Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2016. április 19.

1. a) Írjuk fel a jobbra látható lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Döntsük el, hogy a (primál) feladat célfüggvénye felülről korlátos-e a megoldáshalmazán és ha igen, határozzuk meg a feladat maximumértékét.

$\max\{x_1 + x_3\}$
ha
$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$
$2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 1$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

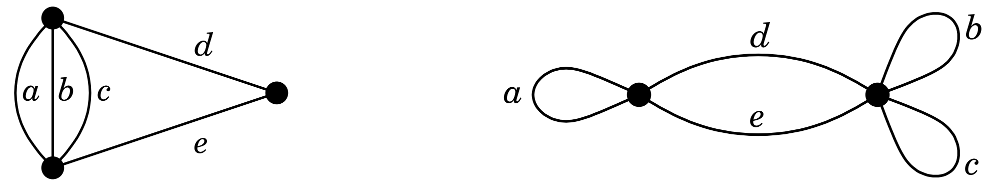
2. A p valós paraméter mely értékeire totálisan unimoduláris az alábbi mátrix?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & p \end{pmatrix}$$

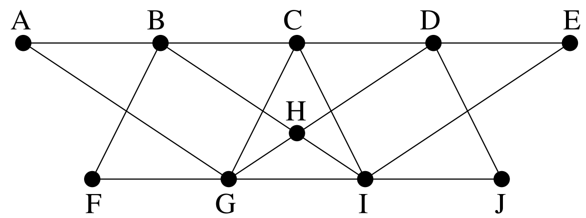
3. A p valós paraméter minden értékére állapítsuk meg, hogy az alábbi mátrix oszlopai milyen matroidot koordinátáznak a valós test felett. Ahol a matroid grafikus, ott adjunk meg egy gráfreprezentációt is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & 1 & 0 & 0 \\ 2p-1 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Az alábbi két gráf által meghatározott grafikus matroidoknak állapítsuk meg az összegét. Ha az összeg grafikus, akkor adjunk meg egy gráfreprezentációt is.



5. Hajtsuk végre és dokumentáljuk a maximális belső csúcsszámú feszítőfa probléma közelítésére szolgáló, mélységi keresésen alapuló algoritmust az alábbi gráfra oly módon, hogy a mélységi keresést a B csúcsból indítjuk és a mélységi fának levele a C csúcs.



6. Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges G gráf bármely nem bővíthető párosítása legalább $\frac{1}{2}\nu(G)$ élet tartalmaz. ($\nu(G)$ a G-beli független élek maximális számát jelöli. Egy párosítás *nem bővíthető*, ha a gráf bármely, a párosításba nem tartozó élét hozzávéve a kapott élhalmaz sosem párosítás.)

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása.

a) A megadott lineáris program $\max\{cx : Ax \le b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ -7 & -5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Amint látható, a feltételek között szereplő egyenletet helyettesítettük az $7x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 3$ és a $-7x_1 - 5x_2 - 3x_3 \le -3$ egyenlőtlenségekkel, illetve az x_1-re és x_2-re vonatkozó nemnegativitási feltételeket $-x_1 \le 0$, illetve $-x_2 \le 0$ alakra hoztuk. Most a duálist a tanult $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{aligned}
&\min\{3y_1 - 3y_2 + y_3\} \\
&\text{ha} \\
&7y_1 - 7y_2 + 2y_3 - y_4 = 1 \\
&5y_1 - 5y_2 + 4y_3 - y_5 = 0 \\
&3y_1 - 3y_2 + y_3 = 1 \\
&y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0, y_5 \ge 0
\end{aligned}$$

b) A primál feladat rendszere nyilván megoldható, például megoldást ad (sok más mellett) az $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Így a tanult „három kalitkás” tétel szerint a primál célfüggvény felülről korlátossága ekvivalens $yA = c$, $y \ge 0$, vagyis a duális feladat rendszerének megoldhatóságával.

A duális megoldhatóságának eldöntéséhez egyáltalán nem szükséges, de hasznos, ha észrevesszük, hogy az y_4 és y_5 duális változók szerepe nagyon speciális: mivel y_4 a rá vonatkozó nemnegativitási feltételt nem számítva csak az első egyenletben jelenik meg, ezért ez az egyenlet átírható $7y_1 - 7y_2 + 2y_3 \ge 1$ alakba és ezután az y_4 változó elhagyható a rendszerből. Ezzel analóg módon a második egyenlet ekvivalens az $5y_1 - 5y_2 + 4y_3 \ge 0$ egyenlőtlenséggel. (Az y_4-re és y_5-re vonatkozó fenti megfigyelés azonos azzal, ami az előadáson elhangzott a minden változó nemnegativitását előíró primál feladatokra vonatkozóan a duális ekvivalens alakjáról.) Hasonlóan hasznos, de nem feltétlen szükséges megfigyelni, hogy mindhárom egyenletben (és a célfüggvényben is) kiemelés után megjelenik az $y_1 - y_2$ különbség, így ezt helyettesíthetjük egyetlen változóval – jelölje ezt y_{12} –, ami már bármely valós értéket felvehet (hiszen két nemnegatív szám különbségeként bármilyen valós érték felírható). Mindezeket figyelembe véve a duális rendszere a következőre egyszerűsödik:

$$\begin{aligned}
&7y_{12} + 2y_3 \ge 1 \\
&5y_{12} + 4y_3 \ge 0 \\
&3y_{12} + y_3 = 1 \\
&y_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Innen már nagyon könnyű a duális egy megoldását megadni: például (sok más mellett) $y_{12} = 0$, $y_3 = 1$ megfelel. Ugyanez a megoldás a duális átalakítások előtti alakjában megadható (például) így: $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = 1$, $y_4 = 1$, $y_5 = 4$.

Tehát a duális rendszere megoldható, így a primál célfüggvény felülről korlátos a megoldáshalmazán. Továbbá mivel a duális célfüggvénye $3y_1 - 3y_2 + y_3$ és a duális feltételei között szerepel a $3y_1 - 3y_2 + y_3 = 1$ egyenlet, ezért a duális minden megoldására az azon felvett célfüggvényérték 1, így ezek minimuma is 1. A dualitástételből következően tehát a primál feladat maximumértéke is 1.

Megjegyezzük, hogy mivel itt a primál feladat nem mindegyik változó nemnegativitását írta elő, ezért a duális felírásakor nem használható a tanult ekvivalens alak (legalábbis közvetlenül semmiképp), a duális eredeti definícióját kell alkalmaznunk – ahogyan azt a megoldásban tettük is.

A 2. feladat megoldása. Mivel egy mátrix elemei 1×1-es részmátrixoknak tekinthetők, ezért egy totálisan unimoduláris mátrixnak minden elemei is ± 1 vagy 0 kell legyen. Vagyis p lehetséges értékeinek vizsgálatát elegendő erre a három értékre korlátozni.

A $p = -1$ esetben a mátrix nem totálisan unimoduláris: valóban, a $p = -1$ mellett álló 1-es, valamint az ezek felett két sorral álló két további 1-es (vagyis a 2. és 4. sorok, illetve a 4. és 5. oszlopok) által meghatározott négyzetes részmátrix determinánsa $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2$.

A fennmaradó $p = 0$ és $p = 1$ esetekben viszont a mátrix totálisan unimoduláris lesz. Ennek megmutatásához mindkét esetben elég lesz belátni, hogy az utolsó (p-t is tartalmazó) oszlop elhagyásával kapott 4×4-es mátrix totálisan unimoduláris. Jelöljük ugyanis ezt a mátrixot M-mel; ekkor az eredeti mátrix M-ből a $p = 0$ esetben egy „egységvektor" (vagyis egy egyetlen 1-est és egyébként csupa nullát tartalmazó oszlop) hozzávételével, a $p = 1$ esetben pedig az M utolsó oszlopának „lemásolásával" kapható. Előadáson láttuk, hogy ez a két módosítás megtartja a mátrixok totális unimodularitását.

Az M mátrix totális unimodularitásának megmutatása pedig legegyszerűbben arra való hivatkozással lehetséges, hogy M egy páros gráf illeszkedési mátrixa (és mint ilyen, a tanultak szerint totálisan unimoduláris). Valóban, ha a G gráf egy 4 hosszú kör, amelynek az éleit sorban e_1, e_2, e_3, e_4 jelölik és a csúcsokat úgy számozzuk, hogy az e_1 a v_1 és v_3 csúcsokat köti össze, valamint v_1-gyel szemközt v_2, v_3-mal szemközt pedig v_4 van, akkor G illeszkedési mátrixa definíció szerint éppen M (az pedig nyilvánvaló, hogy a 4 hosszú kör páros gráf).

Összefoglalva tehát: a mátrix akkor és csak akkor totálisan unimoduláris, ha $p = 0$ vagy $p = 1$.

A 3. feladat megoldása. Jelölje a mátrix oszlopait sorban $\underline{o}_1, \underline{o}_2, \underline{o}_3, \underline{o}_4$. Mivel a matroid független halmazai defníció szerint a lineárisan független oszlophalmazok, ezért azt kell felderítenünk, hogy $\{\underline{o}_1, \underline{o}_2, \underline{o}_3, \underline{o}_4\}$ mely részhalmazai lineárisan függetlenek. Az ránézésre látszik, hogy bármely (legföljebb) két elemű részhalmaz lineárisan független, hiszen egyik oszlop sem skalárszorosa egy másiknak.

Vizsgáljuk most meg a teljes $\underline{o}_1, \underline{o}_2, \underline{o}_3, \underline{o}_4$ rendszer függetlenségét. Definíció szerint tehát a kérdés az $\alpha\underline{o}_1 + \beta\underline{o}_2 + \gamma\underline{o}_3 + \delta\underline{o}_4 = \underline{0}$ egyenlet nemtriviális (vagyis nem csupa 0 együtthatókat tartalmazó) megoldhatósága.

Elvégezve a beszorzásokat és az összeadást az $\alpha + \delta = 0$, $\beta + 2\gamma + 3\delta = 0$, $p \cdot \alpha + \beta = 0$, $(2p-1)\alpha + \beta - 2\gamma - 4\delta = 0$ egyenletrendszer adódik. Rögtön látszik, hogy $\alpha = 0$ esetén az első, illetve a harmadik egyenletből $\delta = 0$, illetve $\beta = 0$ adódik, amiből bármelyik további egyenletből $\gamma = 0$ is következik. Így egy $\underline{0}$-t adó, nemtriviális lineáris kombinációban $\alpha \neq 0$, ezért az végigosztható α-val. Ekkor az eredményben $\underline{o}_1$ együtthatója már 1 lesz; más szóval feltehetjük, hogy $\alpha = 1$. Ebből az első, illetve a harmadik egyenlet szerint $\delta = -1$, illetve $\beta = -p$, végül a második egyenlet szerint $\gamma = \frac{p+3}{2}$. Ezeket a negyedik egyenletbe helyettesítve azonosságot kapunk, vagyis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kapott értékei ezt is kielégítik. Összefoglalva tehát: az $\underline{o}_1, \underline{o}_2, \underline{o}_3, \underline{o}_4$ rendszer a p minden értékére lineárisan összefüggő és az összes nemtriviális, $\underline{0}$-t adó lineáris kombinációi az $\underline{o}_1 - p \cdot \underline{o}_2 + \frac{p+3}{2} \cdot \underline{o}_3 - \underline{o}_4 = \underline{0}$ egyenlet nemnulla skalárral való szorzásával kaphatók.

Ebből pedig az $\{\underline{o}_1, \underline{o}_2, \underline{o}_3, \underline{o}_4\}$ három elemű részhalmazainak lineáris függetlensége is megválaszolható. Valóban: ha egy három elemű részhalmaz lineárisan összefüggő, akkor a belőle készített, $\underline{0}$-t adó nemtriviális lineáris kombinációhoz a negyediket 0 együtthatóval hozzávéve az $\{\underline{o}_1, \underline{o}_2, \underline{o}_3, \underline{o}_4\}$ egy $\underline{0}$-t adó, nemtriviális lineáris kombinációját kapjuk – az erre való lehetőségeket pedig már ismerjük. A kérdés tehát az, hogy az $\underline{o}_1 - p \cdot \underline{o}_2 + \frac{p+3}{2} \cdot \underline{o}_3 - \underline{o}_4 = \underline{0}$ lineáris kombinációban a p paraméter mely értékeire lesz 0 együtthatójú tag. Azonnal látszik, hogy a $p = 0$ esetben $\underline{o}_2$, a $p = -3$ esetben $\underline{o}_3$ együtthatója válik nullává. Így tehát a $p = 0$ esetben az $\{\underline{o}_1, \underline{o}_3, \underline{o}_4\}$ rendszer, a $p = -3$ esetben pedig az $\{\underline{o}_1, \underline{o}_2, \underline{o}_4\}$ rendszer lineárisan összefüggő, de ezektől az esetektől eltekintve minden oszlophármas lineárisan független.

Ezzel tehát megkaptuk a keresett matroidot is a p minden értékére. A $p \neq 0$, $p \neq -3$ esetben az $U_{4,3}$ uniform matroidot kaptuk (hiszen minden oszlophármas független). Ez grafikus, reprezentálja egy 4 élű kör. A $p = 0$ esetben az egyetlen összfüggő oszlophármas az $\{\underline{o}_1, \underline{o}_3, \underline{o}_4\}$; ez a matroid is grafikus, reprezentálja (például) egy olyan 4 csúcsú gráf, amelyet egy háromszögből nyerünk, ha annak valamelyik csúcsáról „lelógatunk" egy további, $\underline{o}_2$-nek megfelelő élt. Ezzel analóg a $p = -3$ eset: itt csak az $\{\underline{o}_1, \underline{o}_2, \underline{o}_4\}$ hármas összefüggő, így ezt is egy háromszögből egy él „lelógatásával” kapott gráffal reprezentálhatjuk, csak itt a lelógatott él $\underline{o}_3$-nak felel meg.

Érdemes hangsúlyozni, hogy a fenti számolások csak egy lehetséges módszert mutatnak arra, hogy hogyan állapítható meg az egyes oszlophalmazok lineáris függetlensége (és ezáltal a matroid függetlenjei hogyan kereshetők meg). De például az $\{\underline{o}_1, \underline{o}_2, \underline{o}_3, \underline{o}_4\}$ lineáris összefüggőségét megmutathattuk volna azzal is, ha kiszámítjuk a feladatbeli mátrix determinánsát (például Gauss-eliminációval vagy kifejtéssel) és konstatáljuk, hogy az p minden értékére 0. Ebben az esetben azonban a négy lehetséges oszlophármas függetlenségének vizsgálata további munkát igényelt volna.

A 4. feladat megoldása. Jelölje a bal oldali, illetve a jobb oldali gráf által reprezentált matroidot $\mathcal{A}$, illetve $\mathcal{B}$. Az $\mathcal{A}$ matroid rangja (vagyis legnagyobb függetlenjeinek elemszáma) 2 és bázisai $\{d, e\}$, valamint még azok a 2 elemű részhalmazok, amelyek az $\{a, b, c\}$ halmazból és a $\{d, e\}$ halmazból is egy-egy elemet tartalmaznak (és $\mathcal{A}$ összes függetlenjei nyilván a bázisok, valamint azok részhalmazai). A $\mathcal{B}$ matroid ennél is sokkal egyszerűbb: a rangja 1 és a független részhalmazai csak $\{d\}$, $\{e\}$ és $\emptyset$.

$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ függetlenjei tehát definíció szerint azok a halmazok, amelyek vagy $\mathcal{A}$-ban is függetlenek, vagy egy $\mathcal{A}$-beli függetlenből d vagy e hozzávételével megkaphatók. Így $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ rangja 3 és a bázisai $\{a, d, e\}$, $\{b, d, e\}$ és $\{c, d, e\}$. Ebből az is következik, hogy $\{a, b, c\}$-nek már bármely 2 elemű részhalmaza is összefüggő – vagyis a, b és c közül bármely kettő párhuzamos. Mindezekből látszik, hogy $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ grafikus: reprezentálja egy olyan 4 csúcsú gráf, amelyet egy 3 élű útból nyerünk úgy, hogy az egyik élét 3 párhuzamos éllel helyettesítjük (amelyeknek a, b és c felelnek meg).

Az 5. feladat megoldása. A mélységi bejárás során meglátogathatjuk a csúcsokat például a $B, H, G, I, E, D, C, J, F, A$ sorrendben, ekkor a mélységi feszítőfa a $BH, HG, GI, IE, ED, DC, DJ, GF, GA$ élekből áll, itt C valóban levél. Mivel a gyökér (azaz B) foka is 1, az algoritmus megkeresi a B és C közti fabeli úton ($BHGIEDC$) a C-hez legközelebbi elágazást, vagyis D-t és a DC élet kicseréli a BC élre a fában, majd az így kapott fát adja kimenetként.

A 6. feladat megoldása. Jelöljük a párosítást P-vel. Mivel P nem bővíthető, a P által nem fedett csúcsok független halmazt kell, hogy alkossanak. Más szóval a P által fedett csúcsok lefogó ponthalmazt alkotnak, ahonnan $\tau(G) \leq 2|P|$ következik. Innen a jól ismert $\nu(G) \leq \tau(G)$ állítást felhasználva $\frac{\nu(G)}{2} \leq \frac{\tau(G)}{2} \leq |P|$.