Rendszeroptimalizálás

Negyedik szerdai előadás, 2024. március 6.

1. Formalizáljuk az alábbi lineáris programozási feladatokat az általános $\max\{cx : Ax \le b\}$ alakban. (Azaz: adjuk meg az A mátrixot, a b oszlopvektort és a c sorvektort úgy, hogy a $\max\{cx : Ax \le b\}$ alak megfeleljen az alábbi feladatoknak.)

a) $\max\{x_1 + 2x_2 + 3x_3\}$
ha
$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 10$
$7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 11$
$x_3 \ge 0$

b) $\min\{x_1 + 2x_2 + 3x_3\}$
ha
$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 10$
$7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 11$
$x_3 \ge 0$

2. Használjuk a Farkas-lemmát annak bizonyítására, hogy az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszer nem megoldható.

$$\begin{aligned}
&7x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 2\\
&2x_1 + 5x_2 - 6x_4 \ge -3\\
&3x_1 + x_3 \ge 4\\
&2x_1 - 3x_4 \le 3
\end{aligned}$$

3. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak. (u és v oszlopvektorokat, a és b sorvektorokat jelöl, a 0 a nullvektort (is) jelöli, mindezeknek a dimenziója azonos.)

a) Ha $u \le v$ és $u \ne v$, akkor $u < v$.
b) Ha $u + v \ge u$, akkor $v \ge 0$.
c) Ha $u \ge 0$ és $a \cdot u > 0$, akkor $a \ge 0$.
d) Ha $0 \le a \le b$ és $0 \le u \le v$, akkor $a \cdot u \le b \cdot v$.

4. Tegyük fel, hogy az $Ax \le b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható és cx felülről korlátos a megoldáshalmazán. Legyen $M = \max\{cx : Ax \le b\}$. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások.

a) Ha $b \ge 0$, akkor $M \ge 0$.
b) Ha $b > 0$, akkor $M > 0$.

---

5. Írjuk fel az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszert $Ax \le b$ alakban, majd alkalmazzuk a Farkas-lemmát annak a bizonyítására, hogy a rendszer nem megoldható. (Vagyis adjunk meg egy vektort és mutassuk meg róla, hogy ez a Farkas-lemma értelmében bizonyítja az $Ax \le b$ rendszer megoldhatatlanságát.) (ZH, 2023. június 1.)

$$\begin{aligned}
&7x_1 - x_2 \le 3\\
&3x_1 - x_3 + 2x_4 \ge 1\\
&x_2 - 2x_3 + 7x_4 \le -2\\
&x_2 - 3x_3 = 1
\end{aligned}$$

6. Tegyük fel, hogy az A mátrix minden eleme nemnegatív, továbbá A minden sora tartalmaz legalább egy pozitív elemet. Bizonyítsuk be, hogy az $Ax \le b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható.

7. Tegyük fel, hogy az $Ax \le b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható; továbbá bárhogyan választjuk ki a b vektor egyetlen elemét és módosítjuk azt egy tetszőleges új értékre, az így kapott b' vektorra is az $Ax \le b'$ rendszer mindig megoldható. Mutassuk meg, hogy ekkor minden (megfelelő dimenziós) d vektorra az $Ax \le d$ rendszer megoldható.

8*. Tegyük fel, hogy az $A_1x \le b_1$ és $A_2x \le b_2$ (n változós) lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldhatók, de nincsen közös megoldásuk. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $cx \le \delta$ lineáris egyenlőtlenség (nem feltétlen olyan, ami akár az $A_1x \le b_1$, akár az $A_2x \le b_2$ rendszer része volna), amelyet az $A_1x \le b_1$ rendszer minden megoldása kielégít és az $A_2x \le b_2$ minden megoldása megsért.