Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok és megoldások
2002. november 11.

1. Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát, majd határozzuk meg az eredeti, illetve a duális feladat optimumértékét!

$$
\begin{aligned}
&\max\{5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 - x_4 \le 1\\
&x_1 + x_2 \le 1\\
&x_2 + x_3 - x_4 \le 1\\
&x_3 \ge 1\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

Megoldás. Mivel a feladatban ki van kötve a változók nemnegatív értékűsége, ezért érdemes azt $\max\{cx : Ax \le b, x \ge 0\}$ alakúnak tekinteni és a duálist a $\min\{yb : yA \ge c, y \ge 0\}$ alakban felírni (lásd a Rendszeroptimalizálás jegyzet 15. oldalát). Ekkor tehát

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

és $c = (5, 2, 1, -5)$. Így tehát a duális feladat:

$$
\begin{aligned}
&\min\{y_1 + y_2 + y_3 - y_4\}\\
&\text{ha}\\
&y_1 + y_2 \ge 5\\
&y_2 + y_3 \ge 2\\
&y_3 - y_4 \ge 1\\
&y_1 + y_3 \le 5\\
&y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

A kapott első és harmadik egyenlőtlenséget összeadva: $y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \ge 6$, így a duális minimuma legalább 6. Másrészt könnyű olyan megoldást találni a duális feladathoz (például: $y_1 = 1, y_2 = 4, y_3 = 1, y_4 = 0$), amikor a célfüggvény értéke éppen 6, ezért a duális feladat minimuma 6. A dualitástételből tudjuk, hogy ekkor a primál feladat maximuma is 6.

2. Tegyük fel, hogy az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszernek van olyan megoldása, amelyben minden változó nemnegatív értékű. Bizonyítsuk be, hogy ekkor van olyan megoldása is, amelyben minden változó nemnegatív, és a pozitív értékű változók száma legföljebb $r(A)$ (ahol r a mátrix rangját jelöli)!

Megoldás. A feladat szerint az $Ax = b, x \ge 0$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Caratheodory tételéből tudjuk, hogy ekkor viszont van (erős) bázismegoldása is; be fogjuk látni, hogy egy ilyenben a pozitív értékű változók száma legföljebb $r(A)$.

(Megjegyezzük, hogy ebben az esetben bázis és erős bázis között nincs különbség, mert a rendszert leíró mátrix oszlopai lineárisan függetlenek.)

Az $Ax = b, x \geq 0$ rendszert $Ax \leq b$, $(-A)x \leq -b$, $(-E)x \leq 0$ alakban írhatjuk szokásos egyenlőtlenségrendszer alakba, ahol E az $n \times n$–es egységmátrixot jelöli (n pedig A oszlopainak száma). Tekintsünk egy x bázismegoldást; ebben tehát az egyenlőséggel teljesített sorok rangja meg kell egyezzen a rendszert leíró $A^* = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -E \end{pmatrix}$ mátrix rangjával, vagyis n–nel. Nyilván egyenlőséggel teljesülnek az $Ax \leq b$, $(-A)x \leq -b$–nek megfelelő sorok (hiszen ezzel éppen $Ax = b$–t fogalmaztuk át), továbbá $(-E)x \leq 0$–ból az x 0 komponenseinek megfelelő sorok; alkossák ezek a sorok az A^{**} mátrixot. Az $r(A^{**}) = r(A^*) = n$ feltétel azt jelenti, hogy A^{**} oszlopai lineárisan függetlenek.

Így tehát az x nemnulla komponenseinek megfelelő A^{**}–beli oszlopok is lineárisan függetlenek. Ezeknek az oszlopoknak az eredetileg $-E$–hez tartozó része csupa 0–t tartalmaz. Ezért az ő lineáris függetlenségük azt jelenti, hogy az x nemnulla komponenseinek megfelelő A–beli oszlopok is lineárisan függetlenek, ezért a számuk legföljebb $r(A)$. Így tehát az x nemnulla komponenseinek száma legföljebb $r(A)$ és éppen ezt akartuk belátni.

3. Bizonyítsuk be, hogy az n pontú összefüggő G gráf pontosan n élű összefüggő részgráfjai (ezek élhalmazai) egy matroid bázisait alkotják! Példán mutassuk meg, hogy ez nem minden G gráf esetén lesz grafikus matroid! (A feladatban részgráf alatt csak feszítő, vagyis a G minden pontját tartalmazó részgráfot értünk.)

Megoldás. Jelölje G körmatroidját $M(G)$ és jelölje M_2 azt az uniform matroidot, amelynek alaphalmaza $E(G)$ és a legföljebb 1 elemű részhalmazok függetlenek. Tekintsük az $M(G) \vee M_2$ összegmatroidot: ebben $E(G)$ egy részhalmaza pontosan akkor független, ha előáll egy körmentes élhalmazból legföljebb egy további él hozzávételével. Ezért $M(G) \vee M_2$ bázisai azok az élhalmazok, amelyek egy feszítőfából egyetlen új él hozzávételével keletkeznek. Ezek azonban éppen a pontosan n élű, összefüggő részgráfok élhalmazai. Így tehát a feladatban leírt élhalmazok pont az $M(G) \vee M_2$ matroid bázisai.

(Alternatív megoldásként nem nehéz ellenőrizni, hogy teljesülnek a „bázisaxiómák”, vagyis a Rendszeroptimalizálás jegyzet 2.5. Tételének feltételei.)

Végül legyen G az a gráf, amely 2 pontból és a köztük futó 4 párhuzamos élből áll. Ekkor a feladatbeli matroid bázisai $E(G)$ 2 elemű részhalmazai. Így a feladat az $U_{4,2}$ uniform matroidot definiálja, amely nem reguláris.

4. A k paraméter különböző (valós) értékei mellett milyen matroidokat reprezentál az alábbi mátrix (a valós test felett)? Minden ilyen matroidnak adjuk meg a duálisát is és döntsük el, hogy reguláris–e!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & k \end{pmatrix}$$

Megoldás. Mivel a mátrix oszlopai $\mathbb{R}^2$–beliek, ezért 2–nél több elemű független halmaz nincs a matroidban. Az első három oszlop közül semelyik kettő sem párhuzamos. Ha az utolsó oszlop sem párhuzamos az első három közül semelyikkel, akkor a mátrix az $U_{4,2}$ uniform matroidot koordinátázza (hiszen ilyenkor éppen a legföljebb két elemű halmazok függetlenek). Ez könnyen láthatóan a $k \neq 4, 1, 6$ esetekben következik be. Ilyenkor a matroid nem reguláris és a duálisa is az $U_{4,2}$ matroid.

A $k = 4, 1, 6$ esetekben pedig a független halmazok a legföljebb 1 elemű halmazok, valamint egy kivételével a 2 eleműek. Ez a matroid könnyen elképzelhető például annak a gráfnak a körmatroidjaként, amelyet egy háromszögből az egyik él megduplázásával nyerünk. Ez a matroid tehát grafikus, így reguláris. Mivel a gráf síkbarajzolható, ezért a matroid duálisát könnyen megkaphatjuk a gráf duálisának körmatroidjaként: kiderül, hogy ez a matroid is izomorf a duálisával.

5. Adott egy $G = (V, E)$ irányított gráf és ennek egy maximális élszámú, aciklikus (irányított kör mentes) részgráfját szeretnénk megtalálni. Adjunk erre a feladatra (polinom idejű) $\frac{1}{2}$–közelítő algoritmust!

Megoldás. Számozzuk meg a gráf csúcsait 1–től n–ig tetszőlegesen. Az élhalmazt két diszjunkt részre bontjuk: az egyik részbe tartoznak azok az élek, amelyek kisebb számú csúcsból nagyobb számúba mutatnak, a másik részbe pedig azok, amelyek nagyobból mutatnak kisebbe. Nyilván mindkét élhalmaz aciklikus (hiszen a számozás szerinti növekvő, illetve csökkenő sorrend egy–egy topologikus rendezést ad a két részgráfban).

Válasszuk a két élhalmaz közül azt, amelyiknek több éle van. Ezzel nyilván legalább fele annyi élt kiválasztottunk, mint ahány éle a gráfnak van. Magától értetődő, hogy a feladat optimumértéke legföljebb a gráf élszáma, így ezzel $\frac{1}{2}$–közelítő algoritmust mutattunk (amely triviálisan megvalósítható az élszámban lineáris időben).

6. Adjunk (polinom idejű) optimális algoritmust a $P||C_{\max}$ ütemezési feladatnak arra a speciális esetére, amikor a munkák száma legföljebb a gépek számának kétszerese és minden gép összesen legföljebb két munkát végezhet el.

Megoldás. Jelölje a gépek számát m. Feltehető, hogy a munkák száma pontosan $2m$, mert ha kevesebb volna, akkor kellő számú 0 megmunkálási idejű munkát hozzáveszünk a feladathoz, amivel az optimális megoldást nyilván nem befolyásoljuk.

Számozzuk a $J_1, \ldots, J_{2m}$ munkákat a megmunkálási idő szerinti nemcsökkenő (SPT) sorrend szerint, azaz $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_{2m}$. Mivel minden gép 2 munkát végez el, ezért az ütemezés nem más, mint a munkák egy alkalmas párbaállítása. Azt állítjuk, hogy optimális ütemezést kapunk, ha J_1–et a J_{2m}–mel, J_2–t a J_{2m-1}–gyel, stb., minden $1 \leq i \leq m$ esetén J_i–t J_{2m+1-i}–vel állítjuk párba (vagyis ezeket a párokat végzi el ugyanaz a gép). Jelölje ezt az ütemezést S_0.

Vegyünk egy tetszőleges S ütemezést és legyen $1 \leq i \leq m$ a legkisebb olyan index, amelyre J_i *nem* J_{2m+1-i}–vel áll párban. Legyen ekkor J_i párja J_k és J_{2m+1-i} párja J_l. Változtassuk meg ezt az ütemezést annyiban, hogy J_i párja J_{2m+1-i} és J_k párja J_l legyen (de az összes többi pár maradjon érintetlen); jelölje az így kapott ütemezést S'. Az i választása miatt $p_i \leq p_l, p_k \leq p_{2m+1-i}$, így $p_i + p_{2m+1-i} \leq p_l + p_{2m+1-i}$, valamint $p_k + p_l \leq p_l + p_{2m+1-i}$. Ez tehát azt jelenti, hogy $C_{\max}^{S'} \leq C_{\max}^{S}$, vagyis a célfüggvény értéke nem nőtt.

Ilyen változtatások (legföljebb m–szeri) alkalmazásával elérhetjük, hogy egy tetszőleges S ütemezésből megkapjuk az S_0 ütemezést, miközben a célfüggvény értéke végig nem nőtt. Ez éppen azt jelenti, hogy S_0 optimális.

Az S_0 ütemezés nyilván megvalósítható polinomiális ($O(m \log m)$ idejű) algoritmussal. Megjegyezzük, hogy a fenti megoldást fogalmazhattuk volna úgy is, hogy LPT sorrend szerinti listás ütemezést alkalmazunk; könnyen látható, hogy ez ugyanehhez az ütemezéshez vezetett volna.