Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2018. május 8.

1. Egy cég kétféle üzemanyagot állít elő az A, B és C jelű nyersanyagokból. Az első fajta üzemanyag egy tonnájának előállításához 4 tonna A, 2 tonna B és 1 tonna C típusú nyersanyagra van szükség. A második fajta üzemanyaghoz tonnánként 5 tonna A, 1 tonna B és 1 tonna C nyersanyagra van szükség. Az előállított üzemanyagot mind el tudják adni, az első típusút tonnánként 500 ezer, a másodikat tonnánként 400 ezer Ft-os eladási áron. A következő gyártási periódusra az A jelű nyersanyagból 45 tonna, a B jelűből 12 tonna, a C jelűből 10 tonna áll rendelkezésre. A cég vezetősége szeretné meghatározni, hogy ebben a periódusban mennyit gyártsanak a kétféle üzemanyagból úgy, hogy ezzel a bevételüket maximalizálják. Fogalmazzuk meg ezt a problémát lineáris programozási feladatként, majd oldjuk meg azt és válaszoljunk a vezetőség kérdésére.

2. a) Írjuk fel a jobbra látható lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Döntsük el, hogy a (primál) feladat célfüggvénye felülről korlátos-e a megoldáshalmazán.

$\max\{9x_1 + 4x_2 + 3x_3\}$
ha
$5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 7$
$x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 2$
$x_2 \leq 1$

3. A $G(A, B; E)$ teljes páros gráf két színosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen az alább, balra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem (minden $1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 5$ esetén).

a) A p paraméter mely értékeire igaz, hogy az alábbi, jobb oldali táblázatban megadott c hozzárendelés címkézés?

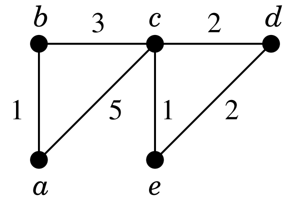
b) Létezik-e p-nek olyan értéke, amely esetén a táblázatban megadott c hozzárendelés minimális összegű címkézés a G összes, nemnegatív értékű címkézései között?

c) Létezik-e p-nek olyan értéke, amely esetén a táblázatban megadott c hozzárendelés minimális összegű címkézés a G összes, valós értékű címkézései között?

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 6 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c(v)$	:	4	3	4	p	0	2	2	3	0

4. Hajtsuk végre és dokumentáljuk a Steiner-fa problémára tanult approximációs algoritmust a jobbra látható gráfra $T = \{a, c, e\}$ mellett.



5. Döntsük el, hogy az alábbi lépésszámú approximációs sémák közül melyek polinomiálisak, illetve teljesen polinomiálisak. (n a bemenet méretét jelöli.)

a) $\sqrt[\varepsilon]{n + \varepsilon}$

b) $\frac{n^2 \log \frac{1}{\varepsilon}}{\varepsilon^n}$

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér. Az aláíráshoz szükséges minimális pontszám 24. Elégséges megajánlott jegyhez legalább 33, közepeshez 42, jóhoz 51 pontot kell elérni. Kérjük, hogy **minden feladat külön lapra** kerüljön. A lapok tetején jól láthatóan legyen feltüntetve a név, a Neptun-kód és a feladat sorszáma.

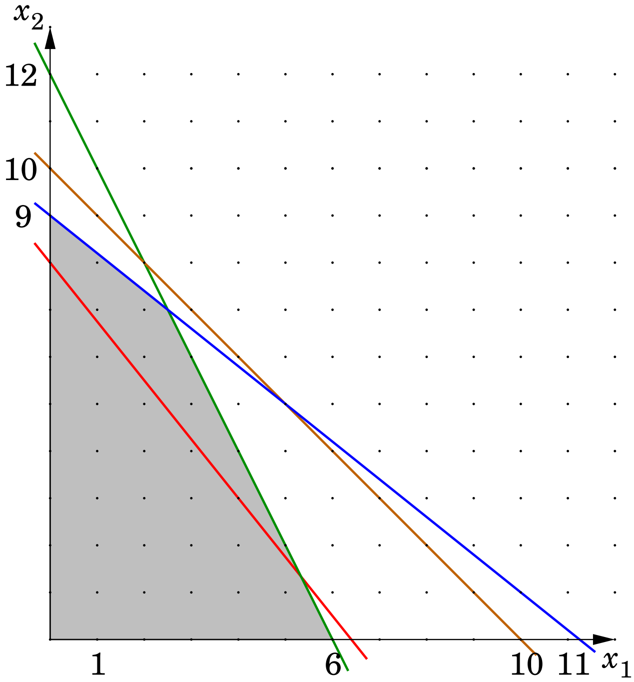
A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása. Jelölje x_1, illetve x_2 az első, illetve a második típusú üzemanyagból gyártandó mennyiségeket (tonnában mérve). (1 pont)
x_1 tonna első típusú, illetve x_2 tonna második típusú üzemanyaghoz $4x_1$, illetve $5x_2$ tonna A jelű nyersanyagra van szükség. Mivel ebből összesen 45 tonna áll rendelkezésre, ezért teljesülnie kell a $4x_1+5x_2 \leq 45$ egyenlőtlenségnek. A B és C jelű nyersanyagokra vonatkozó korlátokból kapjuk a $2x_1+x_2 \leq 12$, illetve az $x_1+x_2 \leq 10$ egyenlőtlenségeket. (1 pont)
Mivel x_1 tonna első típusú és x_2 tonna második típusú üzemanyagból származó összes bevétel százezer Ft-ban mérve $5x_1+4x_2$, ezért ezt a célfüggvényt kell maximalizálni. (1 pont)
A fentiekhez hozzávéve az értelemszerűen adódó $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ nemnegativitási feltételeket végül is az alábbi lineáris programozási feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} & \max\{5x_1+4x_2\} \\ & \text{ha} \\ A:\ & 4x_1+5x_2 \leq 45 \\ B:\ & 2x_1+x_2 \leq 12 \\ C:\ & x_1+x_2 \leq 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(2 pont)

A feladat megoldáshalmazát koordinátarendszerben ábrázoljuk. Az A, B, illetve C nyersanyagokból származó egyenlőtlenségek megoldáshalmaza sorra a kék, zöld, illetve barna egyensek alatti félsíkok. Ezeknek, illetve a nemnegativitási feltételekből fakadó első síknegyednek a metszete a megoldáshalmaz, amit az ábrán a szürkével jelölt síkidom ábrázol.



(2 pont)

(Amint látható, a barna egyenes nem határolja a megoldáshalmazt. Ez tehát azt jelenti, hogy a C nyersanyagból származó egyenlőtlenség redundáns, az elhagyása a megoldáshalmazt nem változtatná.)

Azok a pontok, amelyeken a célfüggvény a (tetszőlegesen rögzített) p értéket veszi fel, az $5x_1+4x_2 = p$ egyenest alkotják. Átrendezve: $x_2 = \frac{p}{4} - \frac{5}{4}x_1$. Így az egyenes meredeksége (p-től függetlenül) $-\frac{5}{4}$. Például a $p = 32$ értékre az egyenest az ábrán pirossal ábrázoltuk. (1 pont)
p növelésére a piros egyenes „önmagával párhuzamosan” felfelé csúszik (hiszen a meredeksége változatlan). Szemmel is jól látható, hogy a p-nek az lesz a legnagyobb olyan értéke, amelyre a piros egyenes még metszi a megoldáshalmazt, amelyre az áthalad a kék és a zöld egyenesek metszéspontján. A célfüggvény tehát ebben a metszéspontban veszi fel a maximumát. (2 pont)
A keresett metszéspontot a $4x_1+5x_2 = 45$, $2x_1+x_2 = 12$ egyenletrendszer megoldásával kapjuk. Az eredmény: $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = 7$. (1 pont)
(Azt a tényt, hogy az optimumhely valóban az $(\frac{5}{2}; 7)$ pont indokolhatjuk úgy, hogy a piros egyenes meredeksége (vagyis $-\frac{5}{4}$) a kék és a zöld egyenesek meredekségei (vagyis $-\frac{4}{5}$ és -2) közé esik. Vagy felhasználhatjuk azt a szemlélet alapján nyilvánvaló tényt is, hogy a célfüggvény optimuma biztosan felvétetik a megoldás-

halmaz valamelyik csúcsán is, ám a $(0,9)$, $(6,0)$ és $(0,0)$ csúcsokon a célfüggvény értéke kisebb, mint a $(\frac{5}{2};7)$ ponton adódó 40,5.)
A cégnek tehát a bevétel maximalizálásához 2,5 tonna első típusú és 7 tonna második típusú üzemanyagot kell gyártania. (Az így elérhető maximális bevétel pedig 4 050 000 Ft.) (1 pont)

A 2. feladat megoldása.

a) A megadott lineáris program $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$ (2 pont)

A duálist a tanult $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{array}{l} \min\{7y_1 + 2y_2 + y_3\} \\ \text{ha} \\ 5y_1 + y_2 = 9 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 4 \\ 4y_1 + 5y_2 = 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{array}$$ (4 pont)

b) A primál feladat rendszere nyilván megoldható, például megoldást ad az $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Így a tanult „három kalitkás" tétel szerint a primál célfüggvény felülről korlátossága ekvivalens $yA = c$, $y \geq 0$, vagyis a duális feladat rendszerének megoldhatóságával. (1 pont)
A duális feladat első és harmadik egyenletéből $y_1 = 2$, $y_2 = -1$ adódik. (1 pont)
Mivel $y_2 = -1$ ellentmond az $y_2 \geq 0$ feltételnek, ezért a duális rendszere nem megoldható. (2 pont)
Így a primál feladat célfüggvénye nem felülről korlátos. (2 pont)
Az a) részben a duális felírásáért járó 4 pontból minden lényeges elvi hiba (így például egyenletek helyett egyenlőtlenségek szerepeltetése, a nemnegativitási feltételek elmaradása, a célfüggvény hiánya vagy minimalizálás helyett maximalizálás előírása) 3 pont levonást jelentsen.

A 3. feladat megoldása.

a) A tanult definíció szerint c pontosan akkor címkézés, ha $c(a_i) + c(b_j) \geq w(e)$ teljesül minden $e = \{a_i, b_j\}$ élre. Ez minden $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 5$ esetben (vagyis a mátrix első három sorának megfelelő élekre) valóban teljesül, ez egyesével gyorsan ellenőrizhető. (2 pont)
Az a_4-re illeszkedő (vagyis az utolsó sornak megfelelő) élek mindegyike egy-egy egyenlőtlenséget ad p-re: $p \geq 3$, $p \geq 3$, $p \geq 3$, $p \geq 4$, $p \geq 3$. (1 pont)
Ezek pontosan akkor teljesülnek egyszerre, ha $p \geq 4$. Így c pontosan akkor címkézés, ha $p \geq 4$. (2 pont)

b) A $p \geq 4$ értékek közül egyedül a $p = 4$ eset jön szóba (hiszen minden $p > 4$ esetén kisebb összegű címkézést kapnánk a $p = 4$ választással). A kérdés tehát csak az, hogy a $p = 4$ esetén adódó 22 összegű címkézés minimális összegű-e a nemnegatív értékű címkézések között. (1 pont)
Az $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, $\{a_3, b_3\}$, $\{a_4, b_4\}$ élek $4 + 5 + 6 + 7 = 22$ összsúlyú párosítást alkotnak G-ben. (1 pont)
A tanult Egerváry-tételből tudjuk, hogy a maximális súlyú párosítás összsúlya megegyezik a címkék összegével egy minimális összegű, nemnegatív értékű címkézésben. Az a) feladatban adott címkézés (a $p = 4$ esetben) mutatja, hogy a minimális összegű, nemnegatív értékű címkézés összege legföljebb 22. Az imént mutatott párosítás viszont azt mutatja, hogy a maximális összsúlyú párosítás összsúlya legalább 22. Így az Egerváry-tételben szereplő közös optimum a G gráfban pontosan 22 (hiszen beláttuk, hogy legalább és legföljebb 22). Ezért a $p = 4$ esetben az a) feladatban megadott címkézés valóban minimális összsúlyú a nemnegatív értékű címkézések között. (2 pont)

c) A b) feladatban írtakhoz hasonlóan ismét csak a $p = 4$ esettel kell foglalkozni, $p > 4$ esetén a címkézés biztosan nem minimális összegű. (1 pont)
Ha a $p = 4$ esetén adódó címkézésben $c(a_i)$ értékét 1-gyel növeljük minden $1 \leq i \leq 4$ esetén és $c(b_j)$ értékét 1-gyel csökkentjük minden $1 \leq j \leq 5$ esetén, akkor ismét címkézést kapunk, hiszen a $c(a_i) + c(b_j)$ összeg nem változott egyetlen $e = \{a_i, b_j\}$ élre sem. (1 pont)
Azonban a címkék összege 1-gyel csökkent (hiszen 5 csúcs címkéjét csökkentettük, de csak 4-ét növeltük). Így a feladatban megadott címkézés a $p = 4$ esetben sem minimális összegű a valós értékű címkézések

között (vagyis p-nek nincs is olyan értéke, amire az volna). (1 pont)
Megjegyezzük, hogy a c) feladat megoldásában írtakból következik, hogy G-nek nincs is minimális összegű címkézése a valós értékű címkézések között: bármely címkézésnél kisebb összegűt kaphatunk, ha a megoldásban írt módosításokat végrehajtjuk.

A 4. feladat megoldása. Először azt kell megvizsgálnunk, hogy metrikus-e az élsúlyozás, mert ha nem, akkor metrizálással kell kezdenünk a megoldást. (1 pont)
Mivel a gráf nem teljes, a súlyozás nem metrikus (de ez abból is látszik, hogy pl. az abc háromszög súlyozása nem felel meg a metrikusság követelményeinek). (1 pont)
A metrizáláshoz meg kell állapítanunk az egyes csúcspárok közti legrövidebb utak hosszait, ezek lesznek az új súlyok. (1 pont)
Az ab, bc, cd, ce, de élek súlya nem változik, az ac él súlya 4-re csökken, az új ad, ae, bd, be élek súlyai rendre $6, 5, 5, 4$. (2 pont)
(Nem kell pontot levonni, ha valaki csak a T által feszített részgráfban számítja ki az új súlyokat, hiszen úgyis csak ezekre lesz szükség.)
A metrizált gráfban minimális összsúlyú feszítőfát keresünk a T által feszített részgráfban, (1 pont)
ez az ac, ce élekből áll. (2 pont)
Következő lépésként az ac és ce párokhoz tartozó legrövidebb utakat vesszük az eredeti gráfban, ezek az ab, bc élekből álló út, illetve a ce él. (2 pont)
Végül az így kapott részgráf egy minimális feszítőfáját kell vennünk, ami jelen esetben saját maga, vagyis a kimenet az ab, bc, ce élekből álló Steiner-fa lesz. (2 pont)

Az 5. feladat megoldása.
a) $\sqrt[\varepsilon]{n+\varepsilon} = (n+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$, (1 pont)
ez az n-ben polinomiális, (1 pont)
hiszen ε-t konstansnak tekintve (1 pont)
n egy polinomjával felülről becsülhető. (1 pont)
$(n+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ ugyanakkor n-t konstansnak tekintve $\frac{1}{\varepsilon}$-ban exponenciális, (1 pont)
így a kérdéses séma polinomiális, (1 pont)
de nem teljesen polinomiális. (1 pont)
b) $\frac{n^2 \log \frac{1}{\varepsilon}}{\varepsilon^n} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n n^2 \log \frac{1}{\varepsilon}$, (1 pont)
ami ε-t konstansnak tekintve n-ben exponenciális lesz, (2 pont)
így a kérdéses séma nem polinomiális, (1 pont)
és így persze nem is teljesen polinomiális. (1 pont)