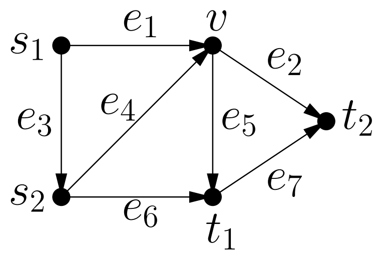
Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2013. április 22.

1. Írjuk fel a jobbra látható lineáris egyenlőtlenség-rendszert $Ax \leq b$ alakban, majd bizonyítsuk be a Farkas-lemma felhasználásával, hogy a rendszer nem megoldható! (Vagyis adjunk meg egy vektort és mutassuk meg róla, hogy ez a Farkas-lemma értelmében bizonyítja a rendszer megoldhatatlanságát!)

$$\begin{aligned}
&7x_1 - 3x_2 + 9x_3 - 5x_4 \geq 1\\
&x_1 - 8x_4 = 5\\
&x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 1\\
&x_1 + x_3 - 3x_4 \leq 1
\end{aligned}$$

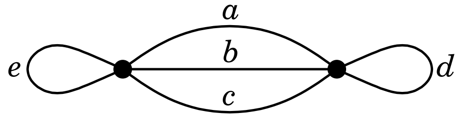
2. Tekintsük a következő kéttermékes folyamfeladatot: maximalizálandó az összfolyamérték a jobbra látható ábra hálózatában, ha az első, illetve a második termékhez tartozó termelő és fogyasztó pontok s_1 és t_1, illetve s_2 és t_2, továbbá az e_1, e_5 és e_6 élek kapacitása 2, a többi él kapacitása 1. Írjuk fel ezt a feladatot lineáris programként (vagyis adjunk meg egy olyan lineáris programozási feladatot, amelynek a megoldása ekvivalens a megadott kéttermékes folyam feladattal)! A keresett lineáris programot *ne* mátrixos alakban adjuk meg, hanem vezessünk be a feladat szempontjából releváns változókat és ezek segítségével írjuk fel. (A folyam feladatot tehát *nem szükséges* megoldani, a feladat csupán a lineáris programként való megfogalmazás.)

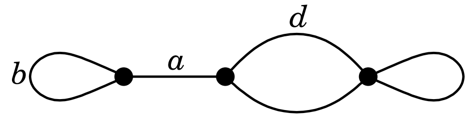


3. Koordinátázza az alábbi mátrix a valós számok teste fölött az $\mathcal{M}_x$ matroidot. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{M}_x$ az x minden nemnegatív értéke esetén grafikus. Igaz-e ugyanez az állítás x negatív értékeire is?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & x & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Az alábbi két gráf az $\{a, b, c, d, e\}$ halmazon két grafikus matroidot definiál, azonban a második gráf két éléről „véletlenül” lemaradt a c, illetve az e betű. Eldönthető-e azért, hogy a két matroid összege grafikus-e?





5. Adjunk olyan 2-approximációs algoritmust egy összefüggő gráf maximális élszámú páros részgráfjának keresésére, amely páros gráf bemenetekre optimális megoldást ad. Az algoritmus működését szemléltessük is egy tetszőleges összefüggő, 8 csúcsú, 8 élű, nem páros, egyszerű gráfon.

6. Igaz-e, hogy a Steiner-fa probléma polinom időben megoldható, ha a Steiner-pontok halmaza legfeljebb $2 \log n$ elemű, ahol n a gráf csúcsainak száma?

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása. A rendszer mátrixos alakja $Ax \leq b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -9 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A Farkas-lemma értelmében az $Ax \leq b$ megoldhatatlanságát egy olyan $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ sorvektor bizonyítja, amelyre $yA = 0$, $y \geq 0$ és $yb < 0$. Ezt részletesen kiírva a következő feltételeket kapjuk:

$$\begin{array}{lr} (1) & -7y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + y_5 = 0 \\ (2) & 3y_1 - y_4 = 0 \\ (3) & -9y_1 + y_4 + y_5 = 0 \\ (4) & 5y_1 - 8(y_2 - y_3) - y_4 - 3y_5 = 0 \\ (5) & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0,\ y_5 \geq 0 \\ (6) & -y_1 + 5(y_2 - y_3) + y_4 + y_5 < 0 \end{array}$$

Legyen $y_1 = \alpha$ valamilyen $\alpha \geq 0$ értékre. Ekkor (2)-ből $y_4 = 3\alpha$. Ezt felhasználva (3)-ból $y_5 = 6\alpha$. Ezekből és (1)-ből $y_2 - y_3 = -2\alpha$. Ha viszont $y_1, \ldots, y_5$ értékeit úgy választjuk, hogy az eddig kapott feltételeknek (és $y_2, y_3 \geq 0$-nak) megfeleljenek, akkor ezekből már (4) és (6) automatikusan teljesül: erről egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk (utóbbi esetben (-2α) a kifejezés értéke). Így a rendszer megoldhatatlanságát bizonyítja a Farkas-lemma értelmében minden, a fenti feltételeknek megfelelő vektor, például $y = (1, 0, 2, 3, 6)$.

Az 2. feladat megoldása. A többtermékes folyamfeladat tanult definíciója szerint minden élhez 2 változót kell bevezetnünk: jelölje x_{1i} az e_i élen az 1-es termékből (s_1-ből t_1-be) menő folyam mennyiségét és hasonlóan x_{2i} jelölje a 2-es termékből e_i-n folyó mennyiséget. Ezek a változók természetesen mind nemnegatívak: $x_{ij} \geq 0$ minden $1 \leq i \leq 2$ és $1 \leq j \leq 7$ esetén.

Valójában a 14 változó közül a „folyam megmaradási" feltételek miatt 4 értéke garantáltan 0: $x_{21} = x_{23} = x_{12} = x_{17} = 0$ (hiszen például s_1-be nem lép be él, így az s_1-ből kimenő éleken a 2-es termékből nem mehet pozitív folyam). Ezzel az s_1 és t_2 csúcsokra vonatkozó megmaradási feltételek már teljesülnek is (hiszen s_1-nél az első termékre, t_2-nél a másodikra nincs ilyen feltétel). A többi csúcsra viszont fel kell írnunk a megmaradási feltételeket: v-nél $x_{12} + x_{15} - x_{11} - x_{14} = 0$ és $x_{22} + x_{25} - x_{21} - x_{24} = 0$, s_2-nél $x_{16} + x_{14} - x_{13} = 0$, továbbá t_1-nél $x_{27} - x_{25} - x_{26} = 0$.

Végül minden élre fel kell írnunk a rá vonatkozó kapacitás feltételt: $x_{11} + x_{21} \leq 2$, $x_{12} + x_{22} \leq 1$, $x_{13} + x_{23} \leq 1$, $x_{14} + x_{24} \leq 1$, $x_{15} + x_{25} \leq 2$, $x_{16} + x_{26} \leq 2$, $x_{17} + x_{27} \leq 1$.

Ezzel a folyamértékekre vonatkozó összes feltételt felírtuk, már csak a célfüggvény van hátra: a két folyam nagyságát s_1-nél, illetve s_2-nél mérve, maximalizálandó az $x_{11} + x_{13} + x_{24} + x_{26} - x_{23}$ kifejezés értéke.

Az 3. feladat megoldása. Jelölje a mátrix oszlopait sorban a, b, c és d. Az $\mathcal{M}_x$ matroid megismeréséhez azt kell megvizsgálnunk, hogy (x különböző értékeire) mely oszlophalmazok lineárisan függetlenek. Mivel az oszlopok térvektorok, együttesen nyilván lineárisan összefüggők. Sőt, már az $\{a, c, d\}$ halmaz is összefüggő – amiről legegyszerűbben az általuk alkotott 3×3-as mátrix determinánsának kiszámításával győződhetünk meg (ugyanis ez 0). Hasonlóan, az $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, illetve $\{b, c, d\}$ halmazoknak megfelelő determinánsokat kiszámítva sorban a $-3x - 3$, a $-x - 1$, illetve a $-5x - 5$ értékeket kapjuk. Így tehát az $x = -1$ értékre ezek mind összefüggőek, $x \neq -1$ esetén viszont egyikük sem. Következésképp $x \neq -1$ esetén (és így minden nemnegatív x-re) $\mathcal{M}_x$ grafikus: reprezentálja az a gráf, amelyben $\{a, c, d\}$ háromszöget alkotnak és b erről „lelóg". Az $x = -1$ esetben viszont $\mathcal{M}_x$ az $U_{4,2}$-vel izomorf, így nem grafikus (vagyis az állítás negatív x-ekre nem mindig igaz).

Az 4. feladat megoldása. Jelölje sorrendben $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ a két gráf körmatroidját. Az $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ összegmatroid rangja biztosan 3 lesz: ekkora független halmazt nyilván kaphatunk egy $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$-beli uniójaként (például: $\{a, b, d\} = \{b\} \cup \{a, d\}$ vagy $\{a, c, d\} = \{c\} \cup \{a, d\}$), de nagyobbat biztosan nem (mert $\mathcal{M}_1$ rangja 1, $\mathcal{M}_2$-é 2).

A feladat kérdésének megválaszolásához csak két esetet kell megvizsgálnunk: az elsőben e hurokél és c párhuzamos d-vel, a másodikban fordítva. Mindkét esetben elég megtalálnunk a bázisokat, vagyis a 3 elemű függetleneket.

Az első esetben $\{e\}$ összefüggő (vagyis e hurok), mert mindkét matroidban az. Maradnak tehát az $\{a, b, c, d\}$ három elemű részhalmazai. Ezek közül $\{b, c, d\}$ összefüggő: d $\mathcal{M}_1$-ben hurok, ezért őt $\mathcal{M}_2$-ből kellene kiválasztani és hasonló okokból b-t $\mathcal{M}_1$-ből – de akkor c-t már egyikből sem választhatjuk ki. Viszont $\{a, b, c, d\}$ többi három elemű részhalmaza már független $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$-ben: $\{a, b, d\}$-ről és $\{a, c, d\}$-ről ezt már fentebb láttuk, továbbá $\{a, b, c\} = \{b\} \cup \{a, c\}$. Mindez azt mutatja, hogy $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ grafikus: reprezentálja egy olyan gráf, amelyben $\{b, c, d\}$ háromszöget alkot, a erről "lelóg", e pedig hurokél.

A második esetben már a 2 elemű halmazok sem mind függetlenek: $\{b, c\}$ és $\{d, e\}$ is összefüggő, mert b és c $\mathcal{M}_2$-ben hurkok és $\mathcal{M}_1$-ben kört alkotnak, d és e esetében pedig fordítva. Így a bázisok csak olyan három elemű halmazok lehetnek, amelyek $\{b, c\}$-ből és $\{d, e\}$-ből egy-egy elemet, valamint még a-t tartalmazzák. Az ilyen halmazok viszont mind függetlenek is: $\{a, b, d\}$-ről és $\{a, c, d\}$-ről ezt már fentebb láttuk, továbbá $\{a, b, e\} = \{b\} \cup \{a, e\}$ és $\{a, c, e\} = \{c\} \cup \{a, e\}$. Így $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ ebben az esetben is grafikus: reprezentálja például egy olyan hatpontú gráf, mely a $\{b, c\}$, illetve $\{d, e\}$ párhuzamos élpárok és az a él pontdiszjunkt uniója.

Vagyis $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ mindenképp grafikus.

Az 5. feladat első megoldása. A gráf csúcsait sorban, egyesével két osztályba soroljuk az órán tanult algoritmus szerint, azaz egy újonnan érkező csúcsot abba az osztályba helyezünk, ahol kevesebb (nem több) szomszédja van. Láttuk, hogy ez az algoritmus 2-approximációs. Ha a csúcsokat olyan sorrendben vesszük, hogy az aktuálisan már elhelyezett csúcsok mindig összefüggő részgráfot alkossanak, akkor az egy osztályba kerülő csúcsok közt lesz (páros hosszú) út a gráfban, így semelyik kettő nem lehet szomszédos, ekkor ugyanis lenne a gráfban páratlan kör, ami páros gráfban lehetetlen. Ebben a sorrendben véve tehát a csúcsokat, minden él bekerül a páros részgráfba, így a kapott megoldás optimális lesz. Azt kell még belátnunk, hogy a kérdéses típusú sorrend létezik és előállítható polinom időben: például szélességi vagy mélységi kereséssel is ilyen sorrendhez jutunk.

Az 5. feladat második megoldása. Egyszerűbb megoldás, ha először ellenőrizzük, hogy a kapott gráf páros-e (szélességi kereséssel, polinom időben). Ha igen, akkor a kimenet maga a gráf lesz, ellenkező esetben az órán tanult algoritmusok valamelyikét (pl. az első megoldásban leírtat) hajtjuk végre. Páros gráfokra optimális, más gráfokra 2-közelítő algoritmust kapunk, ami nyilván polinom időben fut.

Az 6. feladat megoldása. Legyen a Steiner-pontok halmaza S, a terminálok halmaza T, az optimális Steiner-fa F. F tartalmazza T minden csúcsát és S csúcsainak egy R részhalmazát (ami lehet üres is). A $T \cup R$ halmazok által feszített részgráfokon minimális feszítőfát keresve tehát megtaláljuk az F fát vagy egy másik, vele azonos súlyú Steiner-fát. A szóbajövő R halmazok száma $2^{|S|} = n^2$, ami a bemenet méretében polinomiális, az egyes esetek lépésszáma pedig (pl. a Kruskal-algoritmust használva) szintén polinomális. A kapott fák közül a minimális összsúlyút véve tehát polinomiális algoritmust kapunk a legkisebb költségű Steiner-fa meghatározására.