Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2014. április 14.

1. A $G(F, L; E)$ teljes páros gráf két színosztálya legyen $F = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és $L = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen a balra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem (minden $1 \leq i, j \leq 5$ esetén). A maximális összsúlyú teljes párosítást kereső Egerváry-algoritmust valaki már elkezdte futtatni G-re és ott tart, hogy az aktuális M párosítás az $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$ és $\{a_3, b_3\}$ élekből áll, az aktuális c címkézés pedig a jobb oldali táblázatban látható. Fejezzük be az algoritmus futtatását és adjuk meg az eredményként kapott maximális összsúlyú teljes párosítást!

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 7 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 9 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c(v)$	:	1	5	4	7	3	1	0	2	0	1

(A megoldásban ne csak az algoritmus futásának az eredményét adjuk meg, hanem dokumentáljuk is a lépéseket – vagyis adjunk meg minden, a futás közben keletkező adatot.)

2. a) Írjuk fel a jobbra látható lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

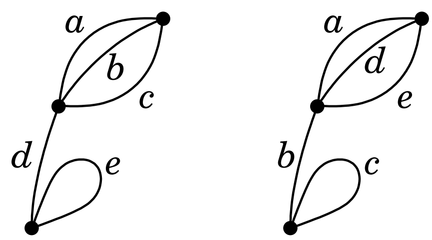
b) Döntsük el, hogy a (primál) feladat célfüggvénye felülről korlátos-e a megoldáshalmazán!

$\max\{x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4\}$
ha
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5$
$2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 \geq 3$
$x_1 + 5x_2 - x_4 \leq 6$
$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 10$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

3. Az alábbi mátrix jobb alsó sarkában álló elem olyan kétjegyű szám, melynek második jegye „sajnos” elmosódott. Meg lehet-e azért határozni, hogy milyen matroidot koordinátáz ez a mátrix a valós test felett?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1\blacksquare \end{pmatrix}$$

4. A bal oldali ábrán látható gráf körmatroidja legyen $\mathcal{A}$, a jobb oldalin láthatóé $\mathcal{B}$. Grafikusak-e az $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$, illetve az $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ matroidok?



5. Adjunk meg olyan 10 csúcsú, 10 élű egyszerű, összefüggő gráfot, melyre a minimális lefogó ponthalmaz problémára tanult 2-approximációs algoritmusok soha nem adnak optimális eredményt (és igazoljuk, hogy a gráf csakugyan rendelkezik a kívánt tulajdonsággal).

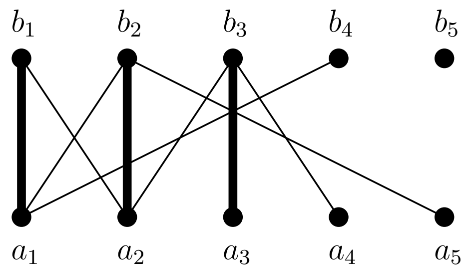
6. Egy négyzet egyik átlóját osszuk három pont segítségével négy egyenlő részre. Legyenek a G teljes gráf csúcsai a négyzet csúcsai és az átlón lévő három pont (G-nek tehát összesen hét csúcsa van), minden él súlya legyen azonos végpontjainak távolságával. Hajtsuk végre és dokumentáljuk a G gráfra az utazóügynök probléma közelítésére szolgáló Christofides-algoritmust.

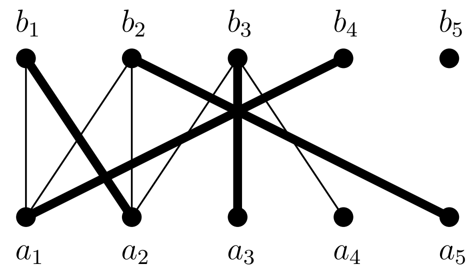
A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása. A megadott címkézéshez tartozó „piros élek” meghatározásával kezdjük – vagyis azokat az $e = \{a, b\}$ éleket keressük, amelyekre $w(e) = c(a) + c(b)$ (ahol $w(e)$ az e él súlyát jelöli). Ezek a következők: $\{a_1, b_1\}$, $\{a_1, b_2\}$, $\{a_1, b_4\}$, $\{a_2, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, $\{a_2, b_3\}$, $\{a_3, b_3\}$, $\{a_4, b_3\}$ és $\{a_5, b_2\}$; lásd az alábbi, bal oldali ábrát. (Látszik, hogy a megadott M párosítás élei – az ábrán vastag vonallal – is pirosak; ha ez nem így volna, az azt jelentené, hogy az algoritmus korábbi futása hibás volt.)

Most M-ből kiindulva a maximális párosítás keresésére szolgáló javító utas algoritmust futtatjuk a piros élek alkotta részgráfban. A párosítatlan F-beli pontok: a_4 és a_5. Látható, hogy a_4-ből nem vezet javító út párosítatlan L-beli pontba (vagyis b_4-be vagy b_5-be), mert a_4-ből piros élen egyedül b_3-ba lehet lépni, ennek az M szerinti párjában, a_3-ban pedig elakadunk. Viszont a_5-ből indítva a javítóút keresést sikerrel járunk: az a_5, b_2, a_2, b_1, a_1, b_4 sorrendben bejárva a csúcsokat javítóutat kapunk; ementén javítva a következő párosítást kapjuk: $\{a_5, b_2\}$, $\{a_2, b_1\}$, $\{a_1, b_4\}$, $\{a_3, b_3\}$ (lásd a jobb oldali ábrát).



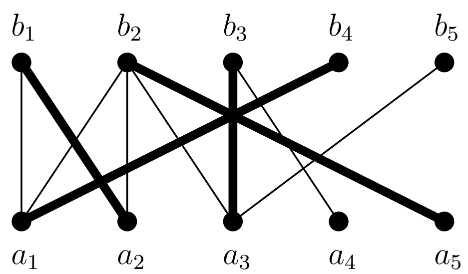


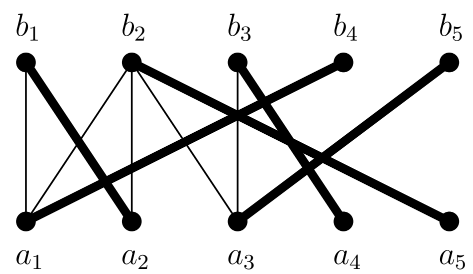
A most kapott M' párosítás maximális a (jelenlegi) piros részgráfban, mert b_5-re nem illeszkedik piros él, így nyilván nincs öt élű párosítás. Ezért áttérünk a következő c' címkézés meghatározására. A párosítatlan F-beli, illetve L-beli csúcsok halmaza $F_1 = \{a_4\}$ és $L_1 = \{b_5\}$. Az F_1-ből alternáló úton elérhető L-beliek halmaza $L_2 = \{b_3\}$, mert a_4-ből továbbra is csak b_3-ba vezet piros él, ahonnan a_3-ba lépve elakadunk. Az L_2-beliek M' szerinti párjainak halmaza tehát $F_2 = \{a_3\}$. Így a maradék F-beliek, illetve L-beliek halmaza $F_3 = \{a_1, a_2, a_5\}$, illetve $L_3 = \{b_1, b_2, b_4\}$. Az algoritmus működési szabálya szerint az $F_1 \cup F_2 = \{a_3, a_4\}$ és az $L_1 \cup L_3 = \{b_1, b_2, b_4, b_5\}$ halmazok halmazok közti élek mindegyikére ki kell számítani a $c(a) + c(b) - w(e)$ „fölösleget”, majd ezek minimumát kell venni. A feladat adatait felhasználva az a_3-ból induló (és $L_1 \cup L_3$-ba menő) élek fölöslegei rendre 3, 2, 3 és 2, az a_4-ből induló élek fölöslegei pedig 4, 3, 4 és 3. Ezeknek a minimuma pedig $\delta = 2$.

Ezek után a következő c' címkézés meghatározásához $F_1 \cup F_2$ elemein δ-val csökkenteni, L_2 elemein pedig δ-val növelni kell a jelenlegi címkézést. Így c' a következő:

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c'(v)$	:	1	5	2	5	3	1	0	4	0	1

Ezzel az algoritmus teljes ciklusát végrehajtottuk, ismét a (most már c'-höz tartozó) piros élek meghatározásával folytatjuk. A fenti ábrákon látható piros részgráfhoz képest három változás történik: $\{a_2, b_3\}$ megszűnik pirosnak lenni, viszont $\{a_3, b_2\}$ és $\{a_3, b_5\}$ új piros élek (lásd az alábbi, bal oldali ábrát). (Ezek a változások egyrészt c'-ből és a megadott élsúlyokból közvetlenül is kiolvashatók, de a fentiekből is következik: $\{a_2, b_3\}$ volt az egyetlen F_3 és L_2 közötti él, a δ meghatározásakor pedig a minimum az $\{a_3, b_2\}$ és $\{a_3, b_5\}$ éleken vétetett föl.) Az új piros részgráfban könnyen találunk az M'-re nézve javító utat: a_4, b_3, a_3, b_5. Ementén javítva M'-t pedig már teljes párosítást kapunk: $\{a_4, b_3\}$, $\{a_3, b_5\}$, $\{a_1, b_4\}$, $\{a_2, b_1\}$ és $\{a_5, b_2\}$ (lásd a jobb oldali ábrát). Így ezzel (illetve a fenti c' címkézéssel) áll meg az algoritmus futása.





A 2. feladat megoldása.

a) A megadott lineáris programban a változók nemnegativitása is szerepel a feltételek között, ezért érdemes azt $\max\{cx : Ax \le b, x \ge 0\}$ alakúnak tekinteni, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Amint látható, a feltételek között szereplő egyenletet helyettesítettük az $x_1+3x_2+2x_3-2x_4 \le 5$ és a $-x_1-3x_2-2x_3+2x_4 \le -5$ egyenlőtlenségekkel, illetve a következő egyenlőtlenséget is megszoroztuk (-1)-gyel. Most a duálist a tanult $\min\{yb : yA \ge c, y \ge 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

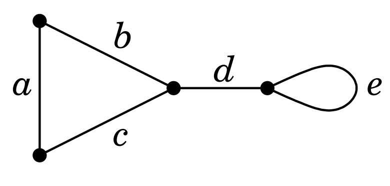
$$\begin{aligned} &\min\{5y_1 - 5y_2 - 3y_3 + 6y_4 + 10y_5\} \\ &\text{ha} \\ &y_1 - y_2 - 2y_3 + y_4 + 2y_5 \ge 1 \\ &3y_1 - 3y_2 + 4y_3 + 5y_4 + y_5 \ge 1 \\ &2y_1 - 2y_2 + y_3 + y_5 \ge 3 \\ &-2y_1 + 2y_2 - y_3 - y_4 - y_5 \ge -2 \\ &y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0, y_5 \ge 0 \end{aligned}$$

(Megjegyezzük, hogy a primál feladatot felfoghatjuk $\max\{cx : Ax \le b\}$ alakúnak is és erre használhatjuk a duális eredeti definíció szerinti alakját, vagyis a $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$ alakot. Ekkor a változók nemnegativitását előíró négy egyenlőtlenség is az $Ax \le b$ rendszer része, vagyis A-nak és b-nek 9 sora van. Ennek megfelelően a duális egy 9 változós lineáris program – amely azonban az előadáson tanultak szerint ekvivalens a fent kapottal.)

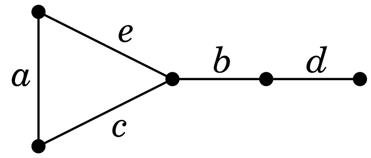
b) A primál feladat rendszere megoldható, például az $x_1 = 5$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ választással. Ha a célfüggvénye felülről korlátos volna a megoldáshalmazán, akkor a dualitástétel szerint a duális feladat egyenlőtlenségrendszere is megoldható volna . Ez azonban jól láthatóan nem igaz: az utolsó egyenlőtlenség (-1)-gyel szorzás után $2y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \le 2$, ami nyilván ellentmond a $2y_1 - 2y_2 + y_3 + y_5 \ge 3$ és az $y_4 \ge 0$ feltételeknek. Így a primál célfüggvénye nem felülről korlátos a megoldáshalmazán.

A 3. feladat megoldása. Jelölje a mátrix oszlopait sorban a, b, c és d. Az ezek által koordinátázott $\mathcal{M}$ matroid rangja nyilván legföljebb 3 (hiszen négy $\mathbb{R}^3$-beli vektor nem lehet lineárisan független). A négy lehetséges oszlophármas lineáris függetlenségét legegyszerűebben a megfelelő 3×3-as determinánsok kiszámításával lehet eldönteni. Ha a mátrix jobb alsó sarkában álló elemet x-szel jelöljük, akkor azt kapjuk, hogy az $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, illetve $\{b, c, d\}$ oszlopok által alkotott determinánsok értéke rendre 1, $x - 7$, (-5), illetve 2. Mivel $x - 7 = 0$ lehetetlen (hiszen $x \ge 10$), ezért egyik determináns értéke sem 0, így bármely három oszlop lineárisan független. Következésképp $\mathcal{M}$ az elmosódott jegy értékétől függetlenül az $U_{4,3}$ uniform matroiddal izomorf.

A 4. feladat megoldása. Az $\mathcal{A}$ matroidban definíció szerint azok a részhalmazok függetlenek, amelyek az $\{a, b, c\}$ halmazból legföljebb egy elemet tartalmaznak és emellett tartalmazhatják még d-t. Az $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ függetlenjei tehát azok a részhalmazok, amelyek két ilyen halmaz uniójaként előállhatnak. Így az e elem $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$-ban is hurok (vagyis az egyelemű $\{e\}$ részhalmaz összefüggő) és összefüggő $\{a, b, c\}$ is. Függetlenek viszont az $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ és a $\{b, c, d\}$ részhalmazok. Következésképp $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ grafikus, reprezentálja például az alábbi gráf.



Hasonlóan az $\mathcal{A}$-hoz, $\mathcal{B}$ függetlenjei azok a részhalmazok, amelyek az $\{a, d, e\}$ halmazból legfölјebb egy elemet tartalmaznak és emellett tartalmazhatják még b-t. Az $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ meghatározásához tehát ezeknek és az $\mathcal{A}$ függetlenjeinek az unióját kell képezni. Rögtön látszik, hogy $\{a, c, e\}$ összefüggő lesz $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$-ben, mert a, c és e közül bárhogyan kettőt választva $\mathcal{A}$-ban és $\mathcal{B}$-ben is összefüggő halmazt kapunk. Független viszont mind a három olyan 4 elemű részhalmaz, amely $\{a, c, e\}$-t nem tartalmazza: $\{a, b, c, d\} = \{c, d\} \cup \{a, b\}$, $\{a, b, d, e\} = \{a, d\} \cup \{b, e\}$ és $\{b, c, d, e\} = \{c, d\} \cup \{b, e\}$ (ahol mindhárom esetben az unióban balra egy $\mathcal{A}$-beli, jobbra egy $\mathcal{B}$-beli függetlent írtunk). Következésképp $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ is grafikus, reprezentálja például az alábbi gráf.



Az 5. feladat megoldása. Mivel mindkét tanult algoritmus egy (nem bővíthető) párosítás végpontjait adja kimenetként, a kimenet mindig páros számú csúcsból áll. Ha az optimum értéke páratlan, akkor tehát egyik algoritmus sem adhatja ezt. Olyan 10 csúcsú, 10 élű egyszerű, összefüggő G gráfot, melyre $\tau(G) = 3$ nem nehéz adni: legyen például G egy háromszög, melynek A, B, C csúcsaihoz rendre 3,2,2 további csúcs csatlakozik egy-egy éllel. Könnyen látható, hogy ekkor A, B, C lefogó ponthalmaz és hogy 2 elemű lefogó ponthalmaz nincs G-ben.

A 6. feladat megoldása. Legyenek a négyzet csúcsai A, B, C, D, az AC átlón lévő pontok (A-tól vett távolság szerint növő sorrendben) E, F, G. Az algoritmus először minimális összköltségű feszítőfát keres (például) Kruskal algoritmusával, azaz kiválasztja először az AE, EF, FG, GC éleket (valamilyen sorrendben), majd a BF, DF éleket (szintén tetszőleges sorrendben), mivel ezek a legrövidebbek azok közül, amik a már meglévőkkel együtt nem alkotnak kört. Következő lépésben az így kapott feszítőfa páratlan fokú csúcsai által feszített részgráfban kell minimális összsúlyú párosítást találnunk. A páratlan fokú csúcsok A, B, C, D, a minimális összsúlyú teljes párosítás tehát az AB, CD vagy pedig az AD, BC élekből áll. (Álljon mondjuk az AD, BC élekből). A feszítőfa és a párosítás éleinek uniójaként kapott részgráf egy Euler-körsétájának megkeresése, majd a tanult módszer szerint Hamilton-körré való levágása van hátra. Az Euler-körséta lehet pl. $A, D, F, B, C, G, F, E, A$, ekkor az első és egyetlen levágás a $G - F - E$ út GE éllel való helyettesítése lesz. A kapott Hamilton-kör ekkor tehát A, D, F, B, C, G, E, A.