Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok

2017. április 11.

1. a) Írjuk fel a jobbra látható lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Döntsük el, hogy a (primál) feladat célfüggvénye felülről korlátos-e a megoldáshalmazán és ha igen, határozzuk meg a feladat maximumértékét. (A megoldásban felhasználhatjuk, hogy a (primál) feladat rendszere megoldható, ezt bizonyítani tehát nem kell.)

$$
\begin{aligned}
&\max\{x_1 + x_2 + x_3\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 - x_4 + x_6 \geq 3\\
&-x_1 - x_2 - x_3 \geq 6\\
&x_2 + x_5 - x_6 \leq 1\\
&x_3 + x_4 - x_5 \leq 2
\end{aligned}
$$

2. A $G(A, B; E)$ teljes páros gráf két színosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen az alább, balra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem (minden $1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 5$ esetén).

a) Az x paraméter mely értékeire igaz, hogy az alábbi, jobb oldali táblázatban megadott c hozzárendelés címkézés?

b) Adjunk meg egy maximális összsúlyú teljes párosítást (és mutassuk is meg, hogy maximális).

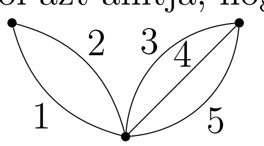
$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5\\
2 & 3 & 4 & 5 & 6\\
4 & 4 & 5 & 5 & 6\\
4 & 5 & 5 & 6 & 6\\
6 & 7 & 6 & 8 & 9
\end{pmatrix}
$$

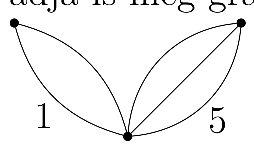
v :	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c(v)$:	2	3	4	4	6	0	1	1	2	x

3. A jobbra látható mátrixban a $*$ helyen álló szám elmosódott, csak azt lehet tudni, hogy negatív. Megállapítható-e így, hogy grafikus-e az a matroid, amelyet a mátrix a valós test felett meghatároz?

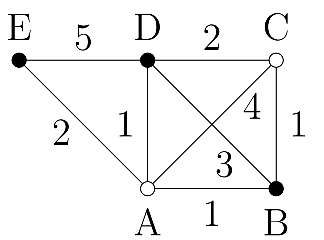
$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 0 & 3\\
5 & 0 & -1 & 2\\
* & -2 & -2 & 1
\end{pmatrix}
$$

4. Az alábbi két gráf által meghatározott matroidok összegéről kellene megállapítani, hogy grafikus-e. Lehetséges-e ez, ha a második néhány éléről „lemaradt” a számozás? (Ha az összegmatroidról azt állítja, hogy grafikus, adja is meg gráffal.)





5. Futtassuk le és dokumentáljuk a Steiner-fa probléma alább látható esetére az előadáson tanult közelítő algoritmust. A terminálok halmaza $T = \{B, D, E\}$.



6. Adjunk 2-approximációs algoritmust tetszőleges gráfok élszínezésére és mutassuk be a futását azon a gráfon, melyet egy 5 hosszú körből az élek megduplázásával kapunk.

A zárthelyi feladatok megoldásai

Az 1. feladat megoldása.

a) A megadott lineáris program $\max\{cx : Ax \le b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a duális $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$ alakú, azaz:

$$\begin{aligned} \min\{-3y_1 - 6y_2 + y_3 + 2y_4\} \\ -y_1 + y_2 = 1 \\ y_2 + y_3 = 1 \\ y_2 + y_4 = 1 \\ y_1 + y_4 = 0 \\ y_3 - y_4 = 0 \\ -y_1 - y_3 = 0 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0 \end{aligned}$$

b) I. megoldás. Vizsgáljuk meg a duális feladatot. Az $y_1 \ge 0$, $y_4 \ge 0$ és $y_1 + y_4 = 0$ feltételekből $y_1 = y_4 = 0$ adódik. Ekkor az ötödik egyenletből következik, hogy $y_3 = 0$ a hatodikból pedig, hogy $y_1 = 0$. Így az első egyenlet szerint $y_2 = 1$ kell legyen és ezzel a választással a második és harmadik egyenlet is teljesül. Azaz a duálisnak létezik megoldása és ez a megoldás egyértelmű. Az ezen az egyetlen duális megoldáson felvett célfüggvényérték -6, így ez egyben a duális feladat minimumértéke is.

Mivel a duálisnak létezik megoldása (és a primál feladat rendszere a feladat szövege szerint megoldható), így a tanult tétel szerint a primál célfüggvénye felülről korlátos a megoldáshalmazán. Ebből a dualitástétel miatt következik, hogy a primál feladat maximuma megegyezik a duális minimumával, vagyis (a fentiek szerint) (-6)-tal.

II. megoldás. A primál második egyenlőtlensége szerint $x_1 + x_2 + x_3 \le -6$. Mivel $x_1 + x_2 + x_3$ épp a feladat célfüggvénye, ezért ez nyilván felülről korlátos a megoldáshalmazán, hiszen a -6 felső korlátja.

Például az $x_1 = -6$, $x_4 = -9$, $x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$ választással a primál rendszerének olyan megoldását kapjuk (mert minden egyenlőtlenséget kielégít), amin a primál célfüggvényértéke -6. Mivel fentebb megmutattuk, hogy a -6 egyben felső korlátja is a primál célfüggvényének, ezért ez a primál megoldás optimális és a primál feladat maximumértéke -6.

A 2. feladat megoldása.

a) A c pontosan akkor címkézés, ha minden $e = \{a_i, b_j\}$ élre $w(e) \le c(a_i) + c(b_j)$. Ez minden $1 \le i \le 5$, $1 \le j \le 4$ esetben (vagyis a mátrix első négy oszlopának megfelelő élekre) teljesül is, míg a b_5-re illeszkedő (vagyis az utolsó oszlopnak megfelelő) élekre öt egyenlőtlenséget kapunk x-re: $x \ge 3$, $x \ge 3$, $x \ge 2$, $x \ge 2$, $x \ge 3$. Ezek pontosan akkor teljesülnek egyszerre, ha $x \ge 3$. Így c pontosan akkor címkézés, ha $x \ge 3$.

b) A tanultak alapján bármely címkézés esetén az összes címke összege felső korlátot ad a maximális összsúlyú teljes párosítás összsúlyára. Az a) feladatbeli címkézésben a címkék összege az $x = 3$ esetben 26, így a maximális összsúlyú párosítás összsúlya legföljebb 26.

Másrészt az (a_1, b_5), (a_2, b_4), (a_3, b_3), (a_4, b_2), (a_5, b_1) élek teljes párosítást alkotnak (hiszen minden csúcsot pontosan egyszer fednek le) és ennek az összsúlya éppen $5 + 5 + 5 + 5 + 6 = 26$. Ez tehát egy maximális összsúlyú teljes párosítás.

(Ez a teljes párosítás kevés próbálgatással megtalálható, de ezt is felgyorsíthatjuk a következő gondolattal. Az Egerváry-algoritmus kapcsán tanult lemma szerint, ha egy c címkézésre és egy M teljes párosításra teljesül, hogy minden M-beli $e = \{a_i, b_j\}$ élre $w(e) = c(a_i) + c(b_j)$, akkor M maximális összsúlyú. Ha tehát az a) feladatbeli c címkézést akarjuk egy M teljes párosítás maximalitásának a bizonyítására használni, akkor csak ilyen éleket válogathatunk M-be. Természetesen az Egerváry-algoritmust is használhatjuk a maximális összsúlyú teljes párosítás meghatározására.)

A 3. feladat megoldása. A mátrixnak 4 oszlopa van, tehát a matroid alaphalmaza 4 elemű. Az ekkora halmazon a 2 rangú uniform matroid az egyetlen nem grafikus. Így a mátrix által meghatározott matroid akkor és csak akkor nem grafikus, ha a mátrix bármelyik két oszlopa még lineárisan független, de bármelyik három oszlopa már lineárisan összefüggő. Az előbbi biztos teljesül (már a mátrix első két sora által meghatározott 2 magas oszlopvektorokról is látszik, hogy páronként függetlenek). Ahhoz, hogy az utóbbi is teljesüljön, kell, hogy a mátrix rangja 2 legyen, tehát a harmadik sornak elő kell állnia az első kettő lineáris kombinációjaként. A $(2, 0, 3)$ és a $(0, -1, 2)$ sorokból csak úgy lehet előállítani a $(-2, -2, 1)$ sort, ha az elsőt kivonjuk a második kétszereséből. Ezt a lineáris kombinációt az eredeti hoszú sorokra végrehajtva a $*$ helyére 9 (tehát egy pozitív szám) kerülne. Tehát pusztán abból, hogy a $*$ helyen negatív szám van, következik, hogy a matroid grafikus.

A 4. feladat megoldása. Ha a jobboldali matroidban az 1-gyel párhuzamos él a 2, akkor az összegben 3, 4, 5 lesz az egyetlen kör. Ez grafikus matroid (egy háromszög és róla „lelóg” az 1 és 2 él). Ha az 1-gyel párhuzamos él a 3, akkor az összegben minden 4 elemű részhalmaz független lesz (ki kell próbálni mind az öt lehetséges esetet, pl. az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz előáll $\{1, 4\}$ és $\{2, 3\}$ uniójaként). A teljes 5 elemű halmaz persze összefüggő lesz, tehát az összeg grafikus (egyetlen 5 hosszú kör). Ha az 1-gyel párhuzamos él a 4, az ugyanúgy tárgyalható, mint az előző eset (csak 3 és 4 szerepét kell felcserélni). Tehát az összegmatroid minden esetben grafikus lesz.

Az 5. feladat megoldása. A megadott Steiner-fa probléma nem metrikus (már csak azért sem, mert a gráf nem teljes, de egyébként sem teljesül a metrikusság feltétele, pl. a BD él súlya 3, a BA és AD élek összsúlya viszont csak 2). A feladat megoldását tehát metrizálással kezd kezdenünk. Ehhez bármely két csúcsra meg kell állapítanunk a csúcsok közt vezető legrövidebb út hosszát, ez lesz a csúcsok közti új élsúly. Ezt követően a T-be tartozó csúcsok által feszített részgráfon kell minimális összsúlyú F feszítőfát keresnünk az új élsúlyok szerint, végül F minden uv élét vissza kell cserélnünk az eredeti gráfban az u és v közt vezető (egyik) legrövidebb útra és az így kapott élhalmaz egy minimális feszítőfáját megadnunk kimenetként. Ezek alapján elég a legrövidebb utakat a T csúcsai között kiszámítanunk: ez B és D között 2 hosszú (mert minden él legalább 1 hosszú és az egy élű út hossza 3), D és E között 3 hosszú (mert az egy élű út hossza 5, és két 1 hosszú élből álló út nem vezet D és E között), B és E között 3 hosszú (az előhöz hasonlóan, de most egy élű út nincs is). A minimális feszítőfa az új élsúlyok szerint tehát tartalmazza a BD élet és vagy a DE élet vagy a BE élet (tegyük fel, hogy a DE élet választottuk). A BD élnek a $B - A - D$ út felel meg, a DE élnek a $D - A - E$ út, a feszítőfánkhoz tartozó élek az eredeti gráfban tehát a BA, AD, AD, AE élek, ennek minimális feszítőfája pedig a BA, AD, AE élek; ezek (és persze az A, B, D, E csúcsok) alkotják a kimenetként megadandó Steiner-fát.

A 6. feladat megoldása. Színezzük az éleket pozitív egész számokkal, egymás után egyesével oly módon, hogy minden e élhez azt a számot rendeljük, amely a legkisebb azok közül, melyek nincsenek hozzárendelve egyetlen e-hez csatlakozó élhez sem. Ez a színezés legfeljebb $2\Delta - 1$ színt használ (ahol Δ a gráf maximális foka), mivel minden élhez legfeljebb $2\Delta - 2$ másik él csatlakozhat. Mivel az élkromatikus szám legalább Δ, az így megadott algoritmus csakugyan legfeljebb kétszer annyi színt használ, mint az optimum, az eljárás polinomialitása pedig nyilvánvaló. Legyenek az 5 hosszú kör élei sorban a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, az a_i-vel párhuzamos él legyen b_i. Színezzük az éleket mondjuk az $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ sorrendben, ekkor rendre az $1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 6$ színeket osztjuk ki (az élkromatikus szám egyébként 5, de ezt nem kellett megállapítani).