Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok és megoldások
2003. november 14.

1. A Fourier-Motzkin elimináció segítségével döntsük el, hogy van-e megoldása az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszernek. Ha van megoldás, adjunk is meg egyet.

$$\begin{aligned}
&2x + y - z \geq 4\\
&x + 3y + z \leq 3\\
&x + y + 2z \geq 4\\
&x \geq 0\\
&y \geq 0\\
&z \geq 0
\end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenlőtlenségrendszer mátrixos alakja $Ax \leq b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az eliminációt a jegyzet (2003-as kiadásának) 9–10-edik oldalán írtak szerint végezzük:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -1/2 & 1/2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 5/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 3/5 & 2/5 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 0 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{r|r} 1 & 2/3 \\ 1 & 3 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)$$

A kapott alak első sora azt fejezi ki, hogy $z \leq \frac{2}{3}$, a harmadik sor szerint viszont $z \geq 1$. Ezért a rendszernek nincs megoldása.

2. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát.

b) Döntsük el, hogy a (primál) feladat megoldáshalmazán a célfüggvény felülről korlátos-e.

$$\begin{aligned}
&\max\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 + x_2 \leq 1\\
&x_2 + x_3 \leq 2\\
&x_3 + x_4 \leq 3\\
&x_4 + x_5 \leq 4
\end{aligned}$$

Megoldás. A feladat $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$
$$c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A duális feladat definíció szerint $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ alakú. Ezt részletezve a duális a következő:

$$\begin{aligned}
&\min\{y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4\} \\
&\text{ha} \\
&y_1 = 1 \\
&y_1 + y_2 = 1 \\
&y_2 + y_3 = 1 \\
&y_3 + y_4 = 1 \\
&y_4 = 1 \\
&y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Azonnal látható, hogy a duális nem megoldható (mert az első négy egyenletből $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, $y_4 = 0$, ami ellentmond az ötödik egyenletnek). Ebből pedig következik, hogy a primál feladat célfüggvénye a megoldáshalmazon nem felülről korlátos (mert ez a jegyzet 2003-as kiadásának 1.6-os tétele szerint azzal volna ekvivalens, hogy a duálisnak van megoldása).

3. Adjunk példát olyan nem grafikus matroidra, melynek minden minorja grafikus. (Állításunkat bizonyítsuk is be.)

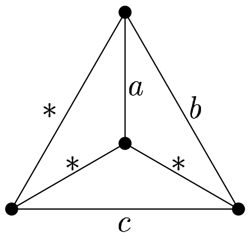
Megoldás. Az egyik lehetséges megoldás az $U_{4,2}$ uniform matroid. Erről ismert, hogy nem grafikus (de ez közvetlenül is könnyen ellenőrizhető). Ha egy elemet elhagyunk $U_{4,2}$-ből, akkor $U_{3,2}$-t, vagyis a háromszög körmatroidját kapjuk (ami persze így grafikus). Ha $U_{4,2}$-ben összehúzunk egy elemet, akkor $U_{3,1}$-et kapjuk, ami viszont a két csúcs között futó, három párhuzamos élből álló gráf körmatroidja, így szintén grafikus. Ezzel beláttuk, hogy $U_{4,2}$ minden minorja grafikus, hiszen további elemek elhagyásával, vagy összehúzásával a matroid grafikus marad.

Megjegyezzük, hogy a jegyzet 2.42-es tételéből közvetlenül is látszik, hogy $U_{4,2}$ minden minorja grafikus, hiszen nem tartalmazhatja minorként az ott felsorolt matroidokat (mert túl kevés eleme van).

Az ugyanebben a tételben szereplő $M = [M(K_5)]^*$ matroid is jó megoldás a feladatra. Ismert, hogy ez sem grafikus. Ha most X az alaphalmaz tetszőleges részhalmaza, akkor (a jegyzet 2.21-es tételét alkalmazva) az $M \setminus X = (M(K_5)/X)^*$, illetve az $M/X = (M(K_5) \setminus X)^*$ összefüggést kapjuk. Így elég belátni, hogy $M(K_5)$ minden minorának a duálisa grafikus. Azonban K_5 minden minora már síkbarajzolható, így a (síkbarajzolásából nyerhető) duális gráfjához tartozó grafikus matroid bizonyítja az állítást. Ugyanez elmondható az $[M(K_{3,3})]^*$ matroidról is, így az is jó megoldás a feladatra.

4. Egy egyiptomi piramisban találtak egy sajnos megrongálódott papiruszdarabot, amelyen ez állt:

Körülbelül 4500 év múlva fel fogják fedezni a matroi$*$okat és például az alábbi gráf körmatroidját az alábbi mátrix fogja reprezentálni a valós test felett.

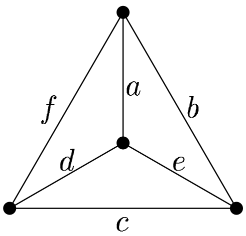


$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pótoljuk az olvashatatlan részeket (amelyeket $*$-gal jelöltünk).

Megoldás. Az első $*$ helyén „p” állt (az írnok hibázott).

A mátrixban az $\{a, b, e\}$, illetve a $\{b, c, f\}$ oszlophalmazok lineárisan összefüggőek, így a gráf megfelelő éleinek kört kell alkotniuk. Ezért az e és az f élek helye egyértelmű. Ebből a gráf élei rekonstruálhatók (hiszen d helyére már csak egy lehetőség marad):



Ahhoz, hogy a kapott gráf mátrixreprezentációja helyes legyen, a $\{d, a, f\}$ és a $\{d, e, c\}$ oszlophalmazoknak lineárisan összefüggőknek kell lenni (mert a megfelelő élhalmazok kört alkotnak). Előbbiből következik, hogy a mátrix d oszlopának alsó eleme 15, utóbbiból következik, hogy a d oszlop felső eleme 10.

5. Tekintsük az {`a,b,c,e,é,g,i,k,m,r,s,v`} betűhalmazt, és az elemeiből képzett alábbi szavakat, mint részhalmazokat (a szavak utáni zárójelben lévő szám jelenti az adott halmaz költségét):

```
béka (2),  maki (3),   egér (4),   réce (4),    maci (4),
bika (4),  csiga (5),  veréb (5),  gébics (6),  vércse (6).
```

Hajtsuk végre ezen adatokkal az alaphalmaz részhalmazokkal történő lefedésére szolgáló közelítő algoritmust.

Megoldás. Egyesével választjuk a halmazokat, mindig olyan H halmazt választva, melyre H költségének és az általa lefedett, addig még fedetlen elemek számának hányadosa minimális.

Elsőként a `béka` halmazt kell választanunk, mert ebben a legkisebb az egy elemre eső költség ($\frac{1}{2}$). A következő halmaz a `vércse` kell legyen, ez a hátralévő 8 betűből 5-öt fed le, 6 költséggel, ez $\frac{6}{5}$ költséget jelent betűnként, ami a legkisebb a hátralévő szavak közül. Ekkor a `g,i,m` betűk vannak még hátra. A `maki` halmaz ezek közül kettőt is fed (hármat semelyik halmaz sem), 3 költséggel, így nyilván ezt kell bevenni a harmadik lépésben, végül a hátramaradó `g` betűhöz a legolcsóbb, `g`-t tartalmazó még ki nem választott szót kell vegyük, ez pedig a 4 költségű `egér`. A kapott fedés tehát: {`béka, maki, egér, vércse`}, költsége 15.

6. Igazoljuk, hogy a munkák p_j/w_j értékek szerint nemcsökkenő sorrendben történő ütemezése optimális megoldás az $1||\sum w_jC_j$ feladatra.

Megoldás. Tekintsünk egy optimális ütemezést, legyen ez $J_1, J_2, \dots, J_n$. Belátjuk, hogy nem fordulhat elő, hogy valamely i indexre $p_i/w_i > p_{i+1}/w_{i+1}$ teljesüljön, amiből már következik, hogy a munkák p_j/w_j szerint nem csökkenő sorrendben vannak, ellenkező esetben ugyanis valamely i. munka után egy nála kisebb (p_j/w_j) költségű kéne hogy következzen.

Tegyük fel indirekten, hogy létezik olyan i index, melyre $p_i/w_i > p_{i+1}/w_{i+1}$. Cseréljük fel az i. és az $(i+1)$. munkát! Legyenek a csere utáni befejezési idők $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$. Ekkor $C'_1 = C_1,\ C'_2 = C_2,\ \dots, C'_{i-1} = C_{i-1}$ és $C'_{i+1} = C_{i+1},\ C'_{i+2} = C_{i+2},\ \dots, C'_n = C_n$, továbbá $C'_i = C_i + p_{i+1} - p_i$.

Jelöljük az új sorrend szerinti j. munka súlyát w'_j-vel. Ekkor $w'_1 = w_1,\ w'_2 = w_2,\ \dots, w'_{i-1} = w_{i-1}$ és $w'_{i+2} = w_{i+2},\ w'_{i+3} = w_{i+3},\ \dots, w'_n = w_n$, továbbá $w'_i = w_{i+1}$ és $w'_{i+1} = w_i$.

Így

$$\sum_{j=1}^{n} w'_jC'_j = \sum_{j=1}^{i-1} w'_jC'_j + w'_iC'_i + w'_{i+1}C'_{i+1} + \sum_{j=i+2}^{n} w'_jC'_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{i-1} w_jC_j + w_{i+1}(C_i + p_{i+1} - p_i) + w_iC_{i+1} + \sum_{j=i+2}^{n} w_jC_j.$$

Mivel $C_{i+1} = C_i + p_{i+1}$, az utolsó sor

$$\sum_{j=1}^{i-1} w_jC_j + w_{i+1}(C_{i+1} - p_i) + w_i(C_i + p_{i+1}) + \sum_{j=i+2}^{n} w_jC_j$$

alakba írható, ami éppen

$$\sum_{j=1}^{n} w_jC_j - w_{i+1}p_i + w_ip_{i+1},$$

ami kisebb, mint $\sum_{j=1}^{n} w_jC_j$, hiszen

$$w_{i+1}p_i > w_ip_{i+1}$$

teljesül, $p_i/w_i > p_{i+1}/w_{i+1}$ miatt. Az eredeti ütemezés tehát nem volt optimális, ami ellentmondás, ezzel a bizonyítást befejeztük.