja*

$$\overline{X}_t = \beta_t X_t.$$

Előbbi megjegyzés szerint: $Z = \beta$ *ekivivalens modellt ad és csak akkor önfinanszírozó, ha*

$$\Theta_{t+1}\overline{S}_t = \Theta_t\overline{S}_t$$

azaz

$$\overline{V}_t(\Theta) = V_0(\Theta) + \overline{G}_t(\Theta).$$

A lényeg, amit lépésenként megkövetelünk

$$(\Delta\Theta_t)\, S_{t-1} = 0$$

ami a skaláris szorzásra invariáns, azaz

$$(\Delta\Theta_t)\, \overline{S}_{t-1} = 0.$$

9.1. Megjegyzés. *A* Θ *önfinanszírozó akkor ebből* Θ_t^0 *előre jelezhető. Ez a szükséges pénzeszköz, és a többiből ez egyenlet-átrendezéssel adódik.*

9.1.7. Megengedett stratégiák

Legyen $\mathbf{\Theta}$ az önfinanszírozó stratégiák osztálya.

9.2. Definíció. *Egy* $\Theta \in \mathbf{\Theta}$ *önfinanszírozó startégia portfólió megengedett (admissible) ha minden* $t \in \mathbb{T}$*-re*

$$V_t(\Theta) \geq 0.$$

jelölje ezt $\Theta \in \mathbf{\Theta}_a$ *(ahol a a index az admissible szóra utal).*

9.3. Definíció. *A piacon van erős arbitrázs, ha egy megengedett Θ stratégia esetén,*

$$\begin{aligned} V_0(\Theta) &= 0, \\ V_t(\Theta) &\geq 0 \text{ minden } t \in \mathbb{T} \\ E(V_T(\Theta)) &> 0. \end{aligned}$$

azaz ha átlaghozam pozitív, vagy másképpen pozitív valószínűséggel pozitív.

9.4. Definíció. *Egy piaci modell életképes, ha minden $\Theta \in \mathbf{\Theta_a}, V_0(\Theta) = 0 - ra$*

$$V_T(\Theta) = 0$$

$P = 1$ valószínűséggel.

9.5. Definíció. *Gyenge arbitrázs van ha*

$$\begin{aligned} V_0(\Theta) &= 0, \\ E(V_T(\Theta)) &> 0. \end{aligned}$$

9.1. Tétel. *Ha van gyenge arbitrázs, akkor van erős is.*

Azaz NA akkor és csak akkor, ha a piac a korábban használt értelemben életképes. Erre a tételre azért van szükség mert korábban a gyenge arbitrázs fogalommal operáltunk, azt tudjuk a szokott konstrukcióval bizonyítani, viszont szeretnénk az erőset is kizárni.

9.2. Bizonyítás. *Tegyük fel, hogy Θ gyenge arbitrázs. és $V_t(\Theta)$ nem mindig nemnegatív (ha az akkor kész vagyunk, hiszen akkor erős is), azaz létezik $t < \mathbb{T} : A \in \mathrm{F}_t, a_t(\omega) < 0, \omega \in \Omega$,hogy*

$$\begin{aligned} \Theta_t S_t &= a_t(\omega) < 0 \\ \Theta_u S_u &\geq 0 : \forall u > t. \end{aligned}$$

Ezzel kiválasztottuk azt az időpontot, hogy onnan a stratégia megengedett T-ig. Új stratégiát készítünk. Legyen az eredeti stratégia

$$\begin{aligned} \alpha &= \Theta^0 = (\Theta)^0, \\ \beta &= \Theta^{\underline{d}} = (\Theta^1, ...\Theta^d) \end{aligned}$$

az új pedig $\Psi = \left(\Psi^0, \Psi^{\underline{d}}\right)$.

Legyen

$$\Psi_u(\omega) = \begin{cases} 0 & ha \quad \omega \in \Omega \backslash A \quad u \in \mathbb{T} \\ 0 & ha \quad \omega \in A \quad\quad u \leq t \end{cases}$$

$$\Psi_u^0(\omega) = \alpha_u(\omega) - \frac{a_t(\omega)}{S_t^0} \text{ } ha \ \omega \in A, u > t$$
$$\Psi_u^d(\omega) = \Theta_u^d(\omega) \text{ } ha \ \omega \in A, u > t$$

ekkor Ψ *önfinanszírozó. Ugyanis* A^c*-n* $V_t(\Psi) = 0$ *mindvégig. Az* A*-n pedig elég ha belátjuk, hogy*

$$(\Delta\Psi_{t+1}) S_t = 0 \ \forall\omega \in A.$$

De

$$\Delta\Psi_{u+1} S_u = \Delta\Theta_{u+1} S_u : \forall u > t+1, \forall\omega \in A.$$

azaz csak $t+1$*-ben térnek el a definíció szerint, utóbbi pedig* 0*, mert* Θ *önfinanszírozó. Marad az* $u = t+1$.

$$\Delta\Psi_{t+1}^0 = \Psi_{t+1}^0 = \Theta_{t+1}^0 - \frac{a_t}{S_t^0} = \Theta_{t+1}^0 + \frac{|a_t|}{S_t^0}$$

hiszen $a_t < 0$ *továbbá* $\Delta\Psi_{t+1}^d = \Psi_{t+1}^d = \Theta_{t+1}^d$ *ebből*

$$\begin{aligned}(\Delta\Psi_{t+1}) S_t &= \mathbf{1}_A(\Theta_{t+1} S_t - a) \text{ } de \ ez \ önfinanszírozó. \ Így \\ &= \mathbf{1}_A(\Theta_t S_t - a) = 0.\end{aligned}$$

Most belátjuk, hogy van erős arbitrázs azaz

$$V_T(\Psi)(\omega) > 0$$

valamilyen $P(A) > 0$ *halmazon.*

Belátjuk, hogy Ψ megengedett és

$$V_u(\Psi) \geq 0, \text{ és}$$
$$V_T(\Psi) > 0 \ A\text{-n}$$

Tudjuk, hogy $V_u(\Psi)(\omega) = 0$ A^c-n, és A-n ha $u \leq t$.

Legyen most $u > t$ és $\omega \in A$.

$$\begin{aligned}V_u(\Psi) = \Psi_u S_u &= \Psi_u^0 S_u^0 + \Psi_u^d S_u^{1..d} \\ &= \Theta_u^0 S_u^0 - a\frac{S_u^0}{S_t^0} + \Theta_u^d S_u^d \\ &= \Theta_u S_u - a\frac{S_u^0}{S_t^0} \\ &= V_u(\Theta) - a\frac{S_u^0}{S_t^0} \geq 0\end{aligned}$$

mert $a < 0, S_u^0 \geq 0, S_t^0 \geq 0$ (t választása szerint). Viszont $V_T(\Theta) \geq 0$, de $A - n$ $V_T(\Theta) > 0$ is igaz. így $V_T(\Psi) > 0$ is, de akkor

$$E(V_T(\Theta)) > 0$$

vagyis Ψ-re is van arbitrázs és az erős is, mert Ψ megengedett.

9.1.8. Az arbitrázs mentességen alapuló ár egyértelműsége

Legyen H egy derivatív, T lejárattal . Ez az (Ω, F, P)-n F_T mérhető vv.

9.6. Definíció. *H szintetizálható, ha létezik Θ fedezeti portfóli, amelyre*

$$V_T(\Theta)(\omega) = H(\omega) \quad \forall\omega.$$

Nem lehet $\Theta' \neq \Theta : V_T(\Theta) = V_T(\Theta')$ ez sértené az egyetlen ár törvényét (az arbitrázs kizárását) ott ahol a

$$V_t(\Theta) \neq V_t(\Theta'). \tag{9.1}$$

Ha ilyen t nincs, akkor a két folyamat, két stratégia nem megkülönböztethető.

9.2. Lemma. *Legyen a piac életképes. Ha H szintetizálható, akkor minden Θ, Θ'-re, $0 \leq t \leq T$-re*

$$V_t(\Theta) = V_t(\Theta'). \tag{9.2}$$

9.3. Bizonyítás. *Tegyük fel, hogy Θ, Φ megengedett startégiák. $(V_t(.) \geq 0)$.*

$$V_T(\Theta) = V_T(\Phi) = H. \tag{9.3}$$

továbbá, hogy létezik $t < T$:

$$V_t(\Theta) \neq V_t(\Phi) \tag{9.4}$$

$$V_u(\Theta) = V_u(\Phi) \tag{9.5}$$

azaz itt válnak szét először. Akkor legyen

$$A = \{\omega : V_t(\Theta) > V_t(\Phi)\}$$

és tegyük fel, hogy $P(A) > 0$ (ha nem szerepcsere!). Legyen $X = V_t(\Theta) - V_t(\Phi)\,(> 0)$. Konstruálunk egy Ψ stratégiát.

$$\Psi_u(\omega) = \Theta_u(\omega) - \Phi_u(\omega) : [u \leq t, \omega \in A] \,\&\, [\forall u, \omega \in A^c]$$
$$\Psi_u^0 = \beta_t X : u > t, \omega \in A \text{ végig pénzben tarjuk az arbitrázs. nyereséget}$$
$$\Psi_u^d = 0 : \; u > t, \omega \in A$$

Mivel Θ, Φ önfinanszírozó, ezért ez igaz Ψ-re is, ha $u \leq t$, ill. $u > t, \omega \in A^c$. Ellenőrizni kell t-re A-n.

$$\Psi_t S_t = V_t(\Theta) - V_t(\Phi)$$
$$\Psi_{t+1} S_t = 1_{A^c}(\Theta_{t+1} - \Phi_{t+1}) S_t + 1_A \beta_t X S_t^0$$

és $\beta_t^{-1} = S_t^0, X = V_t(\Theta) - V_t(\Phi)$

$$\begin{aligned}\Psi_{t+1} S_t &= 1_{A^c}(\Theta_{t+1} - \Phi_{t+1}) S_t + 1_A [V_t(\Theta) - V_t(\Phi)] \\ &= 1_{A^c}(V_t(\Theta) - V_t(\Phi)) + 1_A [V_t(\Theta) - V_t(\Phi)]\end{aligned}$$

azaz

$$(\Psi_{t+1} - \Psi_t) S_t = 0$$

vagyis Ψ *önfinanszírozó.* $V_0(\Theta) = V_0(\Phi)$ *a* Ψ *kezdő értéke* 0.

$$V_T(\Psi) = 1_A\left(\beta_t X S_t^0\right) > 0$$

1 valószínűséggel az A-n, azaz van gyenge arbitrázs, de akkor van erős arbirázs is, ami ellentmondás.

9.2. Az arbitrázs árazás martingál mértéke

Mindvégig életképes, azaz arbitrázs mentes piacokat vizsgálunk. $\overline{S}$-t akarjuk $\Delta\overline{S}$-ekkel leírni. Legyen $X_t, t \in \mathbb{T}$. sztohasztikus folyamat. Tegyük fel, hogy F_t-t az $\{X_0, X_1 ... X_t\}$ generálja vagyis ebben X_t persze mérhető.

9.2.1. Ekvivalens martingál mértékek

9.3. Lemma. *Ha* $\overline{S}$, *a diszkontált árvektor martingál akkor a* Θ *egy stratégiára esetén* $\overline{V}(\Theta)$ *is martingál.*

9.4. Bizonyítás. *Legyen* $\Theta \in \mathbf{\Theta}_a$ *megengedett stratégia. Az* $\overline{S}$ *martingálsága azt jelenti, hogy valamely* Q *mérték melett minden* t*-re*

$$E_Q\left(\Delta\overline{S_t}\right) = 0$$

ekkor

$$\overline{V}_t(\Theta) = \Theta_t \overline{S}_t = V_0 + \sum_{u=1}^{t} \Theta_u \Delta\overline{S}_u$$

de így a diszkontált értékfolyamat egy konstans és egy martingál transzformált összege, azaz maga is martingál.

9.7. Definíció. *P˜Q ekvivalens valószínűségi mértékek, ha null halmazaik azonosak. Ekvivalens martingál mértékek (EMM), ha az árvektor martingál rá(juk) nézve. (Ez koordinátánkénti martingálságot jelent).*

9.2. Megjegyzés. *Ha feltesszük, hogy a diszkrét atomos Ω-n csak olyan valószínűségi mértékeket tekintünk, amikre minden atom pozitív valószínűségű, akkor ezzel eleve leszűkítjük vizsgálatunkat ekvivalens mértékekre.*

9.1. Következmény. *Ha létezik (ekvivalens) martingál mérték (EMM) akkor nincs arbitrázs (NA), ekkor*

$$E_Q\left(\overline{V}_T(\Theta)\right) = E_Q(V_0(\Theta))$$

az egyetlen lehetséges ár is egyben.

9.5. Bizonyítás. *Ha ugyanis $V_0(\Theta) = 0$,*

$$E_Q\left(\overline{V}_T(\Theta)\right) = 0, V_T(\Theta) \geq 0$$

Q-majdnem mindenütt, akkor szükségképpen

$$V_T(\Theta) = 0$$

is Q-majdnem mindenütt (különben $E_Q > 0$ lenne). Ha P és Q ekvivalens valószínűségi mértékek akkor arra is ugyanez igaz lesz.

A következőkben be fogjuk látni, hogy az állítás megfordítása is igaz, életképes piacon létezik EMM.

9.2.2. Martingál árazás

Tegyük fel, hogy H egy olyan opciós termék ami $H(\omega)$-t fizet T-ben. Ennek árát jelölje $\pi(H)$ $t = 0$-ban. Életképes piacon ezt meg kéne tudni határozni úgy, hogy minenki méltányosnak tartsa és legyen hozzá Θ_a megengedett stratégia, ami ezt szintetizálja. Ekkor, mivel a piac életképes

$$V_0(\Theta) = \pi(H),$$

és

$$V_T(\Theta) = H.$$

Mivel $V(\Theta)$ martingál transzformált, azaz maga is Q-martingál,

$$\overline{V}_t(\Theta) = E_Q(\beta_T H | \mathcal{F}_t)$$

ezért

$$V_t(\Theta) = \beta_t^{-1} E_Q(\beta_T H | \mathcal{F}_t)$$

speciálisan

$$\pi(H) = V_0(\Theta) = E_Q(\beta_T H | \mathcal{F}_0) = E_Q(\beta_T H)$$

9.8. Definíció. *Azon piacokat, ahol minden származtatott termék előállítható, azaz szintetizálható, teljesnek mondjuk.*

9.2.3. Az EMM egyértelműsége

9.2. Tétel. *Teljes piacon az ekvivalens martingál mérték egyértelmű.*

Ez az opció árazás elméletének egyik alaptétele.

9.6. Bizonyítás. *Tudjuk, hogy minden Q-ra*

$$V_0(\Theta) = E_Q(\beta_T H).$$

Ha tehát H szintetizálható, akkor csak egy $\pi(H)$ ár van, ami független Q-tól. De akkor teljes piacon két EMM-re Q-ra, R-re

$$E_Q(\beta_T H) = E_R(\beta_T H)$$

de ez H tetszőleges valószínűségi változóra igaz, amiből következik, hogy

$$Q = R.$$

Később látni fogjuk, hogy ez fordítva is igaz, azaz ha az EMM egyértelmű, akkor a piac teljes.

Az egységes ár törvénye szerint tehát a szintetizálható H terméket szintetizáló önfinanszírozó stratégia kezdeti értéke a H ára, és ennek kiszámításához nem szükséges a generáló stratégia ismerete csak a Q aminek segítségével a kiszámolható $E_Q(\beta_T H)$).

Legyen újra egy egyperiódusú modellünk

$$H(\omega)\begin{cases} 1 & \text{ha } \omega = \omega' \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

egy fix $\omega\prime \in \Omega$-ra. Ekkor ha H szintetizálható, akkor

$$\pi(H) = E_Q(\beta_T H) = \frac{1}{\beta_T} Q(\{\omega'\}).$$

Ez még β valószínűségi változóra is igaz. $\frac{1}{\beta_T} Q(\{\omega'\})$-t hívják az ω' álllapot árának. Ez az állapot-ár sűrűség függvény.

9.3. A binomiális modell mint martingál

9.3.1. A CRR modell

Legyen $d = 1$, S^0, $S = S^1$, $r > 0$ fix, azaz $S_t^0 = (1+r)^t$, $-1 < a < b$, $\Omega = \{1+a, 1+b\}^{\mathbf{T}\setminus\{0\}}$

$$S_{t+1}^1 = \begin{cases} S_t^1 (1+b) & q \text{ valószínűséggel} \\ S_t^1 (1+a) & 1-q \text{ valószínűséggel} \end{cases}.$$

Az F_t-t generálja $S_0, ...S_t$. Legyen

$$R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} \in \Omega$$

Valamely P-re

$$P(\{\omega\}) = P(R_t = \omega).$$

9.4. Lemma. *$E_Q(\overline{S}_t | F_{t-1}) = \overline{S}_{t-1}$, azaz*

$$E_Q\left(\frac{\overline{S}_t}{\overline{S}_{t-1}} | F_{t-1}\right) = 1$$

akkor és csak akkor, ha

$$E_Q(R_t | F_{t-1}) = 1 + r.$$

9.7. Bizonyítás. *$R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$, $\frac{\beta_t}{\beta_{t-1}} = (1+r)^{-1}$, így, ha Q EMM $\overline{S}$-re*

$$\begin{aligned} E_Q(R_t | F_{t-1}) &= E_Q\left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \frac{\beta_t}{\beta_{t-1}} \frac{\beta_{t-1}}{\beta_t} | F_{t-1}\right) \\ &= \frac{\beta_{t-1}}{\beta_t} E_Q\left(\frac{\overline{S}_t}{\overline{S}_{t-1}} | F_{t-1}\right) \\ &= (1+r) E_Q\left(\frac{\overline{S}_t}{\overline{S}_{t-1}} | F_{t-1}\right). \end{aligned}$$

9.5. Lemma. *$a < r < b$ ez szükséges feltétel az EMM létezéséhez.*

9.8. Bizonyítás. *Az R_t csak $1+a$ vagy $1+b$ lehet. Ezért a várható értéke, $1+r$, ezek közé esik, azaz $a < r < b$.*

9.6. Lemma. *$\overline{S}$ csakkor Q-martingál, ha (R_t) független valószínűségi változók és*

$$Q(R = 1 + b) = q$$
$$Q(R = 1 + a) = 1 - q$$

ahol

$$q = \frac{r - a}{b - a}.$$

9.9. Bizonyítás. *Ha R_t független, akkor*

$$\begin{aligned} E_Q(R_t|F_{t-1}) = E_Q(R_t) &= q(1 + b) + (1 - q)(1 + a) \\ &= q(b - a) + 1 + a = 1 + r. \end{aligned}$$

Fordítva ha martingál., akkor mint előbb láttuk $E = 1 + r$

$$q(1 + b) + (1 - q)(1 + a) = 1 + r$$

amit megoldva adódik q. A függetlenség indukcióval triviálisan látható.

9.1. Gyakorlat. *Lássuk be a függetlenséget indukcióval.*

9.3.2. A CRR árazási képlet (újra)

Mint korábban

$$\begin{aligned} C = C_T &= (S_T - K)^+ \\ V_t(C) &= \beta_t^{-1} E_Q(\beta_T S_T|F_t) \\ S_T &= S_t \prod_{u=t+1}^{T} R_u. \end{aligned}$$

A binomiális modellben R_u $u > t$ független F_t-től

$$\begin{aligned} V_t(X) = \beta_t^{-1}\beta_T E_Q\left(\left[S_t \prod_{u=t+1}^{T} R_u - K\right]^+ |F_t\right) &= \\ (1 + r)^{t-T} E_Q\left(\left[S_t \prod_{u=t+1}^{T} R_u - K\right]^+ |F_t\right) \\ =: v(t, S_t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v(t,x) &= (1+r)^{t-T} E_Q\left(\left[x\prod_{u=t+1}^{T} R_u - K\right]^+ |\mathcal{F}_t\right) \\
&= (1+r)^{t-T}\sum_{u=0}^{T}\binom{T}{u} q^u (1-q)^{T-t-u}\left[x(1+b)^u(1+a)^{T-t-u} - K\right]^+
\end{aligned}
$$

de akkor spec $A = \min\left\{k : S_0(1+b)^k(1+a)^{T-k} > K\right\}$

$$
\begin{aligned}
\pi(C_T) = (1+r)^{-T}&\sum_{u=A}^{T}\binom{T}{u}[q(1+b)]^u[(1-q)(1+a)]^{T-u} S_0 \\
&- K(1+r)^{-T}\sum_{u=A}^{T}\binom{T}{u} q^u (1-q)^{T-u}
\end{aligned}
$$

vagyis megkaptuk újra az árazási formulát.

10. fejezet

Az opció árazás alaptétele

Láttuk, hogy ha van EMM akkor nincs arbitrázs, azaz

$$\exists Q\tilde{}P \Rightarrow NA$$

Belátjuk, hogy fordítva is igaz. Ehhez előkészület egy geometriai állítás

10.1. Elválasztó hipersík tétel

10.1. Tétel. *(Elválasztó hipersík tétel) Legyen $L \subset \mathbf{R}^n$ lineáris altér, $K \subset \mathbf{R}^n$ kompakt, konvex halmaz, $L \cap K = \emptyset$. Ekkor létezik a $K-t$ és $L-t$ elválasztó hipersík, azaz Φ lineáris leképezés, melyre*

$$L \subset \ker \Phi$$

és minden $x \in K$-ra

$$\Phi(x) > 0.$$

10.1. Lemma. *Legyen $C \subset \mathbf{R}^n$ zárt, konvex halmaz, $0 \notin C$ Ekkor létezik a $C-t$ és $0-t$ elválasztó hipersík, azaz Φ lineáris leképezés, melyre*

$$0 \in \ker \Phi$$

és minden $x \in C$-ra

$$\Phi(x) > 0.$$

10.1. Bizonyítás. *Legyen $r > 0, B(x,r)$ olyan, hogy $B = B(x,r) \cap C \neq \emptyset$. Ekkor létezik $z \in D$:*

$$d(0,z) = d(0,C).$$

Igaz az is, hogy minden $x \in C-re$ *is* $d(0,x) \geq d(0,z)$. *Itt* $d(0,x)$ *egyben* $|x| = \sqrt{xx}$ *is. Legyen* $\Phi(x) = xz$ *skalárszorzat a fix* $z-$*vel. Ha* $y = \lambda x + (1-\lambda) z$ *(C konvex) akkor*

$$|y| = |\lambda x + (1-\lambda) z| \geq |z|$$

és

$$|\lambda x + (1-\lambda) z| = \lambda^2 xx + 2\lambda(1-\lambda) xz + (1-\lambda)^2 zz$$

azaz

$$\lambda^2 xx + 2\lambda(1-\lambda) xz + (1-\lambda)^2 zz \geq zz$$
$$\lambda^2 (xx + zz) + 2\lambda(1-\lambda) xz - 2\lambda zz \geq 0$$
$$\lambda(xx + zz) + 2(1-\lambda) xz - 2zz \geq 0$$

minden λ*-ra igy, ha* $\lambda \to 0$ *akkor*

$$xz \geq zz$$

azaz $\Phi(x) = xz \geq zz$ $C-n$. $\Phi(0) = 0$ *trivi.*

10.2. Bizonyítás (Az elválasztó hipersík tétel bizonyítása). *Legyen* $K \subset \mathbf{R}^n$ *kompakt, konvex.*

$$C = K - L = \{x - y : x \in K, y \in L\}.$$

Ekkor C *zárt és konvex. Utóbbi triviális. Belátjuk, hogy zárt.* $x_n \subset C, x_n \to x$ *-ből belátjuk, hogy* $x \in C$ *is. Legyen*

$$x_n = y_n - l_n, y_n \in K, l_n \in L.$$

Mivel K *kompakt létezik* n_i

$$y_{n_i} \to y \in K,$$

legyen

$$l = y - x$$

ez is L *beli mert* L *zárt, de akkor* $x \in C$ *is következik. Alkalmazzuk a lemmát, tudva, hogy* $0 \notin C$. $\Phi(x) \geq |z|, x = y - l$

$$\Phi(y) - \Phi(l) \geq |z| > 0.$$

Ezért minden $\lambda > 0$

$$\Phi(y) - \Phi(\lambda l) \geq |z| > 0$$

amiből $\Phi(l) \leq 0$, de $\lambda < 0-$ból $\Phi(l) < 0$, ellentmondás, azaz $\Phi(l) = 0$.

10.2. A martingál mértékek létezése

Feltesszük, hogy $\Omega = \{\omega_1, ...\omega_n\}$ véges. F végesen generált szigma algebra.

$$C = \left\{ x \in R^n : x_i \geq 0, \sum x_i > 0 \right\}$$

valahol határozottan pozitív vektorok kúpja.

Egy Θ kereskedési stratégiára $V(\Theta), G(\Theta) \in R^n$.

Jelölje $\Theta^d \in R^d$ a kockázatos részét a portfólió vektornak. $\Theta = \left(\Theta^0, \Theta^d\right)$.

10.2. Lemma. *NA azt jelenti, hogy* $\forall \Theta \in \mathbf{\Theta}_a -$*ra ha* $V_0(\Theta) = 0$ *akkor*

$$\overline{V}_T(\Theta) = \overline{G}(\Theta) \notin C.$$

10.3. Bizonyítás. *Legyen*

$$\begin{aligned} \overline{G}_t\left(\Theta^d\right) &= \sum_{s=1}^{t} \Theta_s \Delta \overline{S}_s \\ V_T(\Theta) &= \beta_T^{-1} \overline{V}_T(\Theta) = \beta_T^{-1}\left(V_0(\Theta) + \overline{G}_t\left(\Theta^d\right)\right) \\ &= \beta_T^{-1} \overline{G}_t\left(\Theta^d\right) = \beta_T^{-1} \sum_{s=1}^{t} \Theta_s^d \Delta \overline{S}_s. \end{aligned}$$

Ha $\overline{G}(\Theta) \in C$ *akkor* $\overline{G}_t\left(\Theta^d\right) \geq 0$ *és*

$$P\left(\overline{G}_t\left(\Theta^d\right) > 0\right) > 0$$

de akkor volna gyenge arbitrázs (akkor erős is) ami ellentmond a feltevésne.

10.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a piac véges. NA akkor és csak akkor ha* S*-hez létezik EMM.*

10.4. Bizonyítás. *Ha létezik EMM akkor NA, ezt már láttuk. Most fordítva, tegyük fel, hogy NA.* C *azon* Φ *vv-k kúpja, amikre* $\Phi(\omega) \geq 0$ *és létezik i szigorúan pozitív* $\Phi(\omega_i) > 0$. *A NA miatt* $\overline{G}\left(\Theta^d\right) \notin C$*! Legyen*

$$p_i = P(\omega_i) \overset{\textit{feltevés}}{>} 0.$$

Az $L = \left\{G_t(\Theta) : \Theta^d\right\}$ *lineáris altere az* $\Omega-$*n értelmezett valós függvényeknek. Legyen* $K = \{X \in R^n : E_P(X) = 1\} \subset C$. *Így a szeparáló hipersík tétel miatt létezik* $f:$ *ami elválasztja* $L-t$ *és* K*-t.*

$$f(x) = xq = \sum_{i=1}^{n} x_i q_i, : q \in R^n.$$

Ha $\xi_i = \left(0, ..\frac{1}{p_i}, ...0\right)$ *akkor*

$$E_P(\xi_i) = \frac{p_i}{p_i} = 1$$

azaz $\xi_i \in K$ *és kifeszítik a valószínűségi változók teljes terét.*

$$f(\xi_i) = \frac{q_i}{p_i} > 0$$

vagyis $q_i > 0$. *Legyen*

$$g = \frac{1}{\alpha} f$$

ahol

$$\alpha = \sum_{i=1}^{d} q_i,$$

így

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\alpha} x_i =: \sum_{i=1}^{n} p_i^* x_i.$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1.$$

Legyen P^* *ezen* p_i^*-k *által generált valószínűségi mérték* $P^* \tilde{} P$ *mert*

$$p_i^* > 0.$$

Jelölje E^* *a várható értéket. De* $g = 0$ L*-en , mert* f *az, következésképpen*

$$E^*\left(\overline{G}\left(\Theta^d\right)\right) = 0$$

minden $\Theta^d - re$*, de ebből következik a 8.2 Tétel miatt, hogy*

$$E^*\left(\sum_{s=1}^{t} \Theta_s^d \Delta \overline{S}_s.\right) = 0$$

azaz S martingál P^*-ra nézve.

10.3. Az arbitázs mentesség lokális alakja

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy mit jelent az arbitrázs mentesség egy adott t időpontban.

Véges piacokat fogunk vizsgálni, azaz Ω maga véges. Megint feltesszük, hogy az $\omega \in \Omega$ atomok pozitív valószínűségűek, azaz Ω a bekövetkezhető trajektóriákból áll és az ekvivalens mértékek azok, amelyekre minden atom valószínűsége pozitív.

A véges modellben az $\{\mathcal{F}_t\}$ filtráció valamelyik t eleméhez létezik az $\Omega-$nak olyan $\mathcal{P}_t$ véges partíciója, amely generálja $\mathcal{F}_t$-t, azaz

$$\sigma\left(\mathcal{P}_t\right) = \mathcal{F}_t.$$

A továbbiakban gyakran elég lesz ezekre az $A_i \in \mathcal{P}_t$ eseményekre korlátoznunk vizsgálatainkat.

10.1. Gyakorlat. *Lássuk be, hogy M_t akkor és csak akkor martingál ha*

$$E\left(1_A\left(M_t - M_{t-1}\right)\right) = 0$$

minden $A_i \in \mathcal{P}_{t-1}-re$. Korábban ezt minden $A_i \in \mathcal{F}_{t-1}-re$ láttuk be. (Lásd a 8.2 Gyakorlatot.)

Az egyszerűség kedvéért

$$S^0 \equiv 1.$$

$d = 1.\, (S^0, S)$ a vagyon, (Θ^0, Θ) a portfólió vektor

$$\Delta S_t^0 = 0$$

ezért

$$\Delta V_t = \Delta S_t$$

Ezek a $\Delta V_t - k$ akkor lesznek az origó egyik oldalán, ha ugyanez igaz ΔS_t-re. Ha valamely pozitív valószínűségű $A \in \mathcal{P}_t$-re

$$P\left(\Delta S_t > 0 | A\right) = 1,$$

akkor megvéve $t-1$-ben a részvényt, majd eladva t-ben megszerezzük ΔS_t profitot. Ezért. hogy ez ne álljon fenn (azaz NA) kell,. hogy minden $A - ra$

$$P\left(\Delta S_t = 0 | A\right) = 1$$

vagyis S_t martingál ebben a lépésben.

10.3. Tétel. *Legyen $t > 0$,véges NA piaci modellt véve minden korlátos $\Theta-$ re $A \in F_{t-1} - re$*

$$P(\Delta V_t \geq 0|A) = 1 \Longrightarrow P(\Delta V_t = 0|A) = 1$$

és

$$P(\Delta V_t \leq 0|A) = 1 \Longrightarrow P(\Delta V_t = 0|A) = 1$$

A bizonyítást a fenti gondolatmenet lényegében tartalmazza, az alábbi tétel pedig szintén a szokott stratégia - konstrukcióval adódik.

10.4. Tétel. $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P}, \mathbf{T}, \mathbf{F}, S)$ *diszkrét piaci modell akkor az alábbi állítások ekvivalensek.*
1. van arbitrázs
2. van t és Θ stratégia, hogy

$$\Theta \Delta S_t \geq 0, P(\Theta \Delta S_t > 0) > 0$$

3. van t és Θ^d stratégia, hogy

$$\Theta^d \Delta S_t^d \geq 0, P\left(\Theta^d \Delta S_t^d > 0\right) > 0$$

10.1. Következmény. *Ha egy véges piaci modellben NA akkor minden $t > 0-ra$ minden $x \in \mathbf{R}^d$ vektorra*

$$x \Delta S_t^d \geq 0 \ P.mm. \Longrightarrow x \Delta S_t^d = 0 \ P - mm.$$

10.4. Az arbitrázs geometriai értelmezése

10.1. Definíció. *Legyen $C \subset R^m$. Affin és konvex burkát definiáljuk:*

$$aff(C) = \left\{ x \in R^m : x = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i, c_i \in C, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\},$$

$$conv(C) = \left\{ x \in R^m : x = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i, c_i \in C, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, a_i \geq 0 \right\}.$$

A relatív belseje pedig: a konvex részhalmazainak belseje

$$ri(C) = \{x \in aff(C) : \exists \varepsilon : B(x, \varepsilon) \cap aff(C) \subset C\}.$$

10.3. Lemma. *$K_1, K_2 \neq \emptyset$, konvex akkor és csak akkor választható el ha relatív belsejük diszjunkt.*

10.1. Állítás. *Legyen egy A eseményre* $C_t(A) = conv\{\Delta S_t : \omega \in A\}$.

1. *Véges piaci modellben*

$$NA \Leftrightarrow \forall t : \mathbf{0} \in ri\,(C_t(A)).$$

2. NA ekvivalens azzal, hogy minden A-ra az S_{t-1} értékei az S_t szigorúan konvex ($a_i > 0$) íikombinációi.

10.5. Bizonyítás. *Az első áll. fent láttuk. A 2. a következő módon adódik.* $S^d_{t-1}(\omega) = c$ *minden* $\omega \in A$ *mert* $A \in F_{t-1}$. *A* $C_t(A)$ *vektorai ezért felírhatóak*

$$\alpha(z-c)$$

alakban, ahol $\alpha_i > 0$. *De* $z = \overline{S}_t$ *ezért* $\mathbf{0} \in C_t(A)$ *akkor és csak akkor, ha létezik* α :

$$\alpha(z-c) = \mathbf{0}$$

azaz

$$c = \alpha z.$$

10.5. Az EMM megkonstruálása

Szétszedjük a valószínűségi mezőt, az $A \in \mathcal{P}_{t-1}$ generáló partícióbeli eseményt a következő minimális partició szerint, majd ezeken minden t-re megkonstruáljuk az egylépéses martingált.

Legyenek $A = \cup^n A_k \in \mathcal{F}_{t-1}$ az $\mathcal{F}_t - t$ generáló partíció $\mathcal{P}_t$ nyoma A-n és az

$$a_{i,k} = \left(\Delta S^d_t\right)_i(\omega_k)$$

d-dim vektor elemeinek értéke $A_k - n$ az

$$M = (a_{i,k})_{d\times n}$$

mátrixba rendezve. Előbbi szerint $\mathbf{0} \in \mathbf{C}_t(A)$ előáll szigorúan konvex lineáris kombinációként. Azaz megoldható az

$$M\alpha = 0 \tag{10.1}$$

egyenlet $\alpha > 0$. Ezek az $\alpha_i - k$ az egyben az EMM mint valószínűségi mérték értékei.

10.4. Lemma. (*Farkas Lemma 1902*)*Ha A $m\times n$ mátrix, $b \in R^m$ akkor a következő állítások közül pontosan az egyik áll fenn.*

1.
$$\exists x \geq 0 : Ax = b$$

2.
$$\exists y : yA \leq 0 \text{ és } yb > 0.$$

10.6. Bizonyítás. *Legyen*

$$K = \left\{ k : k = \sum x_i a_i, x_i \geq 0 \right\}$$

az A oszlopvektorai által kifeszített (nem negatív) kúp. Igy, ha $b \in K$ akkor felírható $b = \sum x_i a_i$ módon $x_i \geq 0$. Ha $b \notin K$, akkor létezik elválasztó. funkcionál: $f(x) :\ f(b) > 0, f(k) \leq 0, k \in K$. Ha $f(x) = xy \quad y \in R^n$, akkor $yA \leq 0, yb > 0$. Amit akartunk.

Átfogalmazva:

10.5. Lemma. *Ha M $m \times n$ mátrix, akkor a következő állítások közül pontosan az egyik áll fenn.*
I.
1.
$$\exists x > 0 : Mx = 0$$

2.
$$\exists y : yM \leq 0 \textit{ és } yM \neq 0.$$

illetve
II.
1.
$$\exists x : Mx = b$$

2.
$$\exists z : zM = 0 \textit{ és } zb > 0.$$

Kiolvasva az I 1,2 alternativák az $M\alpha = 0$ $\alpha > 0$ megoldás létezése kizárja az arbitrázst, hiszen ha ez nem állna fenn akkor az alternatíva teljesülne, azaz létezne $\Theta : \Theta M \geq 0$ ami nem azonosan 0 de akkor Θ valóban arbitrázs.

Tehát a **NA** ekvivalens az

$$M\alpha = 0, \alpha > 0$$

megoldhatóságával. Ebből készül az egylépéses EMM a rögzített $A \in \mathcal{P}_{t-1}$-ra vonatkozóan. Legyenek, a partíció elemei $A_1 ... A_n \in \mathcal{P}_t$.

$$P_A() = P(|A).$$

és legyen
$$Q_A(A_k) = \frac{\alpha_k}{|\alpha|}$$
ahol $|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$. Nyilván $Q_A \tilde{} P_A$. Ha egy Y valószínűségi változó $\mathcal{F}_A$ mérhető kosntans kell, hogy legyen az egyes $A_k - n$ azaz
$$Y(\omega) = y_k : \omega \in A_k.$$
Ezért a Q-várható érték:
$$E_{Q_A}(Y) = \sum y_k Q_A(A_k) = \sum \frac{y_k \alpha_k}{|\alpha|},$$
speciálisan, ha $Y = \Delta S_t^d$ akkor $y_k = (a_{i,k})$ korábbi mátrixunk oszlopai, azaz
$$0 = M\alpha = \sum y_k \alpha_k$$
ezért
$$E_Q\left(\Delta S_t^d 1_A\right) = 0.$$
De S^0 konstans ($\omega-$on, $r = 0$! fetettük) így
$$E_Q\left(\Delta \overline{S}_t 1_A\right) = 0$$
is.

Fordítva, ha van Q_A amire
$$E_Q(\Delta S_t 1_A) = 0$$
akkor legyen $\alpha_k = Q_A(A_k)$, Mint fent ekkor $M\alpha = 0$, de akkor 0 előáll szigorúan konvex kombinációként, alkalmazhatjuk az (10.1)-t.

10.2. Állítás. *Véges modellben, az alábbiak ekvivalensek*

1. minden $t > 0$-re $A \in F_{t-1}$ $\mathbf{0}$ felírható a $\Delta S_t^d(\omega) : \omega \in A$ vektorok szigorúan konvex kombinációjakénr,
2. $x\Delta S_t^d \geq 0$ P-mm akkor $x\Delta S_t^d = 0$ P-mm,
3. Létezik $Q_A \tilde{} P_A : E_{Q_A}(\Delta S_t 1_A) = 0$.

10.5. Tétel. *Az alábbi állítások ekvivalensek*

1. az értékpapír piac (konzisztens) életképes (azaz NA).
2. minden $t \in \mathbf{T}$,x F_{t-1} mérhető vektorra $x\Delta S_t^d \geq 0$ P-mm akkor $x\Delta S_t^d = 0$ P-mm.
3. Létezik $Q \tilde{} P$ EMM.

10.7. Bizonyítás. *A bizonyítás a fentiek összerakása.* 1. $\Longrightarrow$ 2. *volt az előző fejezetben.* 3. $\Longrightarrow$ 1. *e fejezet elején. Kell még* 2. $\Longrightarrow$ 3. *Ezt minden A-ra összerakással az most igazoltakból lépésenként. Legyen* $\Omega = A_0 \supset A_1 \supset ..A_T = \{\omega\}$

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= Q_{A_1} Q_{A_2} .. Q_{A_{T-1}} = \\ & Q(A_1|A_0) \, Q(A_2|A_1) \dots Q(\omega|A_{T-1}) \end{aligned}$$

Tetszőleges $A \in \mathrm{F}_{t-1} - re$

$$Q(\omega|A) = 1_A Q(A_t|A) \, Q(A_{t+1}|A_t) \dots Q(\omega|A_{T-1})$$

és tetsz. $\omega \in A - ra$ *ezért*

$$E_Q(\Delta S_t | \mathrm{F}_{t-1})(\omega) = 0$$

tulajdonság öröklődik, azaz Q EMM.

11. fejezet

Teljes piacok

E fejezetben is feltesszük, hogy a piac véges. Van kamat, $S = \left(S^0, S^d\right) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Ha

$$V_T(\Theta) = X$$

akkor $X \geq 0$ szintetizálható, $V_t(\Theta) \geq 0 - n$ keresztül.

11.1. Megjegyzés. *Konzisztens piacon $V_t(\Theta) \geq 0$ elhagyható azaz elég $\Theta \in \mathbf{\Theta}$, nem kell, hogy megengedett legyen azaz $\Theta \in \mathbf{\Theta}_a$, hiszen $X \geq 0$-ból ilyen piacokon következik a Q-EMM-re, hogy*

$$V_t(\Theta) = \beta_t^{-1} E_Q\left(\overline{V}(\Theta) | F_t\right) = \beta_t^{-1} \beta_T E_Q(X|F_t) \geq 0$$

is fennáll

11.1. Tétel. *Egy konzisztens piac csakkor teljes, ha az EMM egyértelmű.*

11.1. Bizonyítás. *Tegyük fel, hogy konzisztens és teljes de létezik, Q, Q' két EMM., amik valahol eltérnek. Legyen X egy feltételes követelés és Θ ami előállítja.*

$$\beta_T X = \overline{V}_T(\Theta) = V_0(\Theta) + \sum_{y=1}^{T} \Theta_t \Delta \overline{S}_t.$$

$$E_Q(\beta_T X) = E_{Q'}(\beta_T X) = V_0$$

$$E_Q(X) = E_{Q'}(X)$$

mert mindkettőn a szumma várható értéke 0. De ez minden X-re speciálisan

$$X = 1_A, \ A \in \mathrm{F}$$

ezért

$$\begin{aligned} Q(A) &= E_Q(1_A) = E_{Q'}(1_A) = Q'(A) \\ Q &= Q'. \end{aligned}$$

Most tegyük fel, hogy Q EMM egyértelmű, de nem teljes, azaz létezik nem előállítható $X \geq 0$. Megint elég a kockázatos részt vizsgálni, mert $\Theta^0 - t$ az előre jelezhető Θ^d meghatározott. Legyen L^0 az összes vv-k tere azonosítható R^n valamely maximum n dimenziós lineáris terével (véges piaci modell!)

$$L = \left\{ c + \sum_{y=1}^{T} \Theta_t \Delta \overline{S}_t, c \in R \right\} \subset L^0.$$

Ha

$$\beta_T X = c + \sum_{y=1}^{T} \Theta_t \Delta \overline{S}_t$$

lenne, akkor előállítható, de nem az, így L valódi altére. Legyen $L^\times$ az ortogonális altér, ami így nem üres. Minden $Q - ra$, minden $Y \in L$-re van $Z \in L^0$, pontosabban $Z \in L^\times$ hogy

$$E_Q(YZ) = 0$$

de akkor $Y = 1$-el

$$E_Q(Z) = 0$$

is. Legyen Q' :

$$\begin{aligned} Q'(\omega) &= Q(\omega) R(\omega) : \\ R(\omega) &= 1 + \frac{Z(\omega)}{2\|Z\|_\infty} : \\ \|Z\|_\infty &= \max\{|Z(\omega)| : \omega \in \Omega\}. \end{aligned}$$

Nyilván $Q'(\omega) > 0, (\Leftrightarrow Q(\omega) > 0)$, így $Q\tilde{\ }Q'$.

$$Q'(\omega) = E_Q(R) = 1$$

azaz valószínűségi mérték, mert $E_Q(Z) = 0$.

$$E_{Q'}(Y) = E_Q(YR) = E_Q(Y) + \frac{1}{2\|Z\|_\infty} E_Q(YZ) = c$$

minden $Y = c + \sum_{y=1}^{T} \Theta_t \Delta \overline{S}_t \in L-$re. Ha $c = 0, E_Q(Y) = 0$.

$$E_{Q'}\left(\sum_{y=1}^{T} \Theta_t \Delta \overline{S}_t \right) = 0.$$

Tehát $\overline{S}$ Q' martingál, ami ellentmond a feltevésnek.

11.1. Teljesség és martingál reprezentáció

Legyen P^* az egyetlen EMM. Ebben a fejezetben belátjuk, hogy a diszkontált árkülönbözetek transzofmáltjai kifeszítik az (ekvivalesn) martingálok terét, azaz minden P^* martingál előáll ezek traszformáltjaként. A következő tétel ennek az észrevételnek a pontos megfogalmazása.

11.2. Tétel. *Egy picai modell, melyre van P^* EMM akkor és csak akkor teljes, ha minden M_t martingálra van olyan előre jelezhető γ_t folyamat, hogy*

$$M_t = M_0 + \sum_{s=1}^{t} \gamma_s \Delta \overline{S}_s^d$$

11.2. Bizonyítás. *Tegyük fel, hogy a modell teljes és az egyszerűség kedvéért $\beta_t = 1$. (Ellenkező esetben tekintsük az $\frac{S}{\beta}$ árfolyamatot és mint tudjuk ez akkor és csak akkor martingál, ha S az) $M_t = M_t^+ - M_t^-$ ezért elég nemnegatív martingálokkal foglalkozni. Legyen*

$$C = M_T,$$

Θ állítsa elő ezt. Azaz

$$V_T(\Theta) = C = M_T,$$

de akkor

$$V_t = E^*(V_T|\mathrm{F}_t) = E(M_T|\mathrm{F}_t) = M_t$$

így a V_t martingál, és a szintetizálhatóság miatt

$$M_t = V_t = V_0 + \sum_{s=1}^{t} \Theta_s^d \Delta S_s^d =: M_0 + \sum_{s=1}^{t} \gamma_s^d \Delta S_s^d.$$

Fordítva, ha C a kifizetési függvény M_t egymartingál, amelyet a

$$M_t = E^*(C|\mathrm{F}_t)$$

definiál, akkor a reprezentáló

$$M_t = M_0 + \sum_{s=1}^{t} \gamma_s^d \Delta S_s^d.$$

Belátjuk, hogy $\Theta^d = \gamma^d, S_{t-1}^0 = M_t - \gamma_t^d S_t^d$ megfelelő. Belátjuk, hogy önfinanszírozó, pontosabban:

$$(\Delta\Theta_t) S_{t-1} = 0$$

használjuk, hogy

$$\Delta M_t = \gamma_t^d \Delta S_t^d$$

(mert a portfólió vektor az új árig van érvényben) és

$$\Delta (fg) = (\Delta f)\, g + f\, (\Delta g)$$

a diszkrét differencia képzés esetén is. (HF)

$$\begin{aligned}(\Delta \Theta_t)\, S_{t-1} &= \Delta M_t - \Delta \left(\gamma_t^d S_t^d\right) + \left(\Delta \gamma_t^d\right) S_{t-1}^d \\ &= \gamma_t^d \Delta S_t^d + \left(\Delta \gamma_t^d\right) S_{t-1}^d - \Delta \left(\gamma_t^d S_t^d\right) = 0.\end{aligned}$$

Tehát. önfinanszírozó. Igaz, hogy $V_t(\Theta) = M_t$, speciálisan $V_T(\Theta) = M_T$. Így a C kifizetés szintetizálható.

11.2. Megjegyzés. *Definíció szerint*

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$$

ezért

$$\begin{aligned}\Delta (fg) &= f_{n+1} g_{n+1} - f_n g_n = f_{n+1} g_{n+1} - f_n g_{n+1} + f_n g_{n+1} - f_n g_n \\ &= (\Delta f_n)\, g_{n+1} + f_n\, (\Delta g_n)\end{aligned}$$

12. fejezet

Megállási idők amerikai opciókra

Ebben a fejezetben az európai opcióknál gazdagabb modellel rendelkező amerkiai opciókat vizsgáljuk. Természetesen most nem szorítkozunk egyszerű call opcióra, mert arról láttuk, hogy az amerikait nem érdemes előbb lehívni.

Egy $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{T}, \mathbf{F}, S)$ piaci modellt tekintünk, ahol most nem szükséges feltenni, hogy az Ω véges, de az idő továbbra is diszkrét. Ha az olvasó számára egyszerűbb atomos Ω-t elképzelni, ezt a továbbiakban is bátran megteheti, a bizonyítások során viszont nem fogunk erre építeni.

A lehívási időpontok valószínűségi változók, hiszen a döntés minden $0 \leq t \leq T$-re bekövetkezhet. Az is világos, hogy ha τ jelöli a véletlen időpontot, amikor a lehívás történik, akkor ez csak az eddig megfigyelt eseményektől függhet, ezért

$$\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t.$$

12.1. Gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Minden* $0 \leq t \leq T$*-re*
$$\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t.$$

2. *Minden* $0 \leq t \leq T$*-re*
$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

12.1. Az amerikai típusú opciók fedezése

Az amerikai opció ára természetesen nem csak a lehívási ártól mint véletlen mennyiségtől függ, hanem az összes közbülső árfolyamértéktől is, azaz a teljes

$\left(S_i^d\right)$ trajektóriától amely egy $d-$dimenziós valószínűségi vektor változó sorozat.

Tegyük fel, hogy az infláció nem valószínűségi változó, azaz

$$S_t^0 = \beta_t$$

kockázatmentes kötvény. Legyen $f = (f_t(S))$ egy amerikai követelés. Azaz bármely időpontban a lehíváskor fennálló kifizetések összesége. Tehát $f_t \geq 0$ valószínűségi változók sorozata. Ha x a kezdeti befektetés akkor a Θ fedezeti portfólió, ha

$$\begin{aligned} V_0(\Theta) &= \Theta_1 S_0 = x \\ V_t(\Theta) &\geq f_t(S_0, S_1 ... S_T) \end{aligned}$$

minden $t > 0$-ra. A Θ fedezeti portfólió minimális,ha

$$V_\tau(\Theta) = f_\tau(S_0, S_1 ... S_T)$$

valamilyen τ megállási időre.

Tisztázni kell a következőket:

1. Létezik-e adott x kezdeti befektetésre önfinanszírozó stratégia?
2. Létezik-e minden x kezdeti befektetésre minimális önfinanszírozó stratégia?
3. Hogyan lehet meghatározni az opció árát?

12.2. Megállási idők és megállított folyamatok

12.1. Definíció. *τ valószínűségi változót megállási időnek nevezzük, ha az $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{F})$ $\mathbf{F}$ filtrációval ellátott valószínűségi mezőn minden $0 \leq t \leq T$-re*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

12.1. Megjegyzés. *A legegyszerűbb megállási idő a $\tau = k$.*

12.2. Gyakorlat. *Lássuk be, hogyha τ megállási idő, $t_0 \in \mathbb{N}$, akkor $\tau + t_0$ is megállási idő.*

Ha τ, σ megállási idő, akkor $\gamma = \max\{\sigma, \tau\}$ is megállási idő.

Ha τ, σ megállási idő, akkor $\gamma = \min\{\sigma, \tau\}$ is megállási idő.

Ha τ, σ megállási idő, akkor $\gamma = \sigma \pm \tau$ is megállási idő.

12.1. Lemma. *Legyen* $\{X_t\}$ *egy* $\mathbf{F}$ *adaptált folyamat. Ha* $B \in \mathcal{B}$ *Borel halmaz és*

$$\tau_B = \min \{k : X_k \in B\}$$

akkor τ_B *is megállási idő. Ezt nevezik a* B *halmaz találati vagy elérési idejének.*

12.1. Bizonyítás. *A feltételekből következik, hogy* $X_k^{-1}(B) \in \mathcal{F}_k$. *Ha* $\tau_B = t$, *akkor*

$$\begin{aligned} \{\tau_B = t\} &= \cap_{i=1}^{k-1} \{\tau_B > i\} \cap X_k^{-1}(B) \\ &= \cap_{i=1}^{k-1} \left\{\Omega \backslash X_i^{-1}(B)\right\} \cap X_k^{-1}(B) \in \mathcal{F}_k. \end{aligned}$$

12.2. Definíció. *Legyen* $\{X_t\}$ *egy* $\mathbf{F}$ *adaptált folyamat és* τ *majdnem biztosan véges megállási idő, akkor*

$$Y(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$$

valószínűségi változó az X *megállításkor felvett értéke. A jobb oldal úgy is értelmezhető mint*

$$X_\tau = \sum_{i=1}^{\infty} X_i 1 \{\tau = i\}.$$

12.3. Gyakorlat. *Lássuk be, hogy* X_τ *valóban valószínűségi változó.*

12.3. Definíció. *Legyen* τ *megállási idő, akkor jelölje*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \forall k \geq 1, A \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k\}$$

halmazrendszert, ez a τ*-t megelőző események szigma algebrája.*

12.4. Gyakorlat. *Lássuk be, hogy* $\mathcal{F}_\tau$ $\sigma-$*algebra és* τ $\mathcal{F}_\tau$*-mérhető.*
Lássuk be, hogy $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} \subset \mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\tau\vee\sigma}$.
Lássuk be, hogy $\{\tau < s\}, \{\tau = s\} \in \mathcal{F}_\tau$.

12.1. Tétel. *Ha* X_t *szupermartingál és* $\sigma \leq \tau$ *korlátos megállási idők, akkor*

$$E(X_t | \mathcal{F}_\sigma) \leq X_\sigma,$$

ha pedig X_t *martingál, akkor*

$$E(X_t | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma.$$

12.2. Bizonyítás. *Legyen* $Y_k = 1\{\sigma \leq k \leq \tau\}$, *nyilván ez* $\mathcal{F}_{k-1}$ *mérhető, ezért előre jelezhető és nem negatív. Legyen* $Z = Y \bullet X$ *transzformált. Mivel* $\tau \leq K$ *korlátos, ezért*

$$|Z_k| \leq |X_0| + |X_1| + ... |X_K|$$

minden $k-ra$, *ezért létezik várható értéke. Nyilván* $Z_0 = 0$ *és* $Z_i = X_\tau - X_\sigma$. *Így*

$$0 = E(Z_0) \geq E(Z_K) = E(X_\tau - X_\sigma).$$

Most tetszőleges $A \in \mathcal{F}_\sigma - ra$ *megszorítva a teljes teret, bevezetve a megfelelő megállási időket, kapjuk, hogy az egyenlőtlenség ezen is fennáll, így igaz az állítás.*

12.4. Definíció. *Ha* (X_k) *sztochasztikus folyamat a* $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{F})$ *téren,* σ *megállási idő, akkor a megállított folyamatot definiáljuk mint*

$$X_t^\sigma = X_{k\wedge\sigma},$$

azaz a megállás után változatlan.

Könnyen látható, hogy $X_t^\sigma = Y \bullet X$ transzformált, ahol $Y_k = 1\{\sigma \geq k\}$ és kapjuk a következő tételt.

12.2. Tétel. *Ha* X *(szuper) martingál,* τ *korlátos megállási idő, akkor* X^τ *is az.*

A tétel állítása nem korlátos megállási időkre gyengébb feltevések melett is igaz, de erre itt nem térünk ki.

12.3. Doob felbontás

12.3. Tétel. *Legyen* $(X_n, \mathcal{F}_n)$ *(szub-) martingál, akkor létezik, egy* m_n *martingál és egy* a_n *előre jelezhető sorozat, hogy*

$$X_n = m_n - a_n.$$

12.3. Bizonyítás. *Legyen* $m_0 = X_0$, $a_0 = 0$ *valamint*

$$m_n = m_0 + \sum_{j=1}^{n} [X_j - E(X_j|\mathcal{F}_{j-1})],$$

$$a_n = \sum_{j=1}^{n} \left[X_{j-1} - E\left(X_j | \mathcal{F}_{j-1} \right) \right],$$

utóbbi nyilván $\mathcal{F}_{n-1}$ mérhető. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} \Delta m_n &= \sum_{j=1}^{n} \left[X_j - E\left(X_j | \mathcal{F}_{j-1} \right) \right] - \sum_{j=0}^{n-1} \left[X_{j+1} - E\left(X_{j+1} | \mathcal{F}_j \right) \right] \\ &= X_n - E\left(X_n | \mathcal{F}_{n-1} \right) \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} \Delta a_n &= \sum_{j=1}^{n} \left[X_{j-1} - E\left(X_j | \mathcal{F}_{j-1} \right) \right] - \sum_{j=0}^{n-1} \left[X_{j+1} - E\left(X_{j+1} | \mathcal{F}_j \right) \right] \\ &= X_{n-1} - E\left(X_n | \mathcal{F}_{n-1} \right) \end{aligned}$$

$$E\left(\Delta m_n | \mathcal{F}_{n-1} \right) = E\left(X_n - E\left(X_n | \mathcal{F}_{n-1} \right) | \mathcal{F}_{n-1} \right) = 0.$$

Nyilván, ha $a \equiv 0$, akkor X maga is martingál.

12.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az X_n martingál egyenletesen integrálható, ha adott $\varepsilon : 0-$hoz létezik $C > 0$, hogy minden n-re*

$$E\left(|X_n| \, 1\left\{ |X_n| > K \right\} \right) < \varepsilon.$$

12.6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az X_n martingál négyzetesen integrálható, ha minden n-re*

$$E\left((X_n)^2 \right) < \infty.$$

12.2. Lemma. *Ha M_n martingál, akkor M_n^2 szubmartingál.*

12.1. Következmény. *Az M_n^2 szubmartingált felbonthatjuk*

$$M_n^2 = m_n + < M >_n$$

alakban, ahol az első tag martingál, a második előre jelezhető és a martingál kvadratikus variációjának nevezik.

12.5. Gyakorlat. *Legyen X_n négyzetesen integrálható matingál és $E\left(X_n \right) = 0$, ekkor*

$$E\left(\left(X_{n+1} - X_n \right) \left(X_{m+1} - X_m \right) \right) = 0$$

ha $n \neq m$ azaz korrelálatlan a növekmény.

12.4. A Snell burkoló

Az egyszerűség kedvéért jelölje a diszkontálással transzformált kifizetési függvény folyamatát

$$X_t = \beta^t C_t.$$

Most a fedezeti portfólió értékét fogjuk vizsgálni teljes piacokon, azaz mint az előző fejezetben láttuk, egyetlen P^* martingál mérték van. Mit jelent a fedezet az amerikai opció esetében? Azt, hogy nem csak a lejárati időpont lehet lehívási időpont, hanem bármely korábbi is. Nyilván a fedezeti stratégia ki kell, hogy elégítse a

$$Z_t \geq X_t \tag{12.1}$$

egyenlőtlenséget minden $0 \leq t \leq T$-re. A Z_t tőkének elegendőnek kell lennie a fedezeti portfólió megvásárlásához, ez igaz T-ben is, ezért $Z_T = X_T$, hiszen több viszont felesleges. A $T-1$ időpontbain is teljesülnie kell (12.1)-nek ezért $Z_{T-1} = X_{T-1}$. Ugyanakkor, ha $T-1$-ben nem történik lehívás, akkor a Z_{T-1} vagyonnak fedeznie kell az X_T követelést. A piac teljes, ezért

$$E^*\left(X_T|\mathcal{F}_{T-1}\right) = E^*\left(Z_T|\mathcal{F}_{T-1}\right)$$

összefüggésből következik, hogy

$$Z_{T-1} := \max\left\{X_{T-1}, E^*\left(Z_T|\mathcal{F}_{T-1}\right)\right\}$$

fenn kell, hogy álljon. Iterálva ezt a gondolatmenetet

$$Z_{t-1} := \max\left\{X_{t-1}, E^*\left(Z_t|\mathcal{F}_{t-1}\right)\right\}$$

definícióhoz jutunk.

12.7. Definíció. *A Z_t folyamatot nevezzük Snell burkolónak.*

15. Figure.

12.4. Tétel. *Ha X_t az $\mathbf{F}-$hez adaptált folyamat. Z_t az X Snell burkolója, akkor*

1. Z_t szupermartingál,

2. Z_t minimális az $X_t - t$ domiáló szupermartingálok között.

12.4. Bizonyítás. *A Z_t definíciójából azonnal következik, hogy*

$$Z_{t-1} \geq E^* \left(Z_t | \mathcal{F}_{t-1} \right),$$

azaz szupermartingál. Tegyük fel, hogy $W_t \geq X_t$ egy másik domináló szupermartingál. Ekkor $W_T \geq X_T = Z_T$. Indukciót végzünk, feltesszük, hogy

$$W_t \geq Z_t$$

igaz. Ezért

$$W_{t-1} \geq E^* \left(W_t | \mathcal{F}_{t-1} \right) \geq E^* \left(Z_t | \mathcal{F}_{t-1} \right),$$

viszont $W_{t-1} \geq X_{t-1}$ is, így

$$W_{t-1} \geq \max \left\{ X_{t-1}, E^* \left(Z_t | \mathcal{F}_{t-1} \right) \right\} = Z_{t-1}.$$

12.2. Megjegyzés. *Vizsgáljuk meg a Z_t Doob felbontását.*

$$Z_t = M_t - a_t,$$

ahol M_t martingál és mivel Z_t szupermartingál, ezért a_t nem csökkenő, előre jelezhető. Ahol a_t eltűnik, ott Z_t martingálként viselkedik, ahol $a_t > 0$ ott szupermartingálként. Mivel a martingálok terét kifeszítik az előre jelezhető (sőt önfinanszírozó) stratégiák, ezért van olyan $\Theta = \Theta^d$, hogy

$$M_t = Z_0 + \sum_{i=1}^{t} \Theta_i \Delta X_i.$$

Ebből látszik, hogy

$$M_t \geq Z_t \geq X_t.$$

A Θ^0 numéraire tagot hozzávéve $\left(\Theta^0, \Theta^d\right)$ stratégiához jutunk, ami a kezdeti Z_0 vagyon melett fedezetet biztosít az X-re. Ezzel egyben a racionális árat is megkaptuk, az maga Z_0.

12.5. Optimális megállás a vevő számára

Ebben a fejezetben a teljes piacon kínált amerikai opció vevőjének optimális stratégiáját vizsgáljuk. Az előzőekben láttuk, hogy a kiírónak a Z_t fedezettel kell rendelkeznie és van Θ szintetizáló portfólió, ami a Z_t-hez még szükséges készpénzzel kiegészítve fedezeti stratégia is. Most tehát a vevő döntését vizsgáljuk, azt, hogy mikor hívja le az opciót. Mivel a vevő nem ismeri a jövőt, döntése egy τ megállási idő lesz. A legegyszerűb példa a megállási időre a

$$\tau = 1_k$$

fix idejű megállítás illetve egy Y_t folyamatot figyelve az $Y_t = c$ nívó első elérésének ideje, azaz

$$\tau = \min\{k : Y_k \geq c\}\,.$$

Nyilván mindkét példa valóban megállási idő.

16. Figure.

12.8. Definíció. *Legyen X_t a diszkontált követelés, Z_t pedig ennek Snell burkolója*

$$\tau^* = \min\{k : Z_k = X_k\}\,,$$

legyen továbbá $Z_t^* = Z_t^{\tau^*}$ az e szerint megállított fedezeti folyamat.

12.3. Lemma. *A τ^* valószínűségi változó megállási idő.*

12.6. Gyakorlat. *Bizonyítsuk be a 12.3 Lemma állítását.*

12.4. Lemma. *A Z_t^* folyamat martingál.*

12.5. Bizonyítás. *Tekintsük a $\Theta_k = 1_{\{\tau^* \geq k\}}$ előre jelezhető folyamatot és készítsük el ezzel a megállított $Z^* - t$. A Z_t konstrukcióból világos, hogy a $k < \tau^*$ időpontokban $Z_i > X_i$, ezért*

$$Z_i = E^* \left(Z_{i+1} | \mathcal{F}_i \right)$$

ami éppen azt jelenti, hogy a megállításig martingál, utána pedig triviálisan az, hiszen állandó.

Mint korábban is kockázat semleges befektetőket vizsgálunk, ezért indokolt a következő definíció.

12.9. Definíció. *Legyen Υ a $\tau \leq T$ megállási idők halmaza. τ megállási idő optimális, ha*

$$E \left(X_\tau \right) = \max_\sigma E \left(X_\sigma \right).$$

12.1. Állítás. *A τ^* megállási idő optimális és*

$$Z_0 = E^* \left(X_{\tau^*} \right) = \max_\sigma E \left(X_\sigma \right) \tag{12.2}$$

12.6. Bizonyítás. *Tudjuk, hogy Z^* martingál, ezért*

$$Z_0 = Z_0^{\tau^*} = E^* \left(Z_T^{\tau^*} \right) = E^* \left(Z_{\tau^*} \right) = E^* \left(X_{\tau^*} \right).$$

Ugyanakkor egy tetszőleges σ megállási időre Z^σ szupermartingál, ezért

$$Z_0 = E^* \left(Z_0^\tau \right) \geq E^* \left(Z_\tau \right) = E^* \left(X_\tau \right).$$

A következőkben az optimális megállási időket fogjuk karakterizálni.

12.2. Állítás. *Legyen $\sigma \in \Upsilon$, σ akkor és csak akkor optimális, ha igaz a következő két feltétel:*

1.

$$P^* \left(Z_\sigma = X_\sigma \right) = 1$$

2.Z^σ martingál.

17. Figure.

12.7. Bizonyítás. *Ha Z^σ martingál, akkor*

$$Z_0 = E^*\left(Z_0^\sigma\right) = E^*\left(Z_T^\sigma\right) = E^*\left(Z_\sigma\right) = E^*\left(X_\sigma\right).$$

Tetszőleges $\tau \in \Upsilon$ esetén Z^τ szupermartingál és dominálja X-et, ezért

$$Z_0 = E^*\left(Z_0^\tau\right) \geq E^*\left(Z_T^\tau\right) = E^*\left(Z_\tau\right) \geq E^*\left(X_\tau\right),$$

amiből következik, hogy σ optimális. A fordított irányban a következő képpen okoskodunk. Felhasználva (12.2)*-t és σ optimalitását illetve a dominanciát*

$$\begin{aligned} Z_0 &= \max_{\tau \in \Upsilon} E^*\left(X_\tau\right) \\ Z_0 &= E^*\left(X_\sigma\right) \leq E^*\left(Z_\sigma\right). \end{aligned}$$

Ugyanakkor Z^σ szupermartingál, ezért

$$Z_0 \geq E^*\left(Z_\sigma\right),$$

ezért

$$Z_0 = E^*\left(X_\sigma\right) = E^*\left(Z_\sigma\right),$$

viszont megint a dominálás miatt $X_\sigma = Z_\sigma$ is kell, hogy teljesüljön. Annak bizonyítását, hogy Z^σ martingál elhagyjuk. Lényegében abból következik, hogy nem lenne optimális a σ ha a Z-nek szupermartingál szakaszát is tartalmazná, mint az az 17 Ábrán látható.

Tekintsük megint a $Z_t = m_t - a_t$ Doob felbontást.

12.10. Definíció. *Legyen*

$$\nu(\omega) = \begin{cases} T & ha \quad a_T(\omega) = 0 \\ \min\{k \geq 0 : a_{k+1} > 0\} & ha \quad a_T(\omega) > 0. \end{cases}$$

12.7. Gyakorlat. *Lássuk be, hogy $\nu \in \Upsilon$.*

12.3. Állítás. *A ν megállási idő a legnagyobb optimális megállási idő.*

12.8. Bizonyítás. *Ha $s \leq \nu(\omega)$, akkor*

$$Z_s(\omega) = M_s(\omega) - a_s(\omega) = M_s(\omega),$$

tehát Z^ν martingál. A 12.1 Állítás alapján következik, hogy ν optimális, ha belátjuk, hogy

$$Z_\nu = X_\nu.$$

Ehhez tekintsük a

$$\begin{aligned} Z_\nu &= \sum_{s=0}^{T-1} 1_{\{\nu=s\}} Z_s + 1_{\{\nu=T\}} Z_T \\ &= \sum_{s=0}^{T-1} 1_{\{\nu=s\}} \max\{X_s, E^*(Z_{s+1}|\mathcal{F}_s)\} + 1_{\{\nu=T\}} Z_T \end{aligned}$$

összefüggést. Viszont tudjuk azt, hogy

$$\begin{aligned} E^*(Z_{s+1}|\mathcal{F}_s) &= E^*(M_{s+1} - a_{s+1}|\mathcal{F}_s) \\ &= M_s - a_{s+1}, \end{aligned}$$

ugyanakkor $\{\nu = s\} - n$ esemény melett igaz, hogy $a_s = 0, a_{s+1} > 0$, ezért

$$Z_s = M_s$$

továbbá

$$E^*(Z_{s+1}|\mathcal{F}_s) < Z_s.$$

A Z definíciója szerint, akkor $Z_s = X_s$. Az hogy ν a legnagyobb optimális megállási időkiolvasható az 17 Ábrából.

13. fejezet

Újabb modellek felé

13.1. A Black-Scholes modell korlátai

Mint azt láttuk, Black-Schole modell rendkívül egyszerű és tömör eredményre vezet

$$V_0 = S_0 \Phi\left(d_+\right) - e^{-rT} K \Phi\left(d_-\right).$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlás függvénye. A diszkrét modell független bináris eseményekre épített ezek biomiális eloszláshoz vezettek, aminek a határeloszlása a normális. Történetileg először a matematikailag lényegesen bonyolultabb Black-Schole elmélet jött létre, ahol eleve feltevés, hogy az árak logaritmusa minden időpontban normális eloszlást követ, mi több feltevés, hogy szórás állandó. E feltevés következménye az is, hogy a logartimus független növekményű folyamat. A tőzsdei árfolyamok statisztikai elemzése mindhárom feltevéssel ellentétes eredményeket produkált. A következő jelenségek figyelhetőek meg.

1. A szórás nem állandó.
2. A folyamat jobban oszcillál mint a normális, nincs is szórás, nem normálisak a peremeloszlások.
3. Nem függetlenek a logaritmikus növekmények.

Ennek fényében kell a modellt bővíteni, más modellt keresni.

A tőzsdei áringadozás vizsgálatával 1903-ban írott doktori értekezésében Bachelier foglalkozott először. Tévesen arra a megállapításra jutott, hogy az eloszlás normális. Ugyanakkor megfigyelése alapján azt az állítást szűrte le, hogy t idő elteltével az ára nagy valószínűséggel a

$$\left(P - ct^{1/2}, P + ct^{1/2}\right)$$

intervallumba fog esni. Megfigyelte, hogy P és c részvényenként változik, de a t kitevője, 1/2 univerzális. Ma már tudjuk, hogy ez a Wiener folyamat sajátossága (illetve a centrális határeloszlás tétel következménye), amely szerint a t időpillanatban a szórás $\sqrt{t}$-vel arányos. Ha helyesen a log-normális eloszlást haszáljuk, akkor a

$$\left(\log P - ct^{1/2}, \log P + ct^{1/2}\right)$$

intervallumot kapjuk.

Nyilván c játsza a szórás szerepét, amit később mi skálaparaméternek is fogunk nevezni. A pénzügyi világ $c-$t volatility-nek nevezi. A NewYork-i tőzsde 11 napi indexéből

$$c = 0.0110875$$

a napi "historical volatility". A hagyományt követve térjünk át az éves százalékban kifejezett múltbéli volatilitásra. Egy évben körülbebül 256 kereskedési nap van, azaz 16^2. Ezért az éves volatilitás

$$c_{ann} = 17.74\%.$$

A kellemetlenség ott kezdődik, hogyha a tapasztalati szórást a szokott módon kezdjuk számolni az

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

képlet segítségével, akkor azt tapasztaljuk, hogy az n növekedtével s nő, ahelyett, hogy egyre pontosabban közelítene egy fix σ, illetve c értéket. Keressünk ezért egy másik mérési, becslési módot.

13.2. Hosszúság és térfogat mérés, fraktálok

Kezdjük az alapoknál. Ha egy országúton távolságot kívánunk mérni megtehetjük ezt azzal, hogy megszámoljuk, hány lépést kell a kijelölt pontok között megtenni. Ha lépésünk egységnyi, akkor ezzel azt kapjuk, hogy N lépést számolva, a távolság $L = N$. Ha egy (az egyszerűség kedvéért négyzet alakú) mező területét akarjuk meghatározni, lépjük le az oldalát. Ha az eredmény 100 képzeljük el a lépések alkotta felosztást minkét irányban, majd az összes párhuzamost berajzolva az így kapott kis négyzeteket. természetesen az egység oldalú kis négyzetek száma $D = N^2$ lesz. Azaz az L hosszúsághoz

$$D = L^2$$

terület tartozik. A 2 kitevő erősen emlékeztet síkunk kétdimenziós voltára. Kicsit átfogalmazva ha a hossszúság $A-$szorosára nő, akkor a terület

$$D_{AL} = A^2 L^2$$

A^2-szeresére. Ha igazán nem is a területre vagyunk kíváncsiak, hanem a vizsgált tér arra a tulajdonságára, hogy a hossz és a terület milyen dimenziót rejt, akkor tekintsük a

$$\dim = \frac{\log D_{AL}}{\log AL}$$

alakot. Mandelbrot [B1] javasolta a mérésnek ezt a módját például a Britt szigetek kerületének mérésére, pontosabban annak kiderítésére, hogy a partvonal milyen dimenziós. Meglepetéssel tapasztalta, hogy a ceruzával követős módon kapott 1 dimenzió helyett más eredményre jut. Tekintsünk egy nagyléptékű térképet, amin 1 cm megfelel 1 km-nek. Vonalzónkkal elvégezve kapunk egy hosszat. H_1, végezzük el most a mérést túristaként körbesétálva, megszámolva a lépéseket (tegyük fel, hogy lépéseink hossza azonos és 1 méter). A kapott hossz H_2 jóval nagyobb mint H_1. Furcsa, de érthető, hiszen gyalog befordulhattunk azokba a kis kanyarokba is, amik jóval rövidebbek mint 1 Km , azaz a vonalzó nem tudta azt követni. Ezután sziszifuszi munkával mérjuk le 10 cm-es kisarasszal, 1 cm-es egységekkel, sorra így tovább. Kapjuk a H_1, H_2, H_3...sorozatot. Számoljuk ki a

$$1 - D = \frac{\log H_{10^{-i}E}}{\log 10^{-i}E}$$

hányadost. Esetünkben az adódik, hogy a tengerpart hosszának dimenziója $1 < D - 1 < 2$. Az így mért dimenziót szokás Haussdorf dimenziónak nevezni.

A terület illetve a térfogat mérésre két további példát is veszünk.

13.1. Példa. *Tekintsük a rekurzióval építhető következő fát, amit Vicsek fának is neveznek.*

18. Figure.

rekurzió a Γ_1 ötpontú gráfból indul. Ennek másolataiból alakítjuk ki a $\Gamma_2 - t$. Majd ugyanezt folytatjuk Γ_2-vel hogy a $\Gamma_3 - t$ kapjuk. Mérjük a távolságot a szokásos gráftávolsággal, azaz a két csúcspont közötti legrövidebb éleken át haladó úttal. Világos, hogy a Γ_i átmérője

$$L_i = 23^i.$$

Mérjük meg a térfogatot az L függvényében. Könnyen látható, hogy a Γ_i blokk $V_i = V(L_i) = 5^i$ csúcsot tartalmaz. Az érték más 3^i átmérőjű gömbökre közelítőleg ugyanez. Ezzel azt kapjuk, hogy

$$d_H = \frac{\log V_i}{\log L_i} = \frac{\log 5}{\log 3}.$$

A Vicsek fa térfogati dimenziója tehát $\frac{\log 5}{\log 3} = 1.4650.$

Érdekes összevetni ezután még egy jellemző mennyiség viselkedését a közönséges $\mathbb{Z}^d$ rács és a Vicsek fa esetén. Ez pedig az ellenállás illetve annak dimenziója. Ezen azt értjük, hogy az egyes éleket egyégnyi vezetőképességű drótoknak tekintjük és mérjük az ellenállást mondjuk az közös középpontú r és $2r$ sugarú gömb felszíne között. Jelölje ezt $R(r)$

13.1. Gyakorlat. *Lássuk be, hogy $\mathbb{Z}^d$ esetében*

$$R(r) \simeq r^{2-d}.$$

Ha viszont a Vicsek fára rápillantunk, azonnal látható, hogy az ellenállás lineárisan nő r-el, mert nagy r-ek esetén egyetlen út köti össze a két gömböt. Ebből az következik„ hogy a Vicsek fa ellenállás dimenziója $d_R = 1$ nem pedig 2 vagy $d_H = \frac{\log 5}{\log 3}$. Ennek az észrevételnek fontos következménye van a Vicsek fán zajló véletlen bolyongásra vonatkozóan. Jól tudjuk, hogy a közönséges bolyongás a $\mathbb{Z}$-n n lépést téve átlagosan $\sqrt{n}$-nyire távolodik el a kezdőhelytől. Ezt másképp úgy is meg lehet ragadni, hogy azt vizsgáljuk mennyi idő telik el addig amíg a bolyongás r távolságra nem ér a kezdőhelytől. Jelölje ennek véletlen idejét $T_r = \min\{k : d(X_0, X_k) = r\}$. Jelölje ennek várható értékét $E(r)$ Megmutatható, hogy az egészek $\mathbb{Z}^d$ rácsán $d \geq 1$ dimenzióban mindíg

$$E(r) = c_d r^2.$$

Azaz a bolyongási exponens $d_w = 2$ minden d-re. Ugyanakkor a Vicsek fa kiterjedéséhez képest nagy ellenállása miatt

$$E(r) \simeq r^\beta$$

lesz ahol $\beta > 2$ azaz tovább tart kiérni, mint a $\mathbb{Z}^d$-n. Meg lehet mutatni, hogy

$$E(r) \simeq rV(r)$$

azaz a Vicsek fán a bolyongási exponens

$$d_w = 1 + \frac{\log 5}{\log 3} = \frac{\log 15}{\log 3}.$$

A jelenség olyan érdekes, hogy megéri még két példát megemlíteni.

13.2. Példa. *A Sierpinski háromszög. A konstrukció nagyon hasonló az előzőhöz. Tekintsük a három pontú teljes gráfot majd annak két másolatát illeszük össze az ábra szaerint. A kapott gráf két további példányát elkészítve ismételjük meg az összeillesztést.*

19. Figure.

13.2. Gyakorlat. *Lássuk be, hogy a Sierpinski gráfon*

$$d_H = \frac{\log 3}{\log 2}$$

és

$$d_R = 2 - \frac{\log 5 - \log 3}{\log 2}.$$

13.3. Sztochasztikus önhasonlóság

Az előző részben önhasonló struktúrákat mutattunk be, amik a klasszikus bolyongástól, diffúziótól eltérő módon viselkednek, nem a $\sqrt{t}$ idő-tér skázására "hallgatnak". Most egy olyan konstrukciót mutatunk be, amiben nem térbeli hanem időbeli rekurzióval hozunk létre sztohasztikusan önhasonló eloszlásokat.

13.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy X valószínűségi változó (illetve eloszlása) sztochasztikusan önhasonló, ha létezik (C_n) sorozat, hogy ha $X_i\tilde{}X$ független valószínűségi változók, akkor*

$$\frac{1}{C_n}\sum_{i=1}^{n} X_i\tilde{}X.$$

Mint azt tudjuk, a normális eloszlás ilyen értelemben önhasonló mégbepig $C_n = \sqrt{n}$ választás mellett. Számos más önhasonló eloszlás is ismert, a következőkben röviden bevezetjük ezt az eloszlás családot. Kérdés az, hogy milyen más C_n sorozatokra létezik ilyen eloszlás, például $C_n = n$ lehetséges-e, $C_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ milyen α melett lehetséges. Kicsit pongyolán $C_n - t$ nevezzük az eloszlás skála paraméterének.

Abban az esetben, ha létezik ilyen α, akkor azt mondjuk, hogy az eloszlás (Haussdorf) dimenziója α.

13.2. Definíció. *Az X valószínűségi változó stabilis eloszlású, ha létezik $(C_n), (D_n)$ sorozat, hogy ha $X_i\tilde{}X$ független valószínűségi változók, akkor*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\tilde{}C_nX + D_n$$

és szigorúan stabil, ha $D_n \equiv 0$. Azt mondjuk, hogy az eloszlás $\alpha-$stabil, ha

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\tilde{}n^{\frac{1}{\alpha}}X + Dn$$

13.3. Gyakorlat. *Lássuk be, hogy a Cauchy eloszlás 1-stabil.*

13.1. Megjegyzés. *Stabil eloszlások, csak* $0 < \alpha \leq 2$ *léteznek, ha* $\alpha = 2$ *akkor az eloszlás a normális eloszlás. Ha* $\alpha < 2$ *akkor az eloszlásnak nincs szórása, ha* $\alpha = 1$ *akkor várható értéke sincs. Ezeknek az eloszlásoknak a vizsgálata a karakterisztikus függvényük segítségével lehetséges, amely a konvolúciót a jól kezelhető hatványba transzformálja. A tőzsdei áringadozások megfigyelései arra engednek következtetni, hogy egy adott pillanatban az ár logaritmusa nem normális hanem stabilis eloszlást követ. Az alapvető kérdés ekkor a* D *illetve* C *paraméterek mérése. Természetesen, ha nincs szórás, akkor a tapasztalati szórás "felrobban", nem alkalmas a* C_n *becslésére.*

Felmerül a kérdés, hogyan lehet akkor a C_n skálaparamétert mérni. Mielőtt erre rátérnénk, bevezetjük a stabilis eloszlások képére definiálható sztohasztikus folyamatokat, hoszen minket nem csak egy pillanatfelvétel, hanem az árfolyamat egésze érdekel.

13.3. Definíció. *Az* X_t *folytonos idejű sztochasztikus folyamatot Lévy folyamatnak nevezzük, ha*

1. $X_0 = 0,$

2. X_t *független növekményű, azaz minden* n *re minden* $t_1 < t_2 < ...t_n$ *időkre*

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_4} - X_{t_3}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

függetlenek

3. X_t *homogén, azaz*

$$X_{t+s} - X_t \tilde{} X_s - X_0$$

valamint teljesít két folytonossági feltevést amit itt nem ismertetünk.

13.4. Definíció. *Az* X_t *sztochasztikus folyamatot stabilnak nevezzük, ha minden* k*-ra a véges* k*-dimenziós eloszlásai, azaz a* $(X_{t_1}, ...X_{t_k})$ *valószínűségi vektor változó (koordinátánkét) stabilis eloszlású.*

13.5. Definíció. *Az* X_t *folyamat Wiener folyamat, ha*

1.

$$E\left(X_t X_s\right) = \min\left\{t, s\right\}$$

2. ha $t > s > 0$, *akkor*

$$X_t - X_s \tilde{} N\left(0, \sqrt{t-s}\right)$$

3. X_t *folytonos.*

13.6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* X_t *folyamat* $\alpha-$*stabil, ha létezik* α, D, *hogy minden* $a > 0$*-ra*

$$X_{at} \tilde{} a^{\frac{1}{\alpha}} X_t + Dt$$

minden $t > 0 - ra.$

13.7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy sztochasztikus folyamat önhasonló, ha létezik* α, D, *hogy minden* $a > 0$*-ra létezik* $C(a)$, *hogy*

$$X_{at} \tilde{} C(a) X_t.$$

13.1. Tétel. *Ha* X_t *stabil folyamat és Lévy folyamat, akkor pontosan akkor* α*-stabil folyamat, ha*

$$X_{at} \tilde{} a^{\frac{1}{\alpha}} X_t + Dt.$$

13.1. Állítás. *Ha* X_t *folyamat* α*-stabil, akkor*

$$C(a) = a^{\frac{1}{\alpha}}$$

és a $H = \frac{1}{\alpha}$*-t nevezzük a folyamat Hurst exponensének.*

13.2. Megjegyzés. *A standard Wiener folyamat szigorúan* $2-$*stabil Lévy folyamat.*

13.4. A Nílus vízszintje és a Hurst exponens

Most visszatérünk a skálaparaméter mérésének problémájához.

Keressünk olyan C_n, D_n sorozatot, hogy az $X_1 \ldots . X_n$, $X_{n+k}, \ldots X_{n+k+m}$ mintákat véve azt tapasztaljuk, hogy az

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - D_n}{C_n}$$

$$Y_m = \frac{\sum_{i=n+k+1}^{n+k+m} X_i - D_m}{C_m}$$

minták közel azonos eloszlásúak.

Hurst angol hidrológus 1906-ban publikát egy tanulmányt a Nlus 847 éven keresztült mért árvízeinek szintjéről A következő módon vizsgálta az egymást követő évek maximum értékeinek X_i alakulását.

Tekintette az

$$Y_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$$

összeget, majd ezt centrálta:

$$D_k = Y_k - \frac{k}{n} Y_n.$$

Ez a k-adik összeg eltérése az n év átlaggos összegétől.

13.3. Megjegyzés. *Érdemes észrevenni, hogy $D > 0$ esetén a jobb évek vannak túlsúlyban, ellenkező esetben a rossszak. Ezért Y alkalmaz a hosszú trendek megfigyelésére.*

Legyen

$$\begin{aligned} m_n &= \min_{1 \le i \le n} D_i, \\ M_n &= \max_{1 \le i \le n} D_i, \end{aligned}$$

és

$$R_n = M_n - m_n$$

az összegek, terjedelme (range). Legyen

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum X_i \right)^2}$$

a szokásos tapasztalati szórás. Hurst a

$$\frac{R_n}{S_n}$$

hányados viselkedését vizsgálta és meglepetésre azt tapasztlatla, hogy

$$\frac{R_n}{S_n} \simeq c n^{0,7}$$

azzal ellentétben mint azt egy művelt statisztikus várna, hogy a hányados lényegében $\sqrt{n}$ azaz $n^{\frac{1}{2}}$ lesz.

13.8. Definíció. *A*

$$\frac{R_n}{S_n} \simeq cn^H$$

kifejezésben a H *-t nevezzük Hurst exponensek. Ami sajnos keveredést jelent a korábbi definícióval, azonban mindkét elnevezés használt.*

13.2. Tétel. *(Feller) Legyenek* Z_i *azonos eloszlású valószínűségi változók,* $E(Z_1) = 0, \sigma(Z_1) = \sigma$*-el. Ha* $Z_i - k$ *függetlenek, akkor*

$$\frac{R_n}{S_n} \simeq c\sqrt{n}$$

pontosabban

$$E\left(\frac{R_n}{S_n}\right) \simeq \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}n}.$$

13.4. Megjegyzés. *Feller tételéből látszik, hogy Hurst várakozása megalapozott volt. Mi okozhatja mégis, hogy* $H > 0.5$*? A tétel szerint erre két ok lehet.*

a. Az $X_i - k$ *ugyan függetlenek, azonos eloszlásúak, de nem létezik szórás, esetleg várható érték sem, azaz* $\alpha-$*stabilak* $\alpha = \frac{1}{H} = 1.48$*-val, tehát*

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \tilde{} n^H X.$$

b. Létezik várható érték és szórás is, sőt az egydimenziós eloszlások normálisak is, de nem függetlenek.

13.5. Megjegyzés. *A b esetet szemügyre véve látjuk, hogy* $H = \frac{1}{2}$*, akkor az egymást követő áradások függetlenek. Ha*

$$\frac{1}{2} < H < 1$$

akkor azt mondjuk, hogy a folyamat perszitens, nagy árvízre nagy következik, kicsire kicsi. Azaz az autokorreláció pozitív. Ugyanakkor, ha

$$0 \leq H < \frac{1}{2}$$

akkor kis vizet nagy követ, nagyot kicsi, azaz az autokorreláció negatív. Ezért a Hurst exponens tekinthető a perszintencia, autokorreláció mértékének is. Fontos emlékezni arra, hogy ez nem a Lévy család skálaparaméterének dimenziója.

13.3. Példa. *A Wiener folyamat esetén*

$$E(X_t) = 0,$$

$$E(X_t X_s) = \min\{t, s\}$$

ezért

$$E(X_{at} X_{as}) = \min\{at, as\} = a \min\{t, s\} = aE(X_t X_s).$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$E(X_{at} X_{as}) = E\left(a^{\frac{1}{2}} X_t a^{\frac{1}{2}} X_s\right).$$

Innen belátható, hogy a kétdimenziós eloszlásokra

$$(X_{at}, X_{as}) \tilde{} \left(a^{\frac{1}{2}} X_t, a^{\frac{1}{2}} X_s\right),$$

tehát $H = \frac{1}{2}$.

13.4. Példa. *Ha* X_t $\alpha-$*stabil Lévy folyamat akkor*

$$X_{at} - X_{as} \tilde{} a^{\frac{1}{\alpha}} (X_t - X_s),$$

tehát $H = \frac{1}{\alpha}$ *és a fenti és ebben az esetben is függetlenek a növekmények.*

Bevezetjük a frakcionális Brown mozgást.

13.9. Definíció. *Legyen* $A(s,t) = |s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}$, $0 < H < 1$ *és* $s, t \in \mathbb{R}$. *Létezik egy nemnegatív-definit Gauss folyamat* X_t, *a következő tulajdonságokkal.*

1. X_t *normális eloszlású,* $E(X_t) = 0$

2.

$$Cov(X_t, X_s) = \frac{1}{2} A(s,t)$$

13.6. Megjegyzés. *Nyilván*

$$E(X_t, X_s) = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}\right),$$

ezért

$$
\begin{aligned}
E\left(X_{at}, X_{as}\right) &= \frac{1}{2}\left(|as|^{2H} + |at|^{2H} - |at - as|^{2H}\right) \\
&= a^{2H} E\left(X_t, X_s\right),
\end{aligned}
$$

amiből megint következik, hogy:

$$X_{at}\tilde{\ } a^H X_t,$$

$$E\left(X_t^2\right) = t^{2H},$$

$$X_t - X_s \tilde{\ } N\left(0, |t - s|^{2H}\right).$$

13.7. Megjegyzés. *Az így konstruált folyamatra is kiterjeszthető a Black-Schole elmélet, azaz ha azt tesszük fel, hogy az árak logaritmusa frakcionális Brown mozgást követ, nem pedig Wiener folyamatot, akkor a K lehívási árfolyamú európai opció C_H árára a követező képlet adható:*

$$C_H = S_H(0)\,\Phi(d_H) - e^{-rT} K \Phi\left(d_H - \sqrt{2H}\sigma T^H\right)$$

ahol

$$d_H = \frac{\frac{S_H}{K} + \left(r + H\sigma^2 T^{2H}\right)}{\sqrt{2H}\sigma T^H}.$$

Irodalomjegyzék

[B1] B. B. Mandelbrot, "How Long is the Coast of Great Britain, Statistical Self Similarity and Fractional Dimension," Science, 155 (1967) 636-638.