Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok és megoldások
2005. november 23.

1. Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás olyan alakú legyen, mint a primál feladat felírása.)

$$\begin{aligned}
&\min\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 + 2x_2 \geq 2\\
&x_2 + 3x_3 \geq 3\\
&x_3 + 4x_4 \geq 4\\
&x_4 + x_1 \geq 1
\end{aligned}$$

Megoldás. Ismert, hogy a célfüggvény minimuma egyenlő a célfüggvény ellentettje maximumának ellentettjével. Ezért a feladat $(-1) \cdot \max\{cx : Ax \leq b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$c = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A duális feladat ezért $(-1) \cdot \min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ alakú (Rendszeroptimalizálás könyv, 22. oldal). Ha itt a minimum ellentettje helyett ismét az ellentett célfüggvény maximumára térünk át (és a lineáris egyenleteket is (-1)-gyel szorozzuk), a duális feladat végül is a következő:

$$\begin{aligned}
&\max\{2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4\}\\
&\text{ha}\\
&y_1 + y_4 = 1\\
&2y_1 + y_2 = 1\\
&3y_2 + y_3 = 1\\
&4y_3 + y_4 = 1\\
&y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{aligned}$$

2. Legyen adott egy tetszőleges (valós, nem feltétlen négyzetes) mátrix. A feladatunk az, hogy kiválasszuk a mátrix néhány elemét úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban legalább 1 kiválasztott elem legyen, de az összes kiválasztott elem összege a lehető legkisebb legyen. Bizonyítsuk be, hogy létezik polinomiális idejű algoritmus ennek a feladatnak a megoldására!

Megoldás. Készítsünk egy G páros gráfot, melynek egyik pontosztályában lévő csúcsai az adott mátrix sorainak, másik pontosztályában lévő csúcsai a mátrix oszlopainak feleljenek meg. Minden sornak megfelelő csúcsot kössünk össze minden oszlopnak megfelelő csúccsal és az így keletkező e élhez rendeljünk egy $w(e)$ súlyt: a megfelelő sor és oszlop kereszteződésében álló mátrixelemet. A feladat mostmár az, hogy G-ben olyan élhalmazt találjunk, amely minden csúcsot lefed és a benne szereplő élek összsúlya minimális.

Megmutatjuk, hogy ez a feladat megfogalmazható lineáris programozási feladatként. Mivel ismert, hogy ezek megoldására van polinom idejű algoritmus, ezzel a feladatot megoldjuk.

Első közelítésben egészértékű programozási problémaként fogalmazzuk meg a feladatot. Minden e élhez rendeljünk egy $x(e)$ változót, amelyre írjuk fel az $0 \leq x(e) \leq 1$ egyenlőtlenségeket és deklaráljuk $x(e)$-t egészértékűnek. Ezzel nyilván azt garantáljuk, hogy minden

$x(e)$ 0, vagy 1 értékű. Célunk, hogy az 1 értékű változóknak megfelelő élek lefogó élhalmazt alkossanak. Ehhez elég minden v csúcsra felírni egy egyenlőtlenséget: ha v-re az $e_1, \ldots, e_d$ élek illeszkednek, akkor $\sum_{i=1}^{d} x(e_i) \geq 1$ éppen azt fejezi ki, hogy v-re illeszkedik legalább 1 kiválasztott él. Ezért a kapott egyenlőtlenségrendszer egész megoldásain a $\sum w(e)x(e)$ lineáris függvényt minimalizálva (vagy annak ellentettjét maximalizálva) valóban megkaptuk a kitűzött feladat egészértékű programozási megfogalmazását.

Vegyük észre, hogy a fenti feladathoz tartozó együtthatómátrix

$$\begin{pmatrix} -B \\ E \\ -E \end{pmatrix},$$

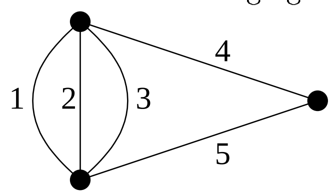
ahol B a G páros gráf illeszkedési mátrixa. Mivel B totálisan unimoduláris (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.14. tétel), a tanult triviális lemma szerint (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.13. lemma) a fenti együtthatómátrix szintén az. Mivel az egyenlőtlenségek jobb oldalain is egészek állnak (mindenhol ± 1 vagy 0), ezért a fenti IP feladat helyett megoldhatjuk a megfelelő LP feladatot is, a tanult tétel szerint (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.12. tétel) a két optimum azonos. Így a feladatot valóban sikerült LP feladatként megfogalmazni.

3. Hányféle nemizomorf matroidot reprezentálhat a valós test felett az alábbi mátrix x különböző választásai mellett? Ahol a matroid grafikus, ott gráffal is adjuk meg!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & x \end{pmatrix}$$

Megoldás. A 3 elemű alaphalmaz 2 elemű részhalmazai mind függetlenek, hiszen semelyik két oszlopvektor nem lehet párhuzamos (x értékétől függetlenül). A mátrix determinánsa (például az első oszlop szerinti kifejtésből) $x - 6$. Ezért az $x \neq 6$ esetben az összes oszlop független, vagyis ekkor a mátrix az $U_{3,3}$ (szabad) matroidot reprezentálja. Ez a matroid grafikus, például egy 3 élű út körmatroidja. Az $x = 6$ esetben viszont csak a legföljebb 2 elemű halmazok függetlenek, ezért ekkor a mátrix az $U_{3,2}$ matroidot reprezentálja. Ez is grafikus, egy három élű kör körmatroidja.

4. Az ábrán látható gráf körmatroidja legyen M. Határozzuk meg az $M \vee M$ és az $M \vee U_{5,2}$ matroid-összegeket! Ahol az összeg grafikus, ott gráffal is adjuk meg!



Megoldás. Az $M \vee M$ matroidban pontosan azok a halmazok függetlenek, amelyek az $\{1,2,3\}$ elemek közül legföljebb kettőt tartalmaznak. Ugyanis minden M-beli független legföljebb egyet tartalmazhat az $\{1,2,3\}$ elemek közül, ezért két ilyen halmaz uniója (vagyis egy $(M \vee M)$-beli független) valóban legföljebb kettőt. Másrészt, ha például egy részhalmaz nem tartalmazza az 1-es elemet, akkor független, mert részhalmaza a $\{2,3,4,5\}$-nek; utóbbi pedig független, mert a $\{2,4\}$ és a $\{3,5\}$ körmentes részhalmazok uniója. Hasonló okokból független minden olyan halmaz, ami a 2-es, vagy a 3-as elemet nem tartalmazza.

$M \vee M$ mostmár könnyen láthatóan grafikus: a G gráfban $\{1,2,3\}$ alkossanak háromszöget, a 4-es és 5-ös éleknek pedig legföljebb egy közös csúcsa legyen a háromszöggel; ekkor G körmatroidja éppen $M \vee M$.

Az $M \vee U_{5,2}$ matroidban a legföljebb 4 elemű részhalmazok függetlenek, vagyis $M \vee U_{5,2}$ izomorf $U_{5,4}$-gyel. Ugyanis M-ben minden független legföljebb 2 elemű (az adott gráfban nincs 3 élű körmentes részhalmaz), ezért egy M-beli független és egy legföljebb 2 elemű halmaz uniója (vagyis egy $(M \vee U_{5,2})$-beli független) valóban legföljebb 4 elemű. Másrészt ha egy 4 elemű részhalmazból például az 1-es elem hiányzik, akkor előáll például $\{2,4\} \cup \{3,5\}$ alakban, vagyis egy M-beli és egy $U_{5,2}$-beli uniójaként, és így valóban független $(M \vee U_{5,2})$-ben. Hasonló a helyzet, ha a 2-es, vagy 3-as elem hiányzik. Ha pedig a 4-es elem hiányzik, akkor a részhalmaz előáll $\{3,5\} \cup \{1,2\}$ alakban, vagyis $(M \vee U_{5,2})$-beli; hasonló a helyzet, ha az 5-ös elem hiányzik.

$M \vee U_{5,2}$ ezek szerint ismét grafikus, hiszen $U_{5,4}$ az 5 élű kör körmatroidja.

5. Tekintsük az {`a,á,b,d,g,i,n,o,r,s,v`} betűhalmazt, és az elemeiből képzett alábbi szavakat, mint részhalmazokat (a szavak utáni zárójelben lévő szám jelenti az adott halmaz költségét):

```
ida (1),   vid (2),    andi (2), sára (3),  andrás (3), bori (4),
andor (4), sándor (4), iván (4), virág (5), gábor (7).
```

Hajtsuk végre és dokumentáljuk ezen adatokkal az alaphalmaz részhalmazokkal történő lefedésére szolgáló, előadáson tanult közelítő algoritmust.

Megoldás. Egyesével választjuk a halmazokat, mindig olyan H halmazt választva, melyre H költségének és az általa lefedett, addig még fedetlen elemek számának hányadosa minimális.

Elsőként az `ida` halmazt kell választanunk, mert ebben a legkisebb az egy elemre eső költség $(\frac{1}{3})$. A következő halmaz az `andrás` kell legyen, ez a hátralévő 8 betűből 4-et fed le, 3 költséggel, ez $\frac{3}{4}$ költséget jelent betűnként, ami a legkisebb a hátralévő szavak közül. A következő két lépésben a `bori` és `vid` halmazokat kell választanunk tetszőleges sorrendben, ugyanis ezekre lesz minimális (nevezetesen 2) az egy elemre jutó költség. Végül a hátramaradó `g` betűhöz a legolcsóbb, `g`-t tartalmazó még ki nem választott szót kell vegyük, ez pedig az 5 költségű `virág`. A kapott fedés tehát: {`ida, andrás, bori, vid, virág`}, költsége 15.

6. Adjunk polinomiális algoritmust az $1|r_i|C_{max}$ ütemezési feladatra.

Megoldás. Tekintsük az elsőként rendelkezésre álló munkát. Ezt (is) el kell végezni előbb-utóbb, így ha nem kezdünk el rajta azonnal dolgozni, azzal nem nyerünk semmit (sőt), kezdjük tehát el. A másodikként rendelkezésre álló munkával is hasonló a helyzet, azzal a különbséggel, hogy ha az elsőn még dolgozik a gépünk, akkor csak annak befejezése után kezdhetünk hozzá. Általában a k. munkát akkor fogjuk elkezdeni, amikor már rendelkezésre áll és minden korábban beérkezett munkával végeztünk. Ily módon

$$\max\{r_k + \sum_{i=k}^{n} p_i \ | \ 1 \le k \le n\}$$

idő alatt végzünk, ahol $r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_n$ a rendelkezésre állási idők. Könnyen látható, hogy ez optimális, hiszen azon értékek, melyekre a maximumot tekintjük, mind alsó becslések C_{max}-ra. Az algoritmus polinomialitása pedig triviális.