Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok és megoldások
2004. november 24.

1. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás olyan alakú legyen, mint a primál feladat felírása.)

b) Határozzuk meg a (primál) feladat maximumát.

$$
\begin{aligned}
&\max\{8x_1 + 7x_2 + 8x_3\}\\
&\text{ha}\\
&3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1\\
&x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1\\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Megoldás. A feladat $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ alakú, ahol

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},
$$
$$
c = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 \end{pmatrix}.
$$

A duálist ezért érdemes a Rendszeroptimalizálás könyv (2004-es kiadásának) 23-24. oldalán leírt ekvivalens alakjában felírni. (Dolgozhatunk persze a duális eredeti, definíció szerinti alakjával is, ekkor azonban a feladat mátrixos felírásában szerepeltetni kell az $x \geq 0$ feltételnek megfelelő egyenlőtlenségeket is.) Eszerint a duális $\min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$, ami részletezve a következő:

$$
\begin{aligned}
&\min\{y_1 + y_2\}\\
&\text{ha}\\
&3y_1 + y_2 \geq 8\\
&2y_1 + y_2 \geq 7\\
&y_1 + 2y_2 \geq 8\\
&y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

A primál feladat maximuma helyett a dualitástétel értelmében megtehetjük, hogy a most meghatározott duális feladat minimumát számítjuk ki. Ez azért egyszerűbb, mert a duális (fenti alakja) két változós, ezért a megoldáshalmaz síkban ábrázolható és a minimum kiszámítható a Rendszeroptimalizálás könyv 13-14. oldalán bemutatott egyszerű módszerrel. A részletes számolást itt mellőzzük; a kapott eredmény szerint a duális minimumértéke 5 (ami az $y_1 = 2$, $y_2 = 3$ értékekre adódik). Ezért a primál feladat maximumértéke is 5.

2. Legyen adott egy A totálisan unimoduláris mátrix. A feladatunk az, hogy kiválasszuk a mátrix néhány (de legalább 1) oszlopát úgy, hogy a kiválasztott oszlopok által alkotott A' mátrix minden sorában az elemek összege 0 legyen. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan polinomiális idejű algoritmus, amely eldönti, hogy ilyen kiválasztás létezik-e!

Megoldás. Megmutatjuk, hogy a feladat megfogalmazható lineáris programozási feladatként. Mivel ismert, hogy ezek megoldására van polinom idejű algoritmus, ezzel a feladatot megoldjuk.

Első közelítésben egészértékű programozási problémaként fogalmazzuk meg a feladatot. Ha az A mátrix n oszlopú, akkor egy olyan n-dimenziós x oszlopvektort keresünk, amelynek minden komponense 0 vagy 1: az 1-es koordinátáknak megfelelő oszlopok alkotják majd a kiválasztott részhalmazt. A feladat feltétele úgy fogalmazható meg, hogy a kiválasztott oszlopok összege a nullvektor, vagyis az x vektorra $A \cdot x = 0$ teljesül. Könnyű garantálni, hogy x minden komponense 0 vagy 1 legyen: a $0 \leq x \leq (1, 1, \ldots, 1)^T$ feltétel éppen ezt mondja, ha x egészértékűségét is kikötjük. A most kapott rendszernek persze az $x = 0$ megoldása; a kérdés éppen az, hogy van-e ezen kívül más megoldás is. Ehhez egyszerűen válasszuk c célfüggvéynek a csupa 1 sorvektort; ekkor cx az x koordinátáinak összege, ami pontosan akkor lesz pozitív, ha x koordinátái között van nemnulla is. Ezzel tehát a

$$\max\{(1, \ldots, 1)x : Ax = 0, 0 \leq x \leq (1, \ldots, 1)^T, x \text{ egész}\}$$

egészértékű programozási feladathoz jutottunk; pontosan akkor létezik a feladat szövegének megfelelő kiválasztás, ha ennek a programnak a maximuma pozitív.

A fenti feladathoz tartozó együtthatómátrix

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \\ E \\ -E \end{pmatrix},$$

ami a tanult triviális lemma szerint (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.13. lemma) szintén totálisan unimoduláris, ha A az volt. Mivel az egyenlőtlenségek jobb oldalain is egészek állnak (mindenhol 0 vagy 1), ezért a fenti IP feladat helyett megoldhatjuk a megfelelő LP feladatot is, a tanult tétel szerint (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.12. tétel) a két optimum azonos. Így a feladatot valóban sikerült LP feladatként megfogalmazni.

3. Legyen $(E, \mathcal{F})$ egy matroid, melyben a bázisok p eleműek valamely $p \geq 1$ egészre, vagyis $r(E) = p$. A matroid *csonkolásának* hívjuk azt az $(E, \mathcal{F}')$ matroidot, melynek bázisai az eredeti matroid $p - 1$ elemű függetlenjei.

a) Bizonyítsuk be, hogy ez is matroid!

b) Adjunk példát olyan grafikus matroidra, aminek a csonkoltja is grafikus, és olyanra is, aminek a csonkoltja nem!

Megoldás. A feladat szövege szerint $\mathcal{F}'$ elemei az $\mathcal{F}$-be tartozó halmazok közül a legföljebb $p - 1$ eleműek. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{F}'$ kielégíti a függetlenségi axiómákat (Rendszeroptimalizálás könyv, 2.2. tétel). (F_1) nyilvánvalóan teljesül, mert $p \geq 1$ miatt az üres halmaz legföljebb $p - 1$ elemű $\mathcal{F}$-beli. (F_2) is nyilván igaz, hiszen egy legföljebb $p - 1$ elemű $\mathcal{F}$-beli halmaznak minden részhalmaza is nyilván ilyen tulajdonságú (mert $\mathcal{F}$-re teljesül az (F_2) axióma). (F_3) ellenőrzéséhez válasszunk $\mathcal{F}'$-ből egy X és egy Y halmazt, amelyekre $|X| > |Y|$. Mivel $\mathcal{F}$-re fennáll az (F_3) axióma, ezért van olyan $x \in X - Y$, melyre $Y + x \in \mathcal{F}$. Mivel $|X| > |Y|$ miatt $|Y| \leq p - 2$, ezért $Y + x \in \mathcal{F}'$ is igaz.

A b) feladat megoldásához tekintsük először az $U_{4,3}$ uniform matroidot. Ez persze grafikus (hiszen a négy hosszú kör körmatroidja). A csonkolás után ebből az $U_{4,2}$ uniform matroidot kapjuk, amiről ismert, hogy nem grafikus. Ha viszont az $U_{3,2}$ matroidot csonkoljuk, akkor az $U_{3,1}$-et kapjuk; ezek közül mindkettő grafikus, hiszen az első a háromszög, a második pedig a három párhuzamos élből álló gráf körmatroidja. (Persze mindkét esetben számtalan más jó példa is adható.)

4. Legyen M_x az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & x & 1 & x \end{pmatrix}$$

mátrixszal reprezentált matroid. Az x valós paraméter minden értékére határozzuk meg, hogy milyen matroid lesz az $M_x \vee M_x$ összeg!

Megoldás. Jelölje a mátrix négy oszlopát (sorrendben) m_1, m_2, m_3 és m_4.

Ha $x = 0$, akkor m_2 hurok (semmilyen független halmazban nincs benne). Az $\{m_1, m_3\}$ és az $\{m_4\}$ halmazok viszont függetlenek M_x-ben (mindkét rendszer lineárisan független). Így $M_x \vee M_x$-ben ezek uniója, $\{m_1, m_3, m_4\}$ is független, valamint persze ennek minden részhalmaza is. Ezzel az $x = 0$ esetben megadtuk az $M_x \vee M_x$-beli függetleneket; jól látható, hogy a 3 elemű szabad matroid és az 1 elemű triviális matroid direkt összegéről, $(U_{3,3} + U_{1,0})$-ról van szó.

Ha viszont $x \neq 0$, akkor az $\{m_1, m_4\}$ és az $\{m_2, m_3\}$ halmazok függetlenek M_x-ben. Így $M_x \vee M_x$-ben ezek uniója, $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ is független, valamint ennek minden részhalmaza. Ezért az $x \neq 0$ esetben az $M_x \vee M_x$ matroid az $U_{4,4}$ szabad matroid.

5. Tekintsük a RÉSZLETÖSSZEG probléma következő esetét. Legyenek az S halmaz elemei 15, 16, 18, 22, 24, és legyen a részletösszegként megcélzott t érték 44. Hajtsuk végre és dokumentáljuk az előadáson tanult $(1-\varepsilon)$-közelítő algoritmust az $\varepsilon = 0,5$ értékre.

Megoldás. A (bizonyos) részletösszegeket tartalmazó listák az összefésülések, ritkítások ($\delta = \varepsilon/n = 0.1$) és a t-nél nagyobb elemek kihagyása után a következőképpen alakulnak:

$$\begin{aligned}
&L_0 = \{0\}, \;\; L_0' = \{15\} \\
&L_1 = \{0, 15\}, \;\; L_1' = \{16, 31\} \\
&L_2 = \{0, 15, 31\}, \;\; L_2' = \{18, 33, (49)\} \\
&L_3 = \{0, 15, 18, 31\}, \;\; L_3' = \{22, 37, 40, (53)\} \\
&L_4 = \{0, 15, 18, 22, 31, 37\}, \;\; L_4' = \{24, 39, 42, (46), (55), (61)\} \\
&L_5 = \{0, 15, 18, 22, 31, 37, 42\}.
\end{aligned}$$

A kapott közelítő érték az L_5 halmaz legnagyobb eleme, vagyis 42.

6. Tekintsük a $\mathrm{P}2|prec, p_j = 1|C_{max}$ feladatnak azon speciális eseteit, amelyben a precedenciákat leíró gráf egy emeletekre bontásában minden emeleten páros számú csúcs van. Adjunk meg ezen speciális esetekre egy optimális ütemezési algoritmust, és bizonyítsuk is az optimalitást.(A Coffmann-Graham algoritmusra való hivatkozást mellőzzük.)

(A feladatot úgy kell érteni, hogy az említett emeletekre bontás az input része. Emellett értelemszerűen polinom idejű algoritmust kell megadni.)

Megoldás. Tekintsük a precedenciagráf egy olyan emeletekre bontását, melyben minden emeleten páros sok csúcs található (ilyen emeletekre bontás előállítása az algoritmusban nem volt elvárás). Először az első emelet munkáit tesszük fel a két gépre kettesével (vagyis mindkettőre egyet-egyet) Ez nyilván megtehető, hiszen az ezen az emeleten levő munkák nem függnek egyetlen más munkától sem. Mivel az emeleten páros sok csúcs van, ez a fázis az emelet pontjainak elfogyásával ér véget. Folytassuk az ütemezést most a második emelet munkáival hasonlóképp. Ez azért tehető meg, mert azon munkák, melyektől a második emelet munkái függhetnek, mind az első emeleten kell legyenek, tehát az adott időpontra valamennyien elkészültek ($p_j = 1$ minden j-re!). Ugyanígy látható be, hogy az eljárás folytatható a további emeletekre is. Az ütemezés során mindkét gép mindvégig dolgozik, így az ütemezés optimális kell legyen, hiszen párhuzamos gépekről van szó. Az ütemezés az emeletekre bontás ismeretében lineáris időben megadható.