Rendszeroptimalizálás

Zárthelyi feladatok

a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz

2020. április 29.

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris programozási feladatot (LP szolver program használata nélkül).

$$\begin{aligned}&\max\{3x_1 + 2x_2\}\\&\text{ha}\\&2x_1 + x_2 \le 14\\&0 \le x_1 \le 5\\&0 \le x_2 \le 8\end{aligned}$$

2. a) Írjuk fel a fenti lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Döntsük el, hogy a duális feladatnak van-e olyan megoldása, illetve van-e olyan optimális megoldása, amiben minden változó értéke 0 vagy 1.

3. A $G = (A, B; E)$ teljes páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen az alább, balra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem (minden $1 \le i \le 4, 1 \le j \le 5$ esetén).

a) Igaz-e, hogy az alábbi, jobb oldali táblázatban megadott c hozzárendelés címkézés G-ben?

b) Igaz-e, hogy az $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, $\{a_3, b_3\}$ és $\{a_4, b_4\}$ élek maximális összsúlyú párosítást alkotnak G-ben?

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c(v)$	:	1	0	2	3	1	3	2	2	0

4. Egy szabályos nyolcszög csúcsai sorban az 1,2,3,4,5,6,7,8 számok. Legyenek egy gráf csúcsai a nyolcszög csúcsai, a gráf élei pedig legyenek a nyolcszög oldalai és legrövidebb átlói (a gráfnak tehát 8 csúcsa és 16 éle lesz).

a) Futtassuk le és dokumentáljuk erre a gráfra a maximális páros részgráf keresésére tanult algoritmusok közül a másodikat, mégpedig a csúcsok növekvő sorrendjében.

b) Az a) feladat kimeneteként kapott kettéosztásra futtassuk le a maximális páros részgráf keresésére tanult első algoritmust is.

5. Egy probléma bemenete az (a, b) (pozitív egészekből álló) számpár. Döntsük el, hogy az alábbi lépésszámú algoritmusok közül melyek polinomiálisak.

a) $7^{\log_2 ab}$

b) $19^{\log_2(\log_2 ab)}$

Minden feladat 12 pontot ér. Az aláíráshoz szükséges minimális pontszám 24. Elégséges megajánlott jegyhez legalább 33, közepeshez 42, jóhoz 51 pontot kell elérni.

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz
2020. április 29.

Általános alapelvek.

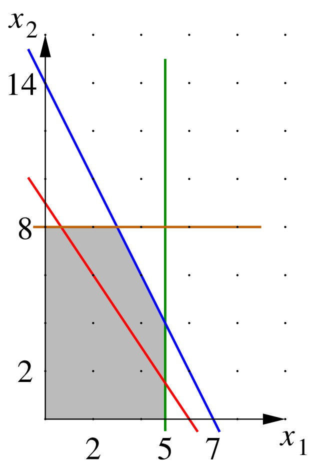
A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Az 1. feladat megoldása. A feladat megoldáshalmazát koordinátarendszerben ábrázoljuk. A $2x_1 + x_2 \leq 14$, illetve $x_2 \leq 8$ egyenlőtlenségek megoldáshalmaza a kék, illetve barna egyenes alatti félsíkok, az $x_1 \leq 5$ egyenlőtlenségé pedig a zöld egyenestől balra eső félsík. Ezeknek, illetve a nemnegativitási feltételekből fakadó első síknegyednek a metszete a megoldáshalmaz, amit az ábrán a szürkével jelölt síkidom ábrázol.



(5 pont)

Azok a pontok, amelyeken a célfüggvény a (tetszőlegesen rögzített) p értéket veszi fel, a $3x_1 + 2x_2 = p$ egyenest alkotják. Átrendezve: $x_2 = \frac{p}{2} - \frac{3}{2}x_1$. Így az egyenes meredeksége (p-től függetlenül) $-\frac{3}{2}$. Például a $p = 18$ értékre az egyenest az ábrán pirossal ábrázoltuk. (2 pont)
p növelésére a piros egyenes „önmagával párhuzamosan" felfelé csúszik (mert a meredeksége változatlan). A kérdés az, hogy p-nek mi az a legnagyobb értéke, amelyre még metszi a megoldáshalmazt. (2 pont)

Mivel a piros egyenes meredeksége mindig $-\frac{3}{2}$ és így 0 és -2, vagyis a barna és a kék egyenes meredeksége között van, ezért ez arra a p-re következik be, amelyre a piros egyenes áthalad a barna és a kék egyenes metszéspontján, vagyis a $(3;8)$ ponton. (2 pont)
A célfüggvény tehát az $x_1 = 3$, $x_2 = 8$ értékekre veszi fel a maximumát, a maximumérték pedig $p = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 8 = 25$. (1 pont)
(Azt a tényt, hogy az optimumhely valóban az $(3;8)$ pont indokolhatjuk azt a szemlélet alapján nyilvánvaló tényt felhasználva is, hogy a célfüggvény optimuma biztosan felvétetik a megoldáshalmaz valamelyik csúcsán. Ezeket meghatározva: $(0;8)$, $(3;8)$, $(5;4)$, $(5;0)$, $(0;0)$. Ezeken kiszámítva a célfüggvény értékét sorra a 16, 25, 23, 15, 0 értékeket kapjuk, amelyek közül valóban a 25 a legnagyobb.)

A 2. feladat megoldása.

a) A megadott lineáris programban a változók nemnegativitása is szerepel a feltételek között, ezért érdemes azt $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ alakúnak tekinteni, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1 pont)

Most a duálist a tanult $\min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{aligned} &\min\{14y_1 + 5y_2 + 8y_3\} \\ &\text{ha} \\ &2y_1 + y_2 \geq 3 \\ &y_1 + y_3 \geq 2 \\ &y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(4 pont)

A duális felírásáért járó 4 pontból minden lényeges elvi hiba (így például egyenlőtlenségek helyett egyenletek szerepeltetése, a nemnegativitási feltételek elmaradása, a célfüggvény hiánya vagy minimalizálás helyett maximalizálás előírása) 3 pont levonást jelentsen.

b) A duális rendszernek megoldását kapjuk az $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$ választással, ezt a duális rendszer egyenlőtlenségeibe való behelyettesítéssel ellenőrizhetjük. Így az első kérdésre a válasz igen: a duálisnak van ilyen megoldása. (2 pont)
Azt is könnyű végiggondolni, hogy ez egyben az egyetlen olyan megoldása a duális rendszerének, amiben minden változó értéke 0 vagy 1. Valóban, egy ilyen megoldásban a $2y_1 + y_2 \geq 3$ egyenlőtlenség teljesüléséhez $y_1 = y_2 = 1$ szükséges, az $y_1 + y_3 \geq 2$ egyenlőtlenséghez pedig $y_1 = y_3 = 1$. (1 pont)
Az $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$ megoldáshoz tartozó duális célfüggvényérték $14 + 5 + 8 = 27$. Így a dualitástétel miatt a duálisnak ez a megoldása nem optimális: mivel a primál maximuma (az **1**. feladatból következően) 25, ezért a duális minimumának is ennyinek kell lennie. Más szóval: egy optimális duális megoldáson felvett célfüggvényérték 25 volna. (3 pont)
Így a második kérdésre a válasz nemleges: ilyen optimális megoldása nincs a duálisnak.(1 pont)
Megjegyzések:

1. A megoldásban a dualitástételt alkalmaztuk, aminek feltétele, hogy a primál feladat rendszere megoldható, a célfüggvénye a megoldáshalmazon felülről korlátos legyen. Az **1.** feladat megoldásából tudjuk, hogy ezek a feltételek teljesülnek, így a dualitástétel alkalmazása jogos volt. Az erre való hivatkozás hiánya nem jár pontlevonással.

2. A primál feladatot felfoghatjuk $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alakúnak is és erre használhatjuk a duális eredeti definíció szerinti alakját, vagyis a $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ alakot. Ekkor a változók nemnegativitását előíró két egyenlőtlenség is az $Ax \leq b$ rendszer része, vagyis A-nak és b-nek 5 sora van. Ennek megfelelően a duális egy 5 változós lineáris program – amely azonban az előadáson tanultak szerint ekvivalens a fent kapottal.

A 3. feladat megoldása.

a) A tanult definíció szerint c pontosan akkor címkézés, ha $c(a_i) + c(b_j) \geq w(e)$ teljesül minden $e = \{a_i, b_j\}$ élre. Ez minden $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 5$ esetben gyorsan ellenőrizhető és valóban teljesül, így a megadott hozzárendelés címkézés. (4 pont)

b) Az $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, $\{a_3, b_3\}$, $\{a_4, b_4\}$ élek $2+3+4+5 = 14$ összsúlyú párosítást alkotnak G-ben. (1 pont)
Így a maximális összsúlyú párosítás összsúlya legalább 14. (1 pont)
Az a) feladatban látott címkézésben a címkék összege szintén 14, (1 pont)
ráadásul mivel a címkék mind nemnegatívak, ezért ez a címkézés mutatja, hogy a nemnegatív értékű címkézések között a címkék összsúlyának minimuma legföljebb 14. (1 pont)
A tanult Egerváry-tételből tudjuk, hogy a maximális súlyú párosítás összsúlya megegyezik a címkék összegével egy minimális összegű, nemnegatív értékű címkézésben. A fentiek szerint tehát a tételben szereplő közös optimum a G gráfban pontosan 14 (hiszen beláttuk, hogy legalább és legföljebb 14). (3 pont)
Ezért a megadott párosítás maximális összsúlyú G-ben. (1 pont)

A 4. feladat megoldása. Az 1 csúcsot tetszőlegesen elhelyezhetjük, kerüljön mondjuk az A halmazba, a 2 csúcs ekkor a B-be kerül, mivel így kapunk több keresztbe menő élet. (1 pont)
A 3 csúcsnak ugyanannyi szomszédja lesz A-ban és B-ben, így mindegy, hogy melyikbe rakjuk, rakjuk mondjuk az A-ba. (1 pont)
A 4 csúcsnak is ugyanannyi szomszédja van A-ban és B-ben, így a helye szabadon választható, legyen B. (1 pont)
Hasonló a helyzet az 5 csúccsal, ezt tegyük A-ba, (1 pont)
és a 6 csúccsal is, ezt tegyük B-be. (1 pont)
A következő lépésben a 7 csúcsnak két szomszédja van A-ban és egy B-ben, így a B-be kell tegyük, (2 pont)
végül a 8-nak három szomszédja van B-ben és egy A-ban, így A-ba kerül. (2 pont)
A kapott kettéosztásban egyetlen csúcsból sem megy több él a saját osztályába, mint keresztbe, az első algoritmus tehát további lépések megtétele nélkül leáll. (3 pont)

Ha valaki csak az első algoritmust futtatja (hibátlanul) egy általa választott kettéosztással kezdve, akkor 2 pontot kapjon.

Az 5. feladat megoldása. A bemenet mérete (az egészrészeket és plusz 1-eket elhanyagolva) $n = \log_2 a + \log_2 b$. (3 pont)

a) A lépésszám a bemenet méretének segítségével felírva $7^{\log_2 ab} = 7^{\log_2 a + \log_2 b} = 7^n$, (2 pont)
amiről tudjuk, hogy nem polinomiális n-ben. (1 pont)

b) A lépésszám a bemenet méretének segítségével felírva $19^{\log_2(\log_2 ab)} = 19^{\log_2(\log_2 a + \log_2 b)} = 19^{\log_2 n}$. (2 pont)
$19^{\log_2 n} \leq 32^{\log_2 n} = 2^{5 \log_2 n} = (2^{\log_2 n})^5 = n^5$, így ez a lépésszám polinomiális. (4 pont)