Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok

a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz

2021. április 28.

1. Az alábbi lineáris programozási feladatot egy LP szolver programmal megoldva azt kaptuk, hogy a célfüggvény maximumértéke $4,4$, amit az (például) az $x_1 = 0,3$, $x_2 = 0,1$, $x_3 = 1$ megoldáson vesz fel.

a) Írjuk fel a feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Igaz-e, hogy a duális feladat rendszere megoldható? Ha igen, igaz-e, hogy a duális feladat célfüggvénye korlátos a releváns irányból a megoldáshalmazán?

$$\begin{aligned}
&\max\{4x_1 + 2x_2 + 3x_3\}\\
&\text{ha}\\
&8x_1 + 6x_2 - x_3 \leq 2\\
&3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 5\\
&5x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 3\\
&x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 1
\end{aligned}$$

2. Egy minimális költségű folyamfeladatot lineáris programként modellezve az alábbi feladatot kaptuk. Adjuk meg a szóban forgó minimális költségű folyamfeladatot: rajzoljuk fel a hozzá tartozó irányított gráfot és ezt egészítsük ki minden olyan (numerikus és nem numerikus) adattal, ami a folyamfeladat kitűzéséhez szükséges. (A megoldásból derüljön ki, hogy ezeknek az adatoknak mi a pontos szerepe a feladatban.)

$$\begin{aligned}
&\min\{4x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 + x_2 - x_5 = 0\\
&-x_2 - x_3 + x_4 = 0\\
&x_3 + x_5 \geq 3\\
&0 \leq x_1 \leq 5\\
&0 \leq x_2 \leq 1\\
&0 \leq x_3 \leq 4\\
&0 \leq x_4 \leq 3\\
&0 \leq x_5 \leq 2
\end{aligned}$$

3. Egy kilenc csúcsú G élsúlyozott teljes gráf csúcsai legyenek $a, b, c, d, e, f, g, h, i$. Az ab, ac, ad, ae élek súlya legyen 1, a bc, bd, be, cd, ce, de élek (vagyis a $\{b, c, d, e\}$ csúcsok által feszített részgráf élei) legyenek 2 súlyúak, végül minden más él súlya legyen 3.

a) Mutassuk meg, hogy a megadott élsúlyozás metrikus.

b) Futtassuk le és dokumentáljuk a G bemenetre az utazóügynök problémára adott Christofides-algoritmust.

4. Igaz-e, hogy a halmazfedés problémára tanult approximációs algoritmus csak egyféle kimenetet adhat, ha az összes részhalmaz mérete azonos, de az összes részhalmaz költsége különböző?

5. Egy probléma bemenete az (a, b) pozitív egészekből álló számpár. Döntsük el, hogy az alábbi lépésszámú algoritmusok közül melyek polinomiálisak.

a) $\sqrt[4]{a+b}$

b) $(\log a)^{\log\log\sqrt{b}}$

Minden feladat 12 pontot ér. Az aláíráshoz szükséges minimális pontszám 24. Elégséges megajánlott jegyhez legalább 33, közepeshez 42, jóhoz 51 pontot kell elérni.

Rendszeroptimalizálás

Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató

a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz

2021. április 28.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Az 1. feladat megoldása.

a) A megadott lineáris program $\max\{cx : Ax \le b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(2 pont)}$$
$$c = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

A duálist a tanult $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{aligned}
&\min\{2y_1 + 5y_2 + 3y_3 - y_4\}\\
&\text{ha}\\
&8y_1 + 3y_2 + 5y_3 - y_4 = 4\\
&6y_1 + y_2 + 4y_3 + 3y_4 = 2\\
&-y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 = 3\\
&y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0
\end{aligned} \qquad \text{(4 pont)}$$

A duális felírásáért járó 4 pontból minden lényeges elvi hiba (így például egyenletek helyett egyenlőtlenségek szerepeltetése, a nemnegativitási feltételek elmaradása, a célfüggvény hiánya vagy minimalizálás helyett maximalizálás előírása) 3 pont levonást jelentsen.

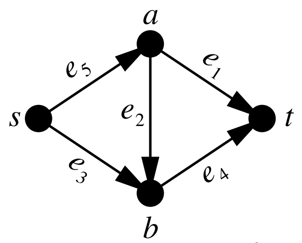
b) A primál feladatról tudjuk, hogy az egyenlőtlenségrendszere megoldható és a célfüggvénye felülről korlátos a megoldáshalmazán (ez a feladat szövegéből kiderül). (1 pont)

Így a dualitástételből vagy a „3-kalitkás” tételből következik, hogy a duális feladat rendszere is megoldható (2 pont)

és a dualitástételből az is, hogy a célfüggvénye alulról korlátos a megoldáshalmazán. (3 pont)

A duális megoldhatósága mellett természetesen érvelhetünk úgy is, hogy megadjuk egy megoldását (például $y_1 = 0,2$, $y_2 = 0,8$, $y_3 = 0$) és megmutatjuk róla, hogy az valóban megoldás – de egy ilyen megoldás megtalálása nem magától értetődő. A „3-kalitkás” tételből közvetlenül nem következik, hogy a duális célfüggvénye alulról korlátos, de az annak bizonyításában szereplő gondolatmenetet kis módosítással erre is használhatjuk: mivel $cx \leq yb$ teljesül minden x, y primál–duál megoldáspárra (amit ebben a bizonyításban beláttunk), ezért a primál feladat tetszőleges x megoldására (például arra, ami a feladat szövegében szerepel) cx alsó korlát a duális célfüggvényére.

A 2. feladat megoldása. Mivel a minimális költségű folyam feladatban minden élhez egy változó tartozik (az élhez tartozó folyamérték), ezért a gráfnak öt éle lesz: $e_1, e_2, \ldots, e_5$, amikhez sorra az $x_1, x_2, \ldots, x_5$ változók tartoznak. (1 pont)
A $0 \leq x_i \leq$ konstans egyenlőtlenségek nyilván a kapacitás feltételek, így az élek kapacitása sorra: $c(e_1) = 5$, $c(e_2) = 1$, $c(e_3) = 4$, $c(e_4) = 3$, $c(e_5) = 2$. (2 pont)
A célfüggvény $\sum k(e) \cdot x(e)$, ahol $k(e)$ az e-hez tartozó (egységenkénti) költség. Így a $k(e)$ értékek kiolvashatók a célfüggvényből: $k(e_1) = 4$, $k(e_2) = 1$, $k(e_3) = 4$, $k(e_4) = 2$, $k(e_5) = 2$. (2 pont)
Az $x_3 + x_5 \geq 3$ egyenlőtlenség csak az előírt folyamértékre vonatkozhat, (1 pont)
amiből megtudjuk, hogy a legalább 3 értékű folyamok közül kell minimális költségűt keresni,(1 pont)
és még azt is, hogy s-ből az e_3 és e_5 élek lépnek ki (és s-be nem lép be él, így $x_3 + x_5$ helyesen adja meg a folyamértéket). (2 pont)
A két egyenlet folyammegmaradást kell kifejezzen, így s-en és t-n kívül két csúcsa van a gráfnak; jelölje ezeket (az egyenletek sorrendjében) a és b. Ekkor az első egyenletből megtudjuk, hogy az a-ból kilépő, illetve az oda belépő élek e_1 és e_2, illetve e_5. Hasonlóan, a b-ből kilépő, illetve oda belépő élek e_4, illetve e_2 és e_3. Ezekből az információkból (beleértve az s-ből kilépő élek ismeretét is) felrajzolható a gráf:



(3 pont)

Megjegyezzük, hogy mindkét folyammegmaradást kifejező egyenlet az előadáson tanultaknak megfelelően úgy van felírva, hogy a csúcsból kilépő, illetve belépő éleknek megfelelő változók kapnak pozitív, illetve negatív előjelet. De természetesen ezek az egyenletek (-1)-gyel végigszorozva is helyesek maradnak, így mindkét csúcs esetében elképzelhető volna, hogy a ki- és belépő élek szerepe fordított. Továbbá az előírt folyamértékre vonatkozó egyenlőtlenség esetében is elképzelhető volna, hogy $x_3 + x_5$ nem az s-ből kilépő, hanem a t-be belépő élek mentén méri le a folyam értékét. Ezeknek megfelelően, úgy is helyes megoldását kapnánk a feladatnak, ha a fenti ábrán minden él irányítását megfordítanánk és s és t szerepét felcserélnénk.

A 3. feladat megoldása. a) Azt kell ellenőriznünk, hogy teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, vagyis hogy bármely x, y, z csúcsokra teljesül, hogy az xy él súlya legfeljebb az xz és a zy élek súlyainak összege. (1 pont)
Ha az xy él súlya 1 vagy 2, akkor a feltétel teljesül, hiszen xz és zy is legalább 1 súlyú. (1 pont)
Ha az xy él súlya 3, akkor x vagy y az f, g, h, i pontok valamelyike. Mivel ezekbe a csúcsokba csak 3 súlyú élek mennek, az xz vagy a zy él súlya legalább 3, így a feltétel ilyenkor is teljesül.(1 pont)

b) Az algoritmus először egy minimális összsúlyú feszítőfát keres Kruskal-algoritmussal. (1 pont)
Az algoritmus az 1 súlyú éleket mind kiválasztja, hiszen ezek körmentes gráfot alkotnak. A 2 súlyú élek mind kört alkotnak a már bevettekkel, így egyikük sem kerül be a fába, (1 pont)
az összes maradék él tehát 3 súlyú lesz, bekerül (pl.) bg, gh, hi, if. (1 pont)
A kapott fában c, d, e, f páratlan fokúak, az általuk feszített részgráfban kell minimális összsúlyú teljes párosítást találnunk. (1 pont)
Az összes szóba jövő él súlya 3, jó lesz pl. a cf, de élekből álló párosítás. (1 pont)
A kapott gráfnak megkeressük egy Euler-körsétáját , (1 pont)
pl. $e, a, b, g, h, i, f, c, a, d, e$ jó lesz. (1 pont)
Ezen végigmenve úgy, hogy az ismétlődő csúcsokat tartalmazó szakaszokat egy éllel levágjuk, (1 pont)
az $e, a, b, g, h, i, f, c, d, e$ Hamilton-kört kapjuk, ez a kimenet. (1 pont)

A 4. feladat megoldása. Az állítás nem igaz. (0 pont)
Legyenek az alaphalmaz elemei a, b, c, d, a részhalmazok $\{a, b\}$ (súlya legyen 1), $\{b, c\}$ (súlya legyen 2) és $\{c, d\}$ (súlya legyen 4). Ez valóban lehet a probléma bemenete, hiszen a részhalmazok fedik az alaphalmazt és a kívánt feltételeknek is megfelelnek(méret, súly). Az algoritmus először azt a halmazt választja ki, amelyikre a legkisebb az egy (új) elemre eső költség, vagyis $\{a, b\}$-t. A következő lépésben az egy új elemre eső költség a $\{b, c\}$ és a $\{c, d\}$ halmaz esetében is 2, így mindkettőt választhatja az algoritmus. A $\{b, c\}$ halmaz választása esetén a következő lépésben még kiválasztjuk a $\{c, d\}$ halmazt is, a $\{c, d\}$ halmaz választása esetén azonban két lépés után elkészült a fedés, így az algoritmus véget ér. A kimenet tehát valóban többféle is lehet. (12 pont)
Ha valaki csak azt látja be, hogy az algoritmus többféleképp is lefuthat, de a példájából következik a ténylegesen bizonyítandó állítás is, az 10 pontot kapjon. Akinek a példájából ez nem következik, az 7 pontot kapjon.

Természetesen rengeteg más ellenpélda is van. Jó ellenpélda, megfelelő indoklással 12 pont. Jó ellenpélda hiányos indoklással 2-11 pont (minőségtől függően), jó ellenpélda indoklás nélkül 0 pont. Ha valaki megpróbálja bebizonyítani az állítást és demonstrálja, hogy érti az algoritmust, akkor (meggyőző erőtől függően) 0-2 pontot kapjon.

Az 5. feladat megoldása. A bemenet mérete (az egészrészeket és plusz 1-eket elhanyagolva) $n = \log a + \log b$. (3 pont)
Bebizonyítjuk, hogy a két lépésszám egyike sem polinomiális. (0 pont)
Ehhez elég azt megmutatni, hogy $a = b = 2^k$ esetén nem lesznek polinomiálisak a lépésszámok. (2 pont)
A bemenet mérete ekkor $n = 2k$. (1 pont)

a) A lépésszám $\sqrt[4]{2^{k+1}} = \sqrt[4]{2^{\frac{n}{2}+1}} = 2^{\frac{n}{8}+\frac{1}{4}}$, ami exponenciális n-ben, így tényleg nem polinomiális. (2 pont)

b) A lépésszám

$$k^{\log\log\sqrt{2^k}} = k^{\log\log 2^{\frac{k}{2}}} = k^{\log\frac{k}{2}} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\log\frac{n}{4}} = \frac{n^{\log\frac{n}{4}}}{2^{\log\frac{n}{4}}} = \frac{4n^{\log\frac{n}{4}}}{n} = 4n^{\log\frac{n}{4}-1},$$

ami nem polinomiális, mivel (konstansszor) n-nek egy konstansnál gyorsabban növő hatványa (itt elvileg picit precízebbnek kéne lenni, de fogadjuk el ezt az érvelést). (4 pont)