Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2011. április 21.

1. A $G(A,B;E)$ teljes páros gráf két színosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen a balra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem. Az α valós paraméter mely értékeire teljesül, hogy a csúcsokhoz a jobb oldali táblázatban látható értékeket rendelve

a) címkézést kapunk;

b) minimális összegű címkézést kapunk?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

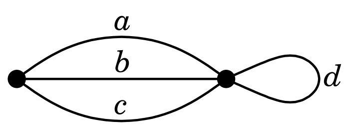
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
2	4	6	6	6	0	0	1	1	α

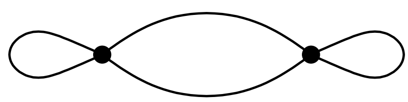
2. Tegyük fel, hogy az $Ax \le b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Jelölje az A mátrix i-edik sorát a_i, az a_i sor elhagyásával kapott mátrixot pedig A_i^-.Hasonlóan, a b vektor i-edik komponensét jelölje b_i, az ennek elhagyásával kapott oszlopvektort b_i^-. Az $Ax \le b$ rendszer i-edik egyenlőtlenségét ($a_i x \le b_i$-t) akkor nevezzük *redundánsnak*, ha az elhagyása nem változtatja meg az egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát. Bizonyítsuk be, hogy $a_i x \le b_i$ akkor és csak akkor redundáns, ha létezik olyan $y \ge 0$ sorvektor amelyre $y \cdot A_i^- = a_i$ és $y b_i^- \le b_i$ teljesül!

3. Koordinátázza az alábbi mátrix a valós számok teste fölött az $\mathcal{M}_x$ matroidot. Az x valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy $\mathcal{M}_x$ grafikus-e (és ahol igen, ott adjuk meg a megfelelő gráfot)!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 1 \\ 0 & 2 & x & x \end{pmatrix}$$

4. Az $\{a, b, c, d\}$ halmazon két grafikus matroidot definiáltunk, azonban a második gráf éleiről „véletlenül" lemaradtak a betűk. Eldönthető-e azért, hogy a két matroid összege grafikus-e?





5. Igaz-e, hogy a Steiner-fa probléma polinom időben megoldható, ha a Steiner-pontok halmaza pontosan két elemű?

6. Mutassuk meg, hogy a $P3||C_{\max}$ feladatra az LPT sorrendben történő listás ütemezés approximációs faktora nem jobb, mint $\frac{11}{9}$.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása. A táblázat adatai (definíció szerint) akkor határoznak meg egy c címkézést, ha minden $1 \leq i, j \leq 5$ számpárra $c(a_i)+c(b_j) \geq m_{i,j}$, ahol $m_{i,j}$ mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem. Ez az $1 \leq j \leq 4$ oszlopokra automatikusan teljesül (ez gyorsan ellenőrizhető), a $j = 5$ esetben pedig α-ra rendre a $2 + \alpha \geq 1$, $4 + \alpha \geq 2$, $6 + \alpha \geq 5$, $6 + \alpha \geq 5$ és $6 + \alpha \geq 4$ feltételeket kapjuk. Ezek együttesen pedig az $\alpha \geq -1$ esetben teljesülnek, így tehát ezekre az értékekre kapunk címkézést.

Minimális összúlyú címkézést nyilván csak az $\alpha = -1$ esetben kaphatunk (hiszen α összes többi szóba jövő értékére olyan címkézést kapunk, amelynek összege nagyobb az $\alpha = -1$ választással adódónál). Az előadáson tanultak szerint úgy tudjuk kimutatni, hogy az $\alpha = -1$ esetben kapott címkézés minimális összegű, ha mutatunk a gráfban egy olyan teljes párosítást, amelynek összsúlya megegyezik a címkék összegével (vagyis 25-tel). (Ugyanis bármely teljes párosítás összsúlya legföljebb annyi, mint bármely címkézés összege; tehát egy 25 összsúlyú teljes párosítás bizonyítja, hogy minden címkézés összege legalább 25.)

Egy ilyen teljes párosítás megtalálását az könnyíti meg, hogy (ugyancsak a tanultak szerint) csak olyan éleket van esélyünk beválogatni, amelyekre $c(a_i)+c(b_j) = m_{i,j}$. (Valóban, bármely M teljes párosítás éleire összeadva a $c(a_i) + c(b_j) \geq m_{i,j}$ egyenlőtlenséget bal oldalon az összes címke összegét, jobb oldalon M összsúlyát kapjuk; így egyenlőség a két oldal közt csak akkor lehet, ha mind az öt összeadott egyenlőtlenség is egyenlőséggel teljesült.) Ebből tehát az következik, hogy a következő élek közül kell a teljes párosítást kiválasztani: $\{a_1, b_4\}$, $\{a_1, b_5\}$, $\{a_2, b_1\}$, $\{a_3, b_5\}$, $\{a_4, b_1\}$, $\{a_4, b_2\}$, $\{a_4, b_5\}$, $\{a_5, b_1\}$ és $\{a_5, b_3\}$. Jól látható, hogy a_2 párja csak b_1 lehet, a_3-é csak b_5, b_2-é csak a_4 és b_4-é csak a_1; a_5-nek pedig marad b_3.

Vagyis megkaptuk a keresett, 25 összsúlyú teljes párosítást: $\{a_1, b_4\}$, $\{a_2, b_1\}$, $\{a_3, b_5\}$, $\{a_4, b_2\}$, $\{a_5, b_3\}$. Ebből pedig következik, hogy az $\alpha = -1$ esetben valóban minimális összegű címkézést kapunk.

Az 2. feladat megoldása. Az $a_i x \leq b_i$ (definíció szerint) pontosan akkor redundáns, ha az $A_i^- x \leq b_i^-$ lineáris egyenlőtlenségrendszer minden x megoldására $a_i x \leq b_i$ is teljesül. Más szóval: akkor, ha a $\max\{a_i x : A_i^- x \leq b_i^-\}$ lineáris program olyan, hogy a megoldáshalmazán a célfüggvénye felülről korlátos és a maximum értéke legföljebb b_i. (Azt nem kell vizsgálni, hogy az $A_i^- x \leq b_i^-$ egyenlőtlenségrendszer megoldható-e: ez az $Ax \leq b$ megoldhatóságából nyilván következik.)

Alkalmazva a dualitástételt azt kapjuk, hogy ez pontosan akkor igaz, ha a $\min\{y b_i^- : y A_i^- = a_i, y \geq 0\}$ duális program rendszere megoldható és a minimum értéke legföljebb b_i. Más szóval ez éppen azt jelenti, hogy létezik olyan megoldása a duálisnak (vagyis az $y A_i^- = a_i, y \geq 0$ feltételeket kielégítő vektor), amelyre $y b_i^- \leq b_i$. Éppen ezt kellett bizonyítani.

Az 3. feladat megoldása. Jelölje a mátrix oszlopait sorban a, b, c és d. Az $\mathcal{M}_x$ matroid megismeréséhez azt kell megvizsgálnunk, hogy (x különböző értékeire) mely oszlophalmazok lineárisan függetlenek. Mivel az oszlopok síkvektorok, nyilván nem találunk köztük 3 (vagy 4) lineárisan függetlent. A kérdés tehát az, hogy mely oszloppárok párhuzamosak (mint síkvektorok).

Jól látható, hogy az $x = 0$ esetben c mindenkivel párhuzamos, továbbá $a \parallel d$. Az $x \neq 0$ esetben viszont csak c és d tud párhuzamos lenni, ezek is csak az $x = 1$ esetben.

Mindez azt jelenti, hogy az $x = 0$ esetben $\mathcal{M}_x$ grafikus: reprezentálja egy olyan gráf, amelyben a és d párhuzamos élek, b egy ezekről „lelógó” (vagy akár külön komponenst alkotó) él, c pedig hurokél. $\mathcal{M}_x$ az $x = 1$ esetben is grafikus: ekkor egy olyan háromszög reprezentálja, amelynek egyik élét megdupláztuk (ezek lesznek c és d). Az $x \neq 0$, $x \neq 1$ esetekben viszont bármely oszloppár lineárisan független, így az $U_{4,2}$ matroidot kapjuk, amelyről ismert, hogy nem grafikus.

Az 4. feladat megoldása. Jelölje sorrendben $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ a két gráf körmatroidját. Mindkét matroid rangja 1, az elsőben $\{d\}$-n kívül minden 1 elemű halmaz független, a másodikban pedig a két párhuzamos élnek megfelelő egyelemű halmaz. Így az összegmatroid rangja 2 lesz: ekkora független halmazt nyilván kaphatunk egy $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$-beli uniójaként, nagyobbat biztosan nem.

Mivel a, b és c szerepe szimmetrikus, a feladat kérdésének megválaszolásához csak két esetet kell megvizsgálnunk: az elsőben a d hurokélre, a másodikban a két párhuzamos él valamelyikére kerül a jobb oldali gráfban.

Az első esetben d az összegmatroidban is hurok (vagyis $\{d\}$ összefüggő), az $\{a, b, c\}$ bármely kételemű részhalmaza viszont nyilván független. Így ekkor $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ grafikus: reprezentálja egy olyan gráf, amelyben a, b és c háromszöget alkot, d pedig hurokél.

A második esetben tegyük fel, hogy a jobb oldali gráfban a két hurokélre a és b kerül (mint említettük, ez mindegy). Ekkor $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$-ben $\{a, b\}$ összefüggő, hiszen $\mathcal{M}_1$-ből csak az egyiküket, $\mathcal{M}_2$-ből egyiküket sem választhatjuk, ha független halmazt akarunk kapni. A másik három 2 elemű részhalmaz viszont független $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$-ben: ha a két elem egyike a vagy b, akkor ezt $\mathcal{M}_1$-ből, a másikat $\mathcal{M}_2$-ből választhatjuk, ha viszont a $\{c, d\}$-ről van szó, akkor c-t $\mathcal{M}_1$-ből, d-t $\mathcal{M}_2$-ből választhatjuk, hogy független $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$-belit kapjunk. Az összegmatroidot tehát egy olyan háromszög reprezentálja, amelynek egyik élét megdupláztuk (ezek lesznek a és b).

Így tehát $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ a betűk elhelyezésétől függetlenül mindig grafikus.

Az 5. feladat megoldása. Legyenek a és b a Steiner-pontok. Ekkor az optimális Steiner-fa négyféle lehet aszerint, hogy melyiket tartalmazza az a és b pontok közül: tartalmazhatja csak a-t, csak b-t, mindkettőt vagy egyiket sem. A gráf többi pontját a fának természetesen tartalmaznia kell, hiszen ezek terminálok lesznek. Az optimális Steiner-fa tehát a T, $T \cup a$, $T \cup b$, $T \cup a, b$ ponthalmazok valamelyike által feszített részgráf egy feszítőfája lesz.

Így az említett feszített részgráfokon minimális feszítőfát keresve (ha van) a mohó algoritmussal, majd a kapott fák közül a minimális összsúlyút véve polinomiális algoritmust kapunk a legkisebb költségű Steiner-fa megtalálására.

Az 6. feladat megoldása. Legyenek a munkák elvégzési idői 5,5,4,4,3,3,3. Ekkor az LPT algoritmusra a teljes átfutási idő 3 gépen 11 lesz, míg az optimum 3 gépen 9, amiből az állítás következik.