

1. Mutassuk meg a Farkas-lemma segítségével, hogy az alábbi lineáris egyenletrendszernek nincs olyan megoldása, amelyben mind az öt változó értéke nemnegatív. (Vagyis adjunk meg egy olyan vektort, amely a Farkas-lemma értelmében bizonyítja a rendszer nemnegatív számokkal való megoldhatatlanságát.) (ZH, 2014. április 30.)

$$\begin{aligned}7x_1 + 2x_3 - 21x_4 &= 6 \\7x_2 + x_3 - 14x_5 &= 1 \\3x_1 - 5x_2 - 9x_4 + 10x_5 &= 2\end{aligned}$$

2. Van-e az alábbi lineáris egyenletrendszernek olyan megoldása, amiben az  $x_1$ ,  $x_2$  és  $x_3$  változók értéke nemnegatív? (Az  $x_4$  változó értéke tehát tetszőleges valós szám lehet, csak az első három változó nemnegativitása van kikötve.) (ZH, 2022. május 4.)

$$\begin{aligned}4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 &= 1 \\3x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 &= 1\end{aligned}$$

3. Legyen  $A$  egy  $m \times n$ -es mátrix, az oszlopait jelölje  $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n$ , a sorait pedig  $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_m$ . Tegyük fel, hogy az  $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0$  nemnegatív együtthatók bármilyen választása esetén az  $\alpha_1 \underline{c}_1 + \alpha_2 \underline{c}_2 + \dots + \alpha_n \underline{c}_n$  vektor tartalmaz 1-től különböző elemet. Mutassuk meg, hogy ekkor léteznek olyan (valós)  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  együtthatók, hogy a  $\beta_1 \underline{r}_1 + \beta_2 \underline{r}_2 + \dots + \beta_m \underline{r}_m$  sorvektor minden eleme nemnegatív és  $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m < 0$ .

---

4. A  $p$  valós paraméter mely értékeire van az alábbi lineáris egyenletrendszernek olyan megoldása, amelyben mind az öt változó értéke nemnegatív? A  $p$ -nek azokra az értékeire, amelyekre ilyen megoldás nem létezik, adjunk meg egy olyan vektort, amely ezt a tényt a Farkas-lemma értelmében bizonyítja.

$$\begin{aligned}5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 12x_4 - 10x_5 &= 7 \\11x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 21x_4 - 22x_5 &= 10 \\x_1 + x_3 - 2x_5 &= p\end{aligned}$$

5. Legyen  $A$   $m \times n$ -es mátrix,  $b \in \mathbb{R}^m$  oszlopvektor. Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszerek közül pontosan az egyik megoldható:

(1)  $Ax \leq b, x \geq 0$

(2)  $yA \geq 0, y \geq 0, yb < 0$

(ZH, 2009. december 15.)

6. Tegyük fel, hogy a  $G$  egyszerű gráf minden csúcsához hozzá van rendelve egy  $f(v)$  valós súly. Minden  $v$  csúcs esetén jelölje  $N_f(v)$  a  $v$  csúcs összes  $u$  szomszédján lévő  $f(u)$  súlyok összegét; képletben:

$$N_f(v) = \sum_{\{v,u\} \in E(G)} f(u).$$

Alíz és Bob gráfőrültek. Valahányszor Alíz meglát egy gráfot, ellenállhatatlan késztetést érez, hogy annak minden  $v$  csúcsához úgy rendeljen egy  $f(v)$  súlyt, hogy  $f(v) \geq 0$  és  $N_f(v) = 1$  teljesüljön minden  $v$  csúcsra. Ha viszont Bob kerül gráfközelségbe, úgy akar annak minden  $v$  csúcsához egy  $f(v)$  súlyt rendelni, hogy  $N_f(v) \geq 0$  teljesüljön minden  $v$  csúcsra, miközben  $\sum_{v \in V(G)} f(v) < 0$ . Mutassuk meg, hogy minden  $G$  egyszerű gráf esetén Alíz és Bob közül pontosan az egyik járhat sikerrel.