Nagyhatékonyságú logikai programozás

Jegyzetek a BME informatikus hallgatói számára

- A CLP (Constraint Logic Programming) áttekintése
- A SICStus `clpq/r` könyvtárai
- A SICStus `clpb` könyvtára
- A SICStus `clpfd` könyvtára
- A Mercury programozási nyelv

Szeredi Péter
IQSOFT Rt.
szeredi@iqsoft.hu

Budapest 1998


```
Constraint Logic Programming (CLP)
----------------------------------

A hagyományos logikai programozás általánosítása:

hívás (szabályban)     ---> hívás vagy constraint
egyesítés              ---> constraint solving
válasz-behelyettesítés ---> válasz-constraint


A CLP nyelv elemei
------------------
Egy CLP nyelvhez kell:

- egy D tartomány (domain),
        pl egészek (N), valósak (R), racionálisak(Q),
           Boole értékek (B),
           listák, füzérek (stringek),
           Prolog-fastruktúrák (Herbrand --- H)

- D-ben definiált függvényeknek egy F halmaza,
        pl +, -, *, \/, /\

- D-ben definiált relációknak (constraint-eknek)
        egy R halmaza   pl =, \=, <, eleme

- egy constraint-megoldó algoritmus <D,F,R>-re, azaz a
        D tartományban az R+F -beli jelekből felépített
        constraint-ekre
```



```
Példák CLP nyelvekre
--------------------

CLP(FD)
        < {0, 1,..., n}, {+,-,*,/,mod}, {=,=<,eleme,...} >
        Constraint satisfaction technikák:
        konzisztencia-módszerek, constraint-propagálás, stb.

CLP(B)
        < {0,1}, {/\, \/, not, xor}, {=}>
        Ítéletkalkulusbeli tételbizonyítási módszerek

CLP(Q)
        < Q (racionálisok), {+, -, *, /}, {=, =<, \=, ...} >
        Lineáris programozási módszerek:
        Gauss elimináció, szimplex módszer

CLP(R)
        ugyanez, Q helyett R-rel
```



```
CLP szintaxis és deklaratív szemantika
--------------------------------------

Szintaxis:


program:        klózok halmaza.

klóz:
                P :- G1, ..., Gn

                ahol mindegy Gi vagy cél, vagy constraint.

deklaratív olvasata:

                P igaz, ha G1, ..., Gn mind igaz.

kérdés:
                ?- G1, ..., Gn

válasz egy Q kérdésre:

       constraint-eknek egy olyan konjunkciója,
       amelyből a kérdés következik.
```

CLP procedurális szemantika

Egy 'P :- G1, ..., Gn' klóz procedurális olvasata:

P megoldásához megoldandó G1, ..., Gn.

Végrehajtási állapot: < G, s >

G --- cél/constraint sorozat
s --- constraint-tár: az eddig felhalmozott constraint-ek konjunkciója

Egy végrehajtási alaplépés:

- kiválasztandó egy részcél, P (determinisztikus)
- kiválasztandó egy klóz (nemdeterminisztikus) P' :- G1, ..., Gn
- ellenőrzendő, hogy P = P' konzisztens a constraint-tárral

Végrehajtás vége: üres célsorozat

A végrehajtás eredménye:

- a constraint-tár, vagy annak a kérdésbeli változókra való 'vetítése'.

Általános következtetési lépések

Rezolució:

```
< P & G, s >  ===>
< P = P' & G1 & ... & Gn & G, s >

ha a programban van egy
P' :- G1, ..., Gn klóz
```

constraint-megoldás:

```
< c & G, s > ===>
< G, s /\ c >

ha c konzisztens s-sel
```

constraint-erősítés:

```
< C & G, s > ===>
< C' & G, s /\ c >

ha c konzisztens s-sel és
ha s-ből következik, hogy
C ekvivalens (C' /\ c) -vel.

(C' = C is lehet.)
```


Egy CLP nyelv megvalósítása

Ehhez szükséges definiálni a következőket

- egyszerű constraintek, amelyekből a constraint-tár épül fel
- constraint-termek, azok a kifejezések amelyek constraint-ekben előfordulhatnak
- (általános) constraint-ek és feldolgozásuk
    - egyszerű constraint-ek --- constraint-megoldás
    - nem-egyszerű constraint-ek --- constraint-erősítés (korutinok)
- a szükséges algoritmusok:

    constraint-megoldás, constraint-ellenőrzés, constraint-erősítés, constraint-tár vetítése

CLP megoldó algoritmusok

Alapművelet: egy constraint hozzáadása a constraint-tárhoz, azaz

```
s' = s /\ c
```

felépítése, beleértve s/\c konzisztenciájának ellenőrzését.

Követelmények az algoritmussal szemben:

- inkrementalisság (s konzisztenciáját ne bizonyítsa újra)
- a visszalépés támogatása
- hatékonyság
- teljesség

A SICStus clp(Q,R) kiterjesztései

A `clpq`/`clpr` könyvtárak

- Tartomány:
  - `clpr`: lebegőpontos számok
  - `clpq`: racionális számok
- Függvények:

  `+ - * / min max pow exp` (kétargumentumúak),
  `+ - abs sin cos tan` (egyargumentumúak).
- Constraint-relációk:

  `= =:= <, >, =<, >=, \=`
- Primitív constraint-ek (constraint tár elemei):

  lineáris kifejezéseket tartalmazó relációk
- Constraint-megoldó algoritmus:

  lineáris programozási módszerek: Gauss elimináció, szimplex módszer

A könyvtár betöltése:

- `use_module(library(clpq))`, vagy
- `use_module(library(clpr))`

A fő beépített eljárás

- `{` *Constraint* `}` , ahol *Constraint* változókból és (egész vagy lebegőpontos) számokból a fenti müveletekkel felépített reláció, vagy ilyen relációknak a (`,` operátorral képzett) konjunkciója.

Egyszerű példák

```
SICStus 3  #3:  Fri Oct 18 19:14:50 MET DST 1996
| ?- use_module(library(clpq)).
{loading .../library/clpq.ql...}
...
{loaded .../library/clpq.ql in module linear, 750 msec 670816 bytes}
| ?- {X=Y+4, Y=Z-1, Z=2*X-9}.         % lineáris egyenlet
X = 6, Y = 2, Z = 3 ?

| ?- {X+Y+9<4*Z, 2*X=Y+2, 2*X+4*Z=36}.% egyenlőtlenség is lehet
{X=1+1/2*Y},  {Z=17/2-1/4*Y},  {Y<48/5} ?

| ?- {(Y+X)*(X+Y)/X = Y*Y/X+100}.     % lineárissá egyszerüsíthető
{X=100-2*Y} ?

| ?- {(Y+X)*(X+Y) = Y*Y+100*X}.       % így már nem...
nonlin:{2*(X*Y)-100*X+X^2=0} ?

| ?- {exp(X+Y+1,2) = 3*X*X+Y*Y}.     % nem lineáris...
nonlin:{1+2*X+2*(Y*X)-2*X^2+2*Y=0} ?

| ?- {exp(X+Y+1,2) = 3*X*X+Y*Y}, X=Y. % így már igen...
X = -1/4, Y = -1/4 ?

| ?- {A-B+C=10, C=5+5}.               % egyenlőség is levezethető
B = A, C = 10 ?

| ?- 2 = pow(8, X).                   % nem-lineárisak is megoldhatók
X = 1/3 ?
```


Egy összetettebb példa: hiteltörlesztés

```
| ?- [user].
% Hiteltörlesztés számítása:  P összegű hitelt
% Time hónapon át évi IntRate kamat mellett havi MP
% részletekben törlesztve Bal a maradványösszeg.
| mortgage(P, Time, IntRate, Bal, MP):-
     {Time > 0, Time =< 1,
     Bal = P*(1+Time*IntRate/1200)-Time*MP}.
| mortgage(P, Time, IntRate, Bal, MP):-
     {Time > 1},
     mortgage(P*(1+IntRate/1200)-MP, Time-1, IntRate, Bal, MP).
| {user consulted, 20 msec 160 bytes}

| ?- mortgage(100000,180,12,0,MP).    % 100000 Ft hitelt 180
                                      % hónap alatt törleszt 12%-os
                                      % kamatra, mi a havi részlet?
MP = 1200.1681 ?

| ?- mortgage(P,180,12,0,1200).       % ugyanez visszafelé

P = 99985.9968 ?

| ?- mortgage(100000,Time,12,0,1300). % 1300 Ft a törlesztőrészlet
                                      % mi a törlesztési idő?
Time = 147.3645 ?

| ?- mortgage(P,180,12,Bal,MP).

{MP=0.0120*P-0.0020*Bal} ?

| ?- mortgage(P,180,12,Bal,MP), ordering([P,Bal,MP]).

{P=0.1668*Bal+83.3217*MP} ?
```


További könyvtári eljárások

`entailed(Constraint)` — `Constraint` levezethető a jelenlegi tárból.

`inf(Kif, Inf)` ill. `sup(Kif, Sup)` — kiszámolja `Kif` infimumát ill. szuprémumát, és egyesíti `Inf`-fel ill. `Sup`-pal. Példa:

```
| ?- { 2*X+Y =< 16, X+2*Y =< 11, X+3*Y =< 15, Z = 30*X+50*Y
     }, sup(Z, Sup).

Sup = 310, {Z=30*X+50*Y}, {X+1/2*Y=<8}, {X+3*Y=<15}, {X+2*Y=<11}
```

`minimize(Kif)` ill. `maximize(Kif)` — kiszámolja `Kif` infimumát ill. szuprémumát, és egyenlővé teszi `Kif`-fel. Példa:

```
| ?- { 2*X+Y =< 16, X+2*Y =< 11, X+3*Y =< 15, Z = 30*X+50*Y
     }, maximize(Z).

X = 7, Y = 2, Z = 310
```

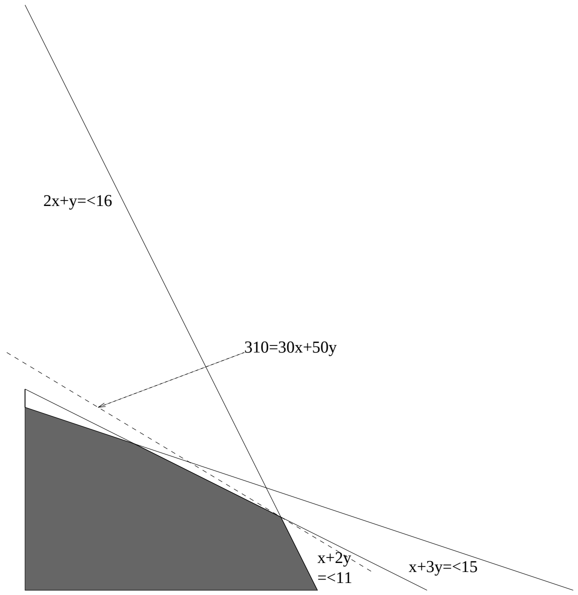
`bb_inf(Egészek, Kif, Inf)` — kiszámolja `Kif` infimumát, azzal a további feltétellel, hogy az `Egészek` listában levő minden változó egész (ún. "Mixed Integer Optimisation Problem").

```
| ?- {X >= 0.5, Y >= 0.5}, inf(X+Y, I).

I = 1, {Y>=1/2}, {X>=1/2} ?

| ?- {X >= 0.5, Y >= 0.5}, bb_inf([X,Y], X+Y, I).

I = 2, {X>=1/2}, {Y>=1/2} ?
```

`ordering(V1 < V2)` — A `V1` változó előbb szerepeljen az eredmény-constraintben mint a `V2` változó.

`ordering([V1,V2,...])` — `V1, ...` ebben a sorrendben szerepeljen az eredmény-constraintben.

Szélsőérték-számítás grafikus illusztrálása




```
| ?- { 2*X+Y =< 16, X+2*Y =< 11, X+3*Y =< 15, Z = 30*X+50*Y
     }, sup(Z, Sup).

Sup = 310, {Z=30*X+50*Y}, {X+1/2*Y=<8}, {X+3*Y=<15}, {X+2*Y=<11}
```


További részletek

Projekció

```
% Az (X,Y) pont az (1,2) (1,4) (2,4) pontok
% {\'a}ltal kifesz{\'\i}tett h{\'a}romsz{\"o}gben van
hszogben(X,Y) :-
        { X=1*L1+1*L2+2*L3,
          Y=2*L1+4*L2+4*L3,
          L1+L2+L3=1, L1>=0, L2>=0, L3>=0 }.

| ?- hszogben(X,Y).
                     {Y=<4}, {X>=1}, {X-1/2*Y=<0} ?

| ?- hszogben(_, Y).
                     {Y=<4}, {Y>=2} ?

| ?- hszogben(X, _).
                     {X>=1}, {X=<2} ?
```

Belső ábrázolás

`clpr` — lebegőpontos szám; `clpq` — `rat(`*Számláló*, *Nevező*`)`, ahol *Számláló* és *Nevező* relatív prímek. Például `clpq`-ban:

```
| ?- {X=0.5}, X=0.5.
no
| ?- {X=0.5}, X=1/2.
no
| ?- {X=0.5}, X=rat(2,4).
no
| ?- {X=0.5}, X=rat(1,2).
X = 1/2 ?
| ?- {X=5}, X=5.
no
| ?- {X=5}, X=rat(5,1).
X = 5 ?
```


Példa: tökéletes téglalapok

```
% Rectangle 1 x Width is covered by distinct squares of size Ss.
filled_rectangle(Width, Ss) :-
  { Width >= 1 }, distinct_squares(Ss),
  filled_hole([-1,Width,1], _, Ss, []).

distinct_squares([]).
distinct_squares([S|Ss]) :-
  { S > 0 }, outof(Ss, S), distinct_squares(Ss).

outof([],     _).
outof([S|Ss], S0) :- { S =\= S0 }, outof(Ss, S0).

% filled_hole(L0, L, Ss0, Ss): Hole in line L0
% filled with squares Ss0-Ss (diff list) gives line L.
filled_hole(L, L, Ss, Ss) :-
  L = [V|_], {V >= 0}.
filled_hole([V|HL], L, [S|Ss0], Ss) :-
  { V < 0 }, placed_square(S, HL, L1),
  filled_hole(L1, L2, Ss0, Ss1), { V1=V+S },
  filled_hole([V1,S|L2], L, Ss1, Ss).

% placed_square(S, HL, L): placing a square on
% HL horizontal line gives (vertical) line L.
placed_square(S, [H,V,H1|L], L1) :-
  { S > H, V=0, H2=H+H1 },
  placed_square(S, [H2|L], L1).
placed_square(S, [S,V|L], [X|L]) :-
  { X=V-S }.
placed_square(S, [H|L], [X,Y|L]) :-
  { S < H, X= -S, Y=H-S }.

?- length(Ss, 9), filled_rectangle(Width, Ss).
    Ss = [15/32,9/16,1/4,7/32,1/8,7/16,1/32,5/16,9/32],
    Width = 33/32 ?
```


Nem teljesen tökéletes téglalapok

Az `outof` hívás kihagyásával kapott eredmények

```
W =   1, Ss = [  1]
W =   2, Ss = [  1,  1]
W = 3/2, Ss = [1/2,  1,1/2]
W = 3/2, Ss = [  1,1/2,1/2]
W =   3, Ss = [  1,  1,  1]
W = 4/3, Ss = [1/3,  1,1/3,1/3]
W =   1, Ss = [1/2,1/2,1/2,1/2]
W = 5/3, Ss = [2/3,  1,1/3,1/3]
W = 4/3, Ss = [  1,1/3,1/3,1/3]
W = 5/3, Ss = [  1,2/3,1/3,1/3]
W = 5/3, Ss = [1/3,1/3,  1,2/3]
W = 5/2, Ss = [1/2,  1,  1,1/2]
W = 5/3, Ss = [  1,1/3,1/3,2/3]
W = 5/2, Ss = [  1,1/2,  1,1/2]
W = 5/2, Ss = [  1,  1,1/2,1/2]
W =   4, Ss = [  1,  1,  1,  1]
W = 5/4, Ss = [1/4,  1,1/4,1/4,1/4]
W = 7/5, Ss = [2/5,  1,2/5,1/5,1/5]
W = 7/6, Ss = [1/2,2/3,1/2,1/3,1/3]
W = 6/5, Ss = [3/5,3/5,2/5,2/5,2/5]
W = 7/5, Ss = [2/5,  1,1/5,1/5,2/5]
W = 8/5, Ss = [3/5,  1,1/5,2/5,1/5]
W = 8/5, Ss = [3/5,  1,2/5,1/5,1/5]
W = 7/4, Ss = [3/4,  1,1/4,1/4,1/4]
W = 7/6, Ss = [2/3,1/2,1/2,1/3,1/3]
W = 5/4, Ss = [  1,1/4,1/4,1/4,1/4]
W = 7/5, Ss = [  1,2/5,2/5,1/5,1/5]
W = 7/5, Ss = [  1,2/5,1/5,1/5,2/5]
W = 8/5, Ss = [  1,3/5,1/5,2/5,1/5]
W = 8/5, Ss = [  1,3/5,2/5,1/5,1/5]
...
```

A clpb könyvtár

- **Tartomány:** logikai értékek (1 és 0, igaz és hamis)
- **Függvények** (egyben constraint-relációk):

`~ P`	P hamis (*negáció*).
`P * Q`	P és Q mindegyike igaz (*konjunkció*).
`P + Q`	P és Q legalább egyike igaz (*diszjunkció*).
`P # Q`	P és Q pontosan egyike igaz (*kizáró vagy*).
`X ^ P`	Létezik olyan X, hogy P igaz (azaz `P[X/0]+P[X/1]` igaz).
`P =\= Q`	Ugyanaz mint `P # Q`.
`P =:= Q`	Ugyanaz mint `~(P # Q)`.
`P =< Q`	Ugyanaz mint `~P + Q`.
`P >= Q`	Ugyanaz mint `P + ~Q`.
`P < Q`	Ugyanaz mint `~P * Q`.
`P > Q`	Ugyanaz mint `P * ~Q`.
`card(Is, Es)`	Az Es listában szereplő igaz értékű kifejezések száma eleme az Is által jelölt halmaznak (Is egészek és Tol-Ig szakaszok listája).

- **Primitív constraintek** (constraint tár elemei): tetszőleges constraint (Boole-egyesítők formájában).
- **Constraint-megoldó algoritmus:** Boole-egyesítés.

A `library(clpb)` könyvtár eljárásai

- `sat(`*Kifejezés*`)`, ahol *Kifejezés* változókból, a 0 1 konstansokból és atomokból (ún. szimbolikus konstansok) a fenti müveletekkel felépített logikai kifejezés. Hozzáveszi *Kifejezés*t a constraint-tárhoz.
- `taut(`*Kif*, *Ért*`)`. Megvizsgálja, hogy *Kif* **levezethető-e** a tárból, ekkor *Ért*=1; vagy negáltja levezethető-e, ekkor *Ért*=0. Egyébként meghiúsul.
- `labeling(`*Változók*`)`. Behelyettesíti a *Változók*at 0 1 értekekre, úgy, hogy a tár teljesüljön. Visszalépéskor felsorolja az összes lehetséges értéket.

Boole-egyesítés

A feladat:

- Adott g és h logikai kifejezések.
- Keressük a `g = h` egyenletet megoldó legáltalánosabb egyesítőt (mgu).
- Példa: `mgu(A+B, 1)` lehet `A = B*W + ~B`.
- Egyszerűsítés: A `g = h` egyenlet helyettesíthető az `f = 0` egyenlettel, ahol `f = g # h`.

Az egyesítési algoritmus az f = 0 egyenlőségre

- Ha f-ben nincs változó, akkor azonosnak kell lennie 0-val (különben nem egyesíthető).
- Egyébként válasszunk ki egy X változót. Legyen f_X az f-ből az X=1, f_{-X} az X=0 behelyettesítéssel kapott kifejezés.
- Helyettesítsünk: $X = W*\sim f_X + \sim W*f_{-X}$ (Boole-egyesítő)
- Folytassuk az egyesítést az $f_X * f_{-X} = 0$ egyenlőségre.

Példák

- `mgu(X+Y, 0)` ⟶ `X = 0, Y = 0`;
- `mgu(X+Y, 1) = mgu(~(X+Y), 0)` ⟶ `X = W + ~W*~Y`;
- `mgu(X*Y, ~(X*Z)) = mgu((X*Y)#(X*Z)#1, 0)` ⟶ `X = 1, Y = ~Z`.

Belső ábrázolás: BDD (Boolean/Binary Decision Diagrams)

```
                                     X
                                    / \
                                   1   Y
X*Y # X*Z # 1   ábrázolása:           / \
                                     Z   Z
                                    / \ / \
                                   1   0   1
```


Egyszerű példák

```
| ?- use_module(library(clpb)).
{ ... loading ...}

| ?- sat(X + Y).                              sat(X=\=_A*Y#Y) ?

| ?- sat(x + Y).                              sat(Y=\=_A*x#x) ?

| ?- taut(_A ^ (X=\=_A*Y#Y) =:= X+Y, T).      T = 1 ?

| ?- sat(A # B =:= 0).                        B = A ?

| ?- sat(A # B =:= C), A = B.                 B = A, C = 0 ?

| ?- taut(A =< C, T).                         no

| ?- sat(A =< B), sat(B =< C), taut(A =< C, T).
                                              T = 1,
                                              sat(A=:=_A*_B*C),
                                              sat(B=:=_B*C) ?

| ?- taut(X, T).                              no

| ?- taut(x, T).                              T = 0 ?

| ?- taut(~x, T).                             T = 0 ?
```

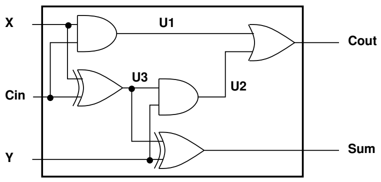
Megjegyzések

- A tár megjelenítése: `sat(V =:= Kif)` ill. `sat(V =\ Kif)` ahol `Kif` egy "polinom", azaz konjunkciókból kizáró vagy (#) művelettel képzett kifejezés.
- Az atommal jelölt szimbolikus konstansok nem behelyettesíthetőek, (legkívül) univerzálisan kvantifikált változóknak tekinthetők.

Példa: 1-bites összeadó

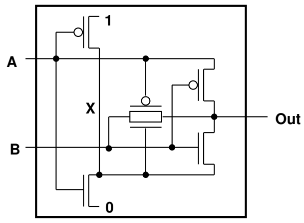
```
| ?- [user].
| adder(X, Y, Sum, Cin, Cout) :-
      sat(Sum =:= card([1,3],[X,Y,Cin])),
      sat(Cout =:= card([2-3],[X,Y,Cin])).
| {user consulted, 40 msec 576 bytes}

yes
| ?- adder(x, y, Sum, cin, Cout).

sat(Sum=:=cin#x#y),
sat(Cout=:=x*cin#x*y#y*cin) ?

yes
| ?- adder(x, y, Sum, 0, Cout).

sat(Sum=:=x#y),
sat(Cout=:=x*y) ?

yes
| ?- adder(X, Y, 0, Cin, 1), labeling([X,Y,Cin]).

Cin = 0, X = 1, Y = 1 ? ;

Cin = 1, X = 0, Y = 1 ? ;

Cin = 1, X = 1, Y = 0 ? ;

no
```

Példa: Hibakeresés áramkörben




```
fault([F1,F2,F3,F4,F5], [X,Y,Cin], [Sum,Cout]) :-
        sat(
                card([0-1],[F1,F2,F3,F4,F5]) *
                (F1 + (U1 =:= X * Cin)) *
                (F2 + (U2 =:= Y * U3)) *
                (F3 + (Cout =:= U1 + U2)) *
                (F4 + (U3 =:= X # Cin)) *
                (F5 + (Sum =:= Y # U3))
            ).

fault_ex(1, Faults) :- fault(Faults, [1,1,0], [1,0]).
fault_ex(2, Faults) :- fault(Faults, [1,0,1], [0,0]).

| ?- fault_ex(I,L), labeling(L).

I = 1, L = [0,0,0,1,0] ? ;
I = 2, L = [1,0,0,0,0] ? ;
I = 2, L = [0,0,1,0,0] ? ;
no
| ?- fault([0,0,0,0,0], [x,y,cin], [Sum,Cout]).

sat(Cout=:=x*cin#x*y#y*cin),
sat(Sum=:=cin#x#y)
```


Példa: Tranzisztoros áramkör verifikálása




```
n(D, G, S) :-    % Gate => Drain = Source
        sat( G*D =:= G*S).

p(D, G, S) :-    % ~ Gate => Drain = Source
        sat( ~G*D =:= ~G*S).

xor(A, B, Out) :-
        p(1, A, X),
        n(0, A, X),
        p(B, A, Out),
        n(B, X, Out),
        p(A, B, Out),
        n(X, B, Out).

| ?- n(D, 1, S).                S = D ?

| ?- n(D, 0, S).                true ?

| ?- p(D, 0, S).                S = D ?

| ?- p(D, 1, S).                true ?

| ?- xor(a, b, X).              sat(X=:=a#b) ?
```


Minesweeper clpb-ben

```
:- use_module(library(clpb)).    :- use_module(library(lists)).

mine(Rows, Cols, Mines, Bd) :-
  length(Bd, Rows), all_length(Bd, Cols), append_lists(Bd, All),
  sat(card([Mines], All)), play_mine(Bd, []).

all_length([], _).
all_length([L|Ls], Len) :- length(L, Len), all_length(Ls, Len).

append_lists([], []).
append_lists([L|Ls], Es) :-
  append_lists(Ls, Es0), append(L, Es0, Es).

play_mine(Bd, Asked) :- select_field(Bd, Asked, R, C, E), !,
  format('Row ~w, col ~w (m for mine)? ', [R,C]), read(Ans),
  process_ans(Ans, E, R, C, Bd), play_mine(Bd, [R-C|Asked]).
play_mine(_Bd, _Asked).

select_field(Bd, Asked, R, C, E) :-
  nth(R, Bd, L), nth(C, L, E), non_member(R-C, Asked), taut(E, 0), !.
select_field(Bd, _Asked, R, C, E) :-
  nth(R, Bd, L), nth(C, L, E), \+ taut(E,1), !.

process_ans(m, 1, _, _, _) :- format('Mine!~n', []), !, fail.
process_ans(Ans, 0, R, C, Bd) :-
  integer(Ans), neighbs(n(R, C, Bd), Ns), sat(card([Ans], Ns)).

neighbs(RCB, N7) :-
  neighbour(-1,-1, RCB, [], N0), neighbour(-1, 0, RCB, N0, N1),
  neighbour(-1, 1, RCB, N1, N2), neighbour( 0,-1, RCB, N2, N3),
  neighbour( 0, 1, RCB, N3, N4), neighbour( 1,-1, RCB, N4, N5),
  neighbour( 1, 0, RCB, N5, N6), neighbour( 1, 1, RCB, N6, N7).

neighbour(ROf, COf, n(R0, C0, Bd), Nbs, [E|Nbs]) :-
  R is R0+ROf, C is C0+COf, nth(R, Bd, Row), nth(C, Row, E), !.
neighbour(_, _, _, Nbs, Nbs).
```


Szándékosan üres

A SICStus `clpfd` könyvtár

A `clpfd` kiterjesztés alapelemei

- Tartomány: egészek (negatívak is!)
- Függvények (aritmetika):

  `+ - * / mod min max` (kétargumentumúak),
  `abs` (egyargumentumú).
- Constraint-relációk

  aritmetikaiak: `#<, #>, #=<, #>=, #= #\=`

  halmazműveletek: *X* `in` *Halmaz*, `domain([`*X*`,...],` *Min*, *Max*`)`
  Halmaz lehet: halmaz: `{`*Szám* ...`}`, intervallum: *Min* `..` *Max*,
  metszet: *Halmaz* `/\` *Halmaz*, únió: *Halmaz* `\/` *Halmaz*,
  komplemens: `\` *Halmaz*
  Min: *Szám* vagy `inf`
  Max: *Szám* vagy `sup`
- Primitív constraint-ek (constraint tár elemei): *X* `in` *Halmaz*
- Constraint-megoldó algoritmus:

  aritmetikaiak: constraint-szűkítés: ún. intervallum-konzisztencia
  halmazműveletek: teljes konzisztencia (ún. tartomány-konzisztencia)

Példa

```
| ?- X in (10..20)/\ (\{15}), Y in 6..sup, Z #= X+Y.
X in(10..14)\/(16..20), Y in 6..sup,
Z in 16..sup ?
yes
| ?- X in 10..20, X #\= 15, Y in {2}, Z #= X*Y.
Y = 2, X in(10..14)\/(16..20),
Z in 20..40 ?
yes
| ?-
```


Constraint feladatok megoldása

A clp(FD) programok tipikus felépítése

- deklaráljuk a változók tartományait
- állítsuk fel a constraint-eket
- helyettesítsük be a constraint-változókat (címkézés)

Címkézés

- `indomain(`*X*`)`: X-et a tartománya által megengedett értékkel helyettesíti (visszalépéssel felsorolja as összes értéket)
- `labeling(`*Opciók*, *Változók*`)`: A *Változók* lista minden elemét behelyettesíti, az *Opciók* lista által előírt módon, pl, `[]`: balról jobbra.

Példa: Kódaritmetika: SEND+MORE=MONEY

```
send(SEND,MORE,MONEY):-
  List= [S,E,N,D,M,O,R,Y], domain(List, 0, 9),
  alldiff(List), S #\= 0, M#\= 0,
  SEND #=  1000*S+100*E+10*N+D,
  MORE #= 1000*M+100*O+10*R+E,
  MONEY #= 10000*M+1000*O+100*N+10*E+Y,
  SEND+MORE #= MONEY, labeling(List).

% labeling(Xs) ekvivalens a beépített labeling([],Xs) eljárással
labeling([]).
labeling([X|Xs]) :- indomain(X), labeling(Xs).

% Azonos a beépített all_different eljárással
alldiff([]).
alldiff([X|Xs]) :- outof(X, Xs), alldiff(Xs).

outof(_, []).
outof(X, [Y|Ys]) :- X #\= Y, outof(X, Ys).
```


A `zebra` feladat

```
:- use_module(library(lists)).
:- use_module(library(clpfd)).

zebra(ZOwner, All):-
  All = [England,Spain,Japan,Norway,Italy,
         Green,Red,Yellow,Blue,White,
         Painter,Diplomat,Violinist,Doctor,Sculptor,
         Dog, Zebra, Fox, Snail, Horse,
         Juice,Water,Tea,Coffee,Milk],
  domain(All, 1, 5),
  alldiff([England,Spain,Japan,Norway,Italy]),
  alldiff([Green,Red,Yellow,Blue,White]),
  alldiff([Painter,Diplomat,Violinist,Doctor,Sculptor]),
  alldiff([Dog,Zebra,Fox,Snail,Horse]),
  alldiff([Juice,Water,Tea,Coffee,Milk]),
  England = Red,          Spain = Dog,
  Japan = Painter,        Italy = Tea,
  Norway = 1,             Green = Coffee,
  Green #= White+1,       Sculptor = Snail,
  Diplomat = Yellow,      Milk = 3,
  Violinist = Juice,      nextto(Norway, Blue),
  nextto(Fox, Doctor),    nextto(Horse, Diplomat),
  labeling([ff], All),
  nth(N, [England,Spain,Japan,Norway,Italy] , Zebra),
  nth(N, [england,spain,japan,norway,italy] , ZOwner).

nextto(A, B) :-  A #= B+1.
nextto(A, B) :-  A #= B-1.
```


N királynő a sakktáblán

```
:- use_module(library(clpfd)).

% A Qs lista N királynð biztonságos elhelyezését
% mutatja egy N*N-es sakktáblán.  Ha a lista
% i. eleme j, akkor az i. királynðt az i. sor j.
% oszlopába kell helyezni.
queens(N, Qs):-
      length(Qs, N), domain(Qs, 1, N),
      safe(Qs),
      labeling([ff],Qs).                  % first-fail elv

% safe(Qs):  A Qs lista a királynðk biztonságos
% elhelyezését írja le.
safe([]).
safe([Q|Qs]):-
      no_attack(Qs, Q, 1),
      safe(Qs).

% no_attack(Qs, Q, I): A Qs lista által leírt
% királynðk egyike sem támadja a Q oszlopban levð
% kiralynðt, feltéve hogy Q és Qs távolsága I.
no_attack([],_,_).
no_attack([X|Xs], Y, I):-
      no_threat(X, Y, I),
      J is I+1, no_attack(Xs, Y, J).

% Az X és Y oszlopokban I sortávolságra levð
% királynðk nem támadják egymást.
no_threat(X, Y, I) :-
      Y #\= X, Y #\= X-I, Y #\= X+I.
```

A constraint-ek működése

A constraint erősítés fajtái

Legyen C egy n-változós constraint; jelöljük *D(X,s)*-sel az X változó tartományát az s constraint-tárban.

- Tartomány-konzisztencia (domain consistency).

  C tartomány-konzisztens s-re nézve, ha bármelyik *Xi* változójához és annak tetszőleges $Vi \in D(Xi,s)$ megengedett értékéhez található a többi változónak olyan $Vj \in D(Xj,s)$ értéke ($j = 1, \ldots, i\text{-}1, i+1, \ldots, n$), hogy *C(X1, ... Xn)* fennálljon.

  Jelöljük *D'(X,s)*-sel a *min(D(X,s)) .. max(D(X,s))* intervallumot.

- Intervallum-konzisztencia (interval consistency).

  C intervallum-konzisztens s-re nézve, ha bármelyik *Xi* változójához és tartománya mindkét végpontjához, azaz a $Vi = min(D(X,s))$ és $Vi = max(D(X,s))$ értékekhez található a többi változónak olyan $Vj \in D'(Xj,s)$ értéke ($j = 1, \ldots, i\text{-}1, i+1, \ldots, n$), hogy *C(X1, ... Xn)* fennálljon.

- Az aritmetikai constraint-ekre a SICStus clpfd könyvtár csak intervallum konzisztenciát garantál, de bizonyos esetekben tartomány-konzisztenciát is biztosít.

Példák

```
| ?- X in {4,9}, Y in {2,3}, Z #= X-Y.    % intervallum-konz.:
                X in{4}\/{9}, Y in 2..3, Z in 1..7 ?
| ?- X in {4,9}, Y=2, Z #= X-Y.           % tartomány-konz.:
                Y = 2, X in{4}\/{9}, Z in{2}\/{7} ?
```


Példa: mágikus sorozatok

- Egy $L = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ sorozat mágikus ($x_i \in [0..n-1]$), ha L-ben az i szám pontosan x_i-szer fordul elő (minden $i \in [0..n-1]$-re).
- Példa: n=4 esetén (1,2,1,0) és (2,0,2,0) mágikus sorozatok.

```
% Az L lista egy N hosszúságú mágikus sorozat.
magikus(N, L) :-
        length(L, N),
        N1 is N-1, domain(L, 0, N1),
        elofordulasok(L, 0, L),
        labeling([], L).             % most felesleges

% elofordulasok([Ei, ...], i, Sor): Sor-ban i, i+1, ...
% előfordulásainak száma Ei, Ei+1, ...
elofordulasok([], _, _).
elofordulasok([E|Ek], I, Sor) :-
        pontosan(I, Sor, E), J is I+1, elofordulasok(Ek, J, Sor).

% pontosan(I, L, E): Az I szám L-ben pontosan E-szer fordul elő.
pontosan(I, L, 0) :- outof(I, L).
pontosan(I, [I|L], N) :- N #> 0, N1 #= N-1, pontosan(I, L, N1).
pontosan(I, [X|L], N) :- N #> 0, X #\= I,   pontosan(I, L, N).

% Hatékonyság-fokozás redundáns (surrogate) constraint-ekkel.
magikus1(N, L) :-
        length(L, N), N1 is N-1, domain(L, 0, N1),
        osszege(L, S), call(S #= N),
        szorzatosszege(L, 0, SS), call(SS #= N),
        elofordulasok(L, 0, L).

osszege([], 0).
osszege([X|L], X+S) :- osszege(L, S).

szorzatosszege([], _, 0).
szorzatosszege([X|L], I, I*X+S) :-
        J is I+1, szorzatosszege(L, J, S).
```


Reifikáció

Gondok a pontosan/3 eljárás előbbi megvalósításával

- harmadik argumentumának értéket ad, nem kezeli constraint-változóként,
- választási pontokat hoz létre

Egy constraint reifikációja

- A constraint igazságértékének "tükrözése" egy 0-1 értékű constraint-változóban.
- Példa: `(X #= 3) #<=> B`: `B` az `X=3` egyenlőség igazságértéke.
- Az aritmetikai és halmaz-constraintek mind reifikálhatóak

Reifikált constraint-ek végrehajtása

- egy démon figyeli, hogy a constraint-tárból levezethető-e, ha igen, `B=1`;
- egy démon figyeli, hogy levezethető-e a negáltja, ha igen, `B=0`;
- egy harmadik démon figyeli, hogy `B` értéket kap-e, ha `B=1`, felveszi a constraint-t, ha `B=0`, felveszi a negáltját a constraint-tárba.

Constraint-levezethetőség (entailment)

- **Tartomány-levezethetőség**: *C tartomány-levezethető s*-ből, ha Xi változói minden megengedett $Vj \in D(Xj,s)$ értékére ($j = 1, \ldots, n$), *C(X1, ... Xn)* fennáll.
- **Intervallum-levezethetőség**: *C intervallum-levezethető s*-ből, ha minden $Vj \in D'(Xj,s)$ értékre ($j = 1, \ldots, n$), *C(X1, ... Xn)* fennáll.

A reifikált aritmetikai constraint-ek intervallum-levezethetőséget, a reifikált halmaz-constraintek tartomány-levezethetőséget garantálnak.

Példák tüközött constraint-ekre

```
| ?- X in 1..4, X #< Y #<=> B, X+Y #=9.
        B = 1, X in 1..4, Y in 5..8 ?
| ?- X+Y #= Z #<=> B, X=1, Z=6, Y in 1..10, Y#\=5.
        X = 1, Z = 6, Y in(1..4)\/(6..10), B in 0..1 ?
```

pontosan/3 tükrözött constraint-ekkel

```
pontosan(_, [], 0).
pontosan(I, [X|L], N) :-
        X #= I #<=> B, N #= N1+B, pontosan(I, L, N1).
```

A tükrözés általánosítása: logikai müveletek constraint-ekkel

- `#\ Q`: `Q` negáltja; `P #/\ Q`: konjunkció; `P #\/ Q`: diszjunkció; `P #\ Q`: kizáró vagy; `P #=> Q` vagy `Q #<= P`: implikáció; `P #<=> Q`: ekvivalencia.
- `P` és `Q` tetszőleges reifikálható constraint (pl aritmetikai), vagy 0-1 értékű constraint-változó
- a logikai müveletek reifikált és aritmetikai constraint-ekre vezethetők vissza, pl: `X#=4 #\/ Y#>6` ⟶ `X#=4#<=>B1, Y#>6#<=>B2, B1+B2 #>0`

A reifikáció hatékonysága: mágikus sorozatok (586/133Mhz)

variáns/adat	n=8	n=10	n=12	n=14	n=20	n=30
választós	10.17	227.96				
választós+osszege	1.35	6.26	28.69	127.29		
vál.+szorzatosszege	0.27	0.66	1.32	2.54		
vál.+ossz.+szorzossz.	0.20	0.48	1.02	1.90	10.59	108.94
reifikálós	1.20	2.76				
reifikálós+osszege	0.47	0.95	1.73	2.54		
reif.+szorzatosszege	0.20	0.40	0.54	0.72		
reif.+ossz.+szorzossz.	0.25	0.43	0.62	0.82	1.89	4.83

Constraintek feldolgozása

A feldolgozás fázisai

- A constraint kifejtése elemi constraintekre
  - alapértelmezés: fordítási időben;
  - `call/1`-be ágyazással elhalasztható a constraint végrehajtásáig.
  - kísérletezés: `goal_expansion(`*Constraint*`, user, Kifejtés)`
- A constraint végrehajtása (posting)
  - megállapítjuk mikor kell felébreszteni; (a változói alsó, felső határának változásakor, bármilyen változáskor vagy értékadáskor);
  - felébresztjük a constraintet.
- A constraint felébresztése = constraint-erősítés

Elemi constraintek

- aritm.:`'x+y=t'/3 'x*y=z'/3 'x/y=z'/3 'x mod y=z'/3 '|x|=y'/2`
- összehasonlítás: `'x=y'/2, 'x=<y'/2, 'x\=y'/2` és reifikált változataik: `iff_aux('x` *Rel* `y'(X,Y), B)`, ahol *Rel* a `= =< \=` jelek valamelyike.
- Optimalizálások: `x*x=y'/2 'ax=t'/3 'ax+y=t'/4 'ax+by=t'/5 't+u=<c'/3 't=u+c'/3 't=<u+c'/3 't\=u+c'/3 't>=c'/2` stb.
- Példák:
  `abs(X-Y)#>1` $\longrightarrow$ `'x+y=t'(Y,A,X),'|x|=y'(A,B),'t>=c'(B,2)`
  `(X#<3)#<=>B` $\longrightarrow$ `iff_aux('x=<y'(X,2),B)`
  `X*X+Y*Y#=<16` $\longrightarrow$ `'x*x=y'(X,A),'x*x=y'(Y,B),'t+u=<c'(A,B,16)`

Constraintek kifejtése

- lineáris kifejezés esetén megmarad az intervallum-konzisztencia;
- általános esetben nem, pl `X in 0..10, X*X*X*X#=16.` $\longrightarrow$ `X in 1..4`
- de sokszor a nem-lineárisra is jó, pl. prímszámok ellenőrzésére:
  `domain([X,Y], 0, 5000), X-Y#>1, X*X-Y*Y#=6211.` $\longrightarrow$ `no`

Constraint erősítés ($< C, s > \longrightarrow < C', s \wedge c >$ ahol $s \models C \equiv C' \wedge c$); használt speciális esetei:

- ha $s \wedge c$ inkonzisztens, akkor visszalépünk;
- ha $C' =$ `true`, a constraint levezethetővé vált, azaz sikeresen lefutott;
- ha $C' \neq C$, akkor C lefutott, helyette végrehajtjuk C'-t, pl. reifikációnál, vagy `max(X,Y) #= Z` $\longrightarrow$ `X #= Z`, ha `Y #=< X`;
- ha $C' = C$, akkor (újra) elaltatjuk a constraintet.

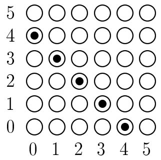
Constraint erősítés megvalósítása

- cél: az adott constraint és egy adott tár esetén kiszűrni azokat az értékeket, amelyekre a constraint nem teljesülhet.
- közvetlen (nem reifikált) constraintek esetén képezzük a constraint és a tár metszetét, majd:
  - tartomány-konzisztencia esetén: a változó-tartományok minden pontját próbáljuk szűrni, pl. `abs(X-Y)#>1, Y in 2..4` $\rightarrow$ `X#\=3`;
  - intervallum-konzisztencia biztosításakor: a tartomány végpontjait próbáljuk kiszűrni, a többi változó tartományát intervallumnak tekintve (ha sikerül, ismételjük);
- reifikált constraintek esetén:
  - ha a logikai változó értéket kap, a kérdezett constraint vagy negáltja lép a reifikált constraint helyébe;
  - vizsgáljuk, hogy a kérdezett constraint vagy negáltja a tárból levezethetővé válik-e:
    - tartomány-levezethetőség vizsgálata: ha minden a tár által megengedett behelyettesítésre igaz a constraint, pl. `Y in {0,5}, X in 2..3` tárból `abs(X-Y)#>1` tartomány-levezethető;
    - intervallum-levezethetőség vizsgálata: ha a tárban minden tartományt intervallummá általánosítunk, akkor is mindig igaz, pl `abs(X-Y)#>1` a fenti tárból nem intervallum-levezethető.

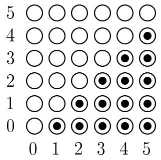
    Ha a kérdezett constraint vagy a negáltja levezethetővé válik, a logikai változó szűkül: a 0 vagy 1 értéket kapja.

`domain([X,Y], 0, 5), C(X,Y), X#=<Y+2, X#>2, Y in {0,4,5}`

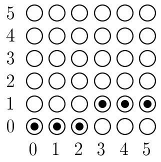
`C(X,Y):`



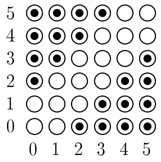
`X + Y #= 4`



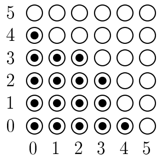
`X #> Y`



`Y #= X/3`
vagy
`X#>=3 #<=> Y`

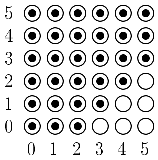


`abs(X-Y)#>1`
vagy
`X-Y#=Z #/\`
`Z #>1 #\/`
`Z #< -1`

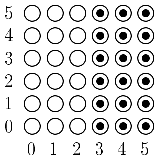


`X*X+Y*Y#=<16`

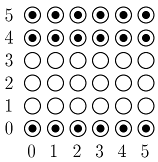
`X #=< Y+2`



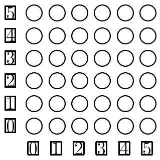
`X #> 2`



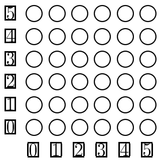
`Y in {0,4,5}`



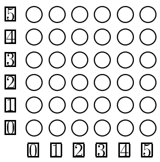
Constraint tárak



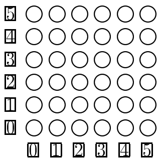
`X+Y #= 4, X#=<Y+2, X#>2`



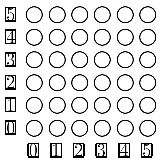
`X #> Y, X#=<Y+2, X#>2, Y in {0,4,5}`



`X#>=3 #<=> Y, X#=<Y+2, X#>2`



`abs(X-Y)#>1, X#=<Y+2, X#>2, Y in {0,4,5}`



`X*X+Y*Y#=<16, X#=<Y+2, X#>2`

További aritmetikai constraintek

Ezek a constraintek nem reifikálhatóak.

`scalar_product(Coeffs, Xs, Relop, Value)`
Igaz, ha `Coeffs * Xs Relop Value`, ahol `Relop` aritmetikai összehasonlító operátor (`#=`, `#<`, stb.), `*` skalárszorzást jelöl, `Coeffs` egészekből álló lista, `Xs` elemei és `Value` egészek vagy constraint változók.
Intervallum-konzisztenciát biztosít.

`sum(Xs, Relop, Value)`
Jelentése: Σ `Xs Relop Value`.
Ekvivalens a következővel: `scalar_product(Csupa1, Xs, Relop, Value)`, ahol `Csupa1` csupa `1` számból álló lista, `Xs`-sel azonos hosszú.

Kombinatorikus (szimbolikus) constraintek

Ezek a constraintek nem reifikálhatóak.
`count(Val, List, Relop, Count)`
Jelentése: a `Val` egész szám `Lista`-ban való előfordulásainak száma n, és n `Relop Count`. (V. ö. a korábbi `pontosan/3` predikátummal.)

Példa:

```
magikus2(N, L) :-
        length(L, N), N1 is N-1, domain(L, 0, N1),
        elofordulasok(L, 0, L, Egyhat),
        sum(L, #=, N),
        scalar_product(Egyhat, L, #=, N),
        labeling([], L).

elofordulasok([], _, _, []).
elofordulasok([E|Ek], I, Sor, [I|EH]) :-
        count(I, Sor, #=, E),
        J is I+1, elofordulasok(Ek, J, Sor, EH).
```


Kombinatorikus (szimbolikus) constraintek (folyt.)

`element(X, CLista, Y)`
Jelentése: `CLista` `X`-edik eleme `Y`, ahol `X` és `Y` constraint-változók (vagy egészek), `CLista` egészekből vagy constraint-változókból álló lista.
Tartomány-konzisztenciát biztosít. Példák:

```
| ?- element(X, [0,1,2,3,4], Y), X in {2,5}.  % Y #= X-1
                        X in{2}\/{5}, Y in{1}\/{4} ?


% X #= c #<=> B megvalósítása, 1 =< X,c =< 6 esetére.
beq(X, C, B) :-
  X in 1..6, call(I #= X+6-C),
  element(I, [0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0], B).
```

`relation(X, Hozzárendelés, Y)`
Itt `X` és `Y` constraint-változók (vagy egészek), `Hozzárendelés` *egész - Halmaz* alakú párok listája (ahol mindegyik *egész* csak egyszer fordulhat elő).
Jelentése: `Hozzárendelés` tartalmaz egy `X-Halmaz` párt, ahol `Y` eleme a `Halmaz`-nak. Tetszőleges bináris reláció definiálására használható.
Tartomány-konzisztenciát biztosít. Példa:

```
'abs(x-y)>1'(X,Y) :-
  relation(X, [0-(2..5), 1-(3..5), 2-{0,4,5},
               3-{0,1,5}, 4-(0..2), 5-(0..3)], Y).

'abs(x-y)>1'(X,Y), X in 2..3. → Y in(0..1)∨(4..5)
```

`all_different(Változók)`
A Változók páronként különbözőek. Megvalósítása nem teljes, a korábbi `alldiff` eljárással azonos.

`all_distinct(Változók)`
Jelentése ugyanaz, mint `all_different`, de teljes (tartomány-konzisztenciát biztosít) . Például:

```
| ?- domain([X,Y,Z], 1, 2), all_distinct([X,Y,Z]).
no
```


Címkéző eljárások

`indomain(X)` — korábban ismertettük.

`minimize(Cél, X)` ill. `maximize(Cél, X)`
A `Cél` ismételt hívásával megkeresi az `X` változó minimális ill. maximális értékét. Például:

```
| ?- domain([X,P], 2, 4000), P*X#=7373, minimize(labeling([], [P,X]), P).
```

`labeling(Opciók, Változók)`:
A `Változók` lista minden elemét behelyettesíti, az `Opciók` lista által előírt módon. Az alábbi négy csoport mindegyikéből legfeljebb egy opció szerepelhet.

- Változó kiválasztása:
  - `leftmost` — a legelső változó (alapértelmezés);
  - `min` ill `max` — a legkisebb alsó határú ill. a legnagyobb felső határú;
  - `ff` — first-fail elv: a legkisebb tartományú változók közül a legbaloldalibb;
  - `ffc` — a legkisebb tartományúak közül a legtöbb constraintben előforduló (ha több van, ezek közül a legbaloldalibb).
- A tartomány felbontása a kiválasztott `X` változóra:
  - `step` — `X #= B` és `X #\= B` közötti választás, ahol `B` az `X` tartományának alsó vagy felső határa (alapértelmezés);
  - `enum` — többszörös választás `X` lehetséges értékei közül;
  - `bisect` — `X #< M` és `X #>= M` közötti választás, ahol `M` az `X` tartományának középső eleme.
- A tartomány bejárási iránya:
  - `up` — alulról felfelé (alapértelmezés);
  - `down` — felülről lefelé.
- A keresett megoldások:
  - `all` — visszalépéssel az összes megoldást felsorolja; (alapértelmezés)
  - `minimize(X)` ill. `maximize(X)` — csak egy megoldást keres, `X`-re vonatkozóan a minimálisat ill. a maximálisat.

További kombinatorikus constraintek

`assignment(Xs, Ys)`
`Xs` és `Ys` egészekből vagy constraint-változókból alkotott azonos (`n` hosszúságú listák. Teljesül, ha `X[i]` és `Y[i]` mind az `1..n` tartományban vannak és X[i]=j $\Leftrightarrow$ ha Y[j]=i.
Azaz: `Xs` egy egyértelmű leképezés az `1..n` halmazon és `Ys` az inverze.

`circuit(Xs)`
`Xs` n hosszúságú lista. Igaz ha minden `X[i]` az `1..n` tartományba esik és `X[1], X[X[1]], ...` (n-szer ismételve) az `1..n` egy permutációja.
Azaz: Xs egy gráf Hamilton-körét adja meg. A gráf pontjai az `1,...n` számokkal vannak címkézve, `Xs[i]=j` jelentése az `i.` pontból a `j.`-be vezet a vonal.

`circuit(Xs, Ys)`
Ekvivalens a következővel: `circuit(Xs), assignment(Xs, Ys)`.

Ütemezési constraintek

`cumulative(Starts, Durations, Resources, Limit)`
Az első három argumentum változókból/egészekből álló egyforma hossszú lista, az utolso egy változó/egész. Jelentése: a `Starts` kezdőidőpontokban elkezdett, `Durations` ideig tartó és `Resources` erőforrásigényű feladatok bármely időpontban összesített erőforrásigénye nem haladja meg a `Limit` határt. Jelöljük:

> a = `min(`$S1, \ldots, Sn$`)`, (kezdőidőpont)
> b = `max(`$S1+D1, \ldots, Sn+Dn$`)`, (végidőpont)
> Rij = Rj, ha Sj =< i < $Sj+Dj$, egyébként Rij = 0; (a j. feladat erőforrásigénye az i. időpontban)

Ezekkel a jelölésekkel a constraint jelentése:

> $Ri1+\ldots+Rin$ =< $Limit$, minden a =< i < b esetén.

`serialized(Starts, Durations)`
A `cumulative` speciális esete, ahol az összes erőforrás-igény és a korlát is 1.

Felhasználói constraintek

Mit kell meghatározni egy új constraint definiálásakor?

- milyen tár-szűkítést végezzen el?
- mikor ébredjen fel újabb szűkítés megkisérlése érdekében?
- mikor fejezheti be a működését (mikor válik levezethetővé)?
- ha reifikálni is akarjuk:
  - hogyan kell végrehajtani a negáltját?
  - hogyan döntsük el a tárból való levezethetőségét?
  - hogyan döntsük el a negáltjának a levezethetőségét?

Példa: `'x+y=t'(X, Y, T)`, intervallum konzisztenciával

- `T` tartományából hagyja ki a `min(X)+min(Y)`-nél kisebb és a `max(X)+max(Y)`-nál nagyobb elemeket; ezt ismételje, valahányszor `X` vagy `Y` alsó vagy felső határa változik, mindaddig, míg `X` és `Y` értéket nem kap.
- `X`-ből hagyja ki a `min(T)-max(Y)`-nél kisebb és a `max(T)-min(Y)`-nál nagyobb elemeket; ezt ismételje ha `T` vagy `Y` határa változik.
- hasonlóan szűkítse `Y`-t is.

Constraint definiálási lehetőségek SICStusban

- globális constraintek: Prologban kell megadni a fentieket (reifikálás nincs)
- FD predikátumok: ún indexikálisok segítségével deklaratív módon lehet constrainteket definiálni, reifikáltakat is.

`'x+y=t'/3` definiálása FD predikátummal

```
'x+y=t'(X,Y,T) +:
        X in min(T) - max(Y)..max(T) - min(Y),
        Y in min(T) - max(X)..max(T) - min(X),
        T in min(X) + min(Y)..max(X) + max(Y) .
```


FD predikátumok

Egy FD predikátum 1 vagy 4 klózból áll

- A `+:` nyakjelű kötelező, a `-:`, `+?`, `-?` nyakjelűek csak reifikálandó constraintek esetén szükségesek.
- A `+:` `-:` ún szűkítő (mondó, *tell*) indexikálisok az adott constraint és negáltja tárra gyakorolt hatását írják le.
- A `+?` `-?` ún kérdező (*ask*) indexikálisok az adott constraint és negáltja levezethetőségi feltételeit definiálják.
- Az FD predikátum fejében az argumentumok különböző változók; törzsében csak ezeket a változókat tartalmazó indexikálisok lehetnek.

Indexikálisok

- Alakjuk: *Változó* `in` *Tartománykifejezés*
- *Tartománykifejezés* (eredetileg *Range*) egy halmazértékű függvény, amely a benne szereplő változóktól függoen egy tartományt generál.
- Baloldalán egy a fejben felsorolt változó áll, jobboldalán az **összes** többi változót tartalmazó tartománykifejezés.
- **Alapszabály**: Ha `X in R` szerepel egy `C` constraint definiciójában, akkor ha az `R`-beli változóknak konkrét értéket adunk, akkor az `R` tartománykifejezés értéke **pontosan** a `C` constraintet kielégítő `X` értékek halmaza kell legyen.

Példa: `'x+y=t'/3` tartomány-konzisztenciával

```
'x+y=t'(X,Y,T) +:
      X in dom(T) - dom(Y),        % {t − y|t ∈ dom(T), y ∈ dom(Y)}
      Y in dom(T) - dom(X),
      T in dom(X) + dom(Y).
```


Indexikálisok szintaxisa

```
Indexical --> X in Range

X --> variable                      { constraint-valtozó }

Constant --> integer
  |   inf   |   sup                 { minusz/plusz végtelen }
  |   X                             { csak behelyettesítve
                                      értékelhető ki }
Term --> Constant
  |   card(X)                       { X tartományának mérete }
  |   min(X)                        { X alsó határa }
  |   max(X)                        { X felső határa }
  |   Term + Term | Term - Term
  |   Term * Term | Term mod Term
  |   - Term
  |   Term /> Term                  { felfelé kerekített osztás }
  |   Term /< Term                  { lefelé kerekített osztás }

ConstantSet -->  {Term,...,Term}

Range --> ConstantSet
  |   dom(X)                            { X tartománya }
  |   Term..Term                        { intervallum }
  |   Range/\Range                      { metszet }
  |   Range\/Range                      { únió }
  |   \Range                            { komplementer halmaz }
  |   - Range                           { pontonkénti negáció }
  |   Range + Range | Range + Term      { pontonkénti össszeadás}
  |   Range - Range | Range - Term
  |   Term - Range                      { pontonkénti kivonás }
  |   Range mod Range | Range mod Term  { pontonkénti modulo }
  |   Range ? Range                     { feltételes kifejezés }
  |   unionof(X,Range,Range)            { únió-kifejezés }
  |   switch(Term,MapList)              { kapcsoló-kifejezés }
```


Szűkítő indexikálisok kezelése

Tartománykifejezések monotonitása

- Jelöljük $D(X,S)$-sel az X változó tartományát az S tárban, $S(R)$-rel egy R tartománykifejezés értékét az S tárban.
- Egy S tár kiterjesztése S', ha minden X változóra $D(X,S') \subseteq D(X,S)$.
- Egy R tartománykifejezés egy S tárra nézve monoton, ha S minden S' kiterjesztésére $S'(R) \subseteq S(R)$.
- R S-re nézve antimonoton, ha S minden S' kiterjesztésére $S'(R) \supseteq S(R)$.
- R S-ben konstans, ha monoton és antimonoton (nem változik).
- egy indexikális (anti)monoton, ha a benne levő tartománykifejezés (anti)monoton.
- **Tétel**: ha egy `X in R` indexikális monoton egy S tárban, akkor az `X` értéktartománya S(`R`)-rel szűkíthető (vö. alapszabály).

Szűkítő indexikálisok feldolgozása

- Az `X in R` indexikálist felfüggesztjük amig kiértékelhető és monoton nem lesz (a megfelelő változók be nem helyettesítődnek).
- Az `R`-beli többi változóra megállapítjuk az ébresztési feltételeket
  - `dom(Y)`, `card(Y)` környezetben — bármilyen változáskor
  - `min(Y)` környezetben – alsó határ változásakor
  - `max(Y)` környezetben– felső határ változásakor
- Ha az indexikális felébred:
  - Ha $D(X,S)$ és $S(R)$ diszjunktak, akkor visszalépünk.
  - a tárat az X `in` $S(R)$ constrainttel **szűkitjük** (erősítjük), azaz $D(X,S) := D(X,S) \wedge S(R)$
  - Ha $S(R)$ konstans, az **indexikálist tartalmazó constraint** levezethetővé vált.
  - Egyébként újra elaltatjuk az indexikálist.

Példák szűkítő indexikálisokra

```
't+u=c'(T,U,C) +:                 % Tartomány-konzisztens!
        T in C - dom(U),       U in C - dom(T).

't+u>=c'(T,U,C) +:
        T in C - max(U)..sup,  U in C - max(T)..sup.

'ax+c=t'(A,X,C,Y) +:
        X in (min(Y) - C) /> A .. (max(Y) - C) /< A,
        Y in  min(X)*A + C     .. max(X)*A + C.

'p\\/q'(P, Q, B) +:
        B in (min(P)+min(Q))/>2 .. (max(P)+max(Q))/>2,
        P in min(B)*2 - max(Q) - 1  .. max(B)*2 - min(Q),
        Q in min(B)*2 - max(P) - 1  .. max(B)*2 - min(P).
% | ?- domain([P,Q,B], 0, 1), 'p\\/q'(P, Q, B), P=1.
%                            B = 1, P = 1, Q in 0..1 ?

'abs(x-y)>c'(X, Y, C) +:
        X in (inf .. max(Y)-C-1) \/ (min(Y)+C+1 .. sup),
        Y in (inf .. max(X)-C-1) \/ (min(X)+C+1 .. sup).
% | ?- 'abs(x-y)>c'(X,Y,3), X in 3..5.
%                            X in 3..5, Y in(inf..1)\/(7..sup) ?

no_threat_3(X, Y, I) +:
        X in \({Y} \/ {Y+I} \/ {Y-I}),
        Y in \({X} \/ {X+I} \/ {X-I}).

% Hibás constraint, sérti az alapszabályt!
'x=<y=<z'(X, Y, Z) +:
        Y in min(X)..max(Z),
        Z in min(Y).. sup,
        X in inf..max(Y).
% | ?- 'x=<y=<z'(15, 5, Z).
%                            Z in 5..sup ?
```


Házifeladat

Egy constraint feladat megoldása

- A megoldás lehet `clpfd`-ben, `clpq`-ban, stb.
- Előny, ha többféle megoldás is van, és ezeket össze is hasonlítja a dolgozat, lásd pl. a `pontosan/3` N-királynő megoldásvariánsait korábban.
- `clpfd` megoldás esetén érdekes lehet megfelelő felhasználói constraint-ek definiálása, a különféle constraint-megfogalmazások, `labeling` technikák összehasonlítása.

Javasolt feladat: japán feladvány (starpic)

- Adott egy NxM-es négyzethálós üres (fehér) téglalap.
- A téglalap bizonyos mezőit be kell feketíteni, hogy egy rejtett ábra tünjék elő.
- A téglalap minden sorához és oszlopához adott egy számsor: az adott sorban/oszlopban levő összefüggő fekete szakaszok hosszai.
- Egy egyszerű példa és megoldása:

```
      1 1 2 1 1                1 1 2 1 1
      1   1 1                  1   1 1
2     . . . . .          2     . . x x .
1 1   . . . . .          1 1   x . x . .
1 1   . . . . .          1 1   . x . . x
1 2   . . . . .          1 2   x . x x .
```

- A példa egy lehetséges meghívási módja:

```
| ?- starpic([[2],[1,1],[1,1],[1,2]],
             [[1,1],[1],[2,1],[1,1],[1]]).
[0,0,1,1,0]
[1,0,1,0,0]
[0,1,0,0,1]
[1,0,1,1,0]
```

Alternatív feladat: mastermind

http://kempelen.inf.bme.hu/~pp/pp95a/pp95nhf.html

Szándékosan üres

Szándékosan üres

Bonyolultabb tartománykifejezések

Únió-kifejezés

`unionof(X, H, T)` — ahol `X` változó, `H` és `T` tartománykifejezések. Kiértékelése egy S tárban: kiértékeljük `H`-t, legyen ennek értéke $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Képezzük a T_i kifejezéseket úgy, hogy `T`-ben `X` helyébe x_i-t írjuk. Ekkor az únió-kifejezés értéke a $S(T_1), \ldots, S(T_n)$ halmazok úniója. Ha $S(H)$ végtelen, felfüggesztjük. Példa:

```
% Maximálisan szűkítő, de hatékonytalan!
no_threat_4(X, Y, I) +:
        X in unionof(B,dom(Y),\({B} \/ {B+I} \/ {B-I})),
        Y in unionof(B,dom(X),\({B} \/ {B+I} \/ {B-I})).
```

Feltételes kifejezés

`Felt ? Tart` – ahol `Felt` és `Tart` tartománykifejezések. Ha S(`Felt`) üres halmaz, akkor a feltételes kifejezés értéke is üres halmaz, egyébként pedig azonos S(`Tart`) értékével. Példa:

```
'x=<y=<z'(X, Y, Z) +:       % Ez már helyes!
        Y in min(X)..max(Z),
        Z in ((inf..max(Y)) /\ dom(X)) ? (min(Y).. sup),
        X in ((min(Y)..sup) /\ dom(Z)) ? (inf..max(Y)).
```

Használható a kiértékelés késleltetésére: `( Felt?(inf..sup) \/ Tart )` eredménye S(`Tart`), ha S(`Felt`) üres, egyébként `inf..sup`. Az ilyen szerkezetekben `Tart` értékét ki sem számoljuk, amíg `Felt` nem üres. Példa:

```
% Maximálisan szűkít, kicsit kevésbé hatékonytalan
no_threat_5(X, Y, I) +:
    X in (4..card(Y)) ? (inf..sup) \/
          unionof(B,dom(Y),\({B} \/ {B+I} \/ {B-I})),
    Y in (4..card(X)) ? (inf..sup) \/
          unionof(B,dom(X),\({B} \/ {B+I} \/ {B-I})).
```


Kapcsoló-kifejezés

`switch(T, MapList)` — ahol `T` a `term` szintaxisának megfelelő kifejezés, `MapList` pedig `integer-Range` alakú párokból álló lista. Ha S(`T`) értéke Key és `MapList` tartalmaz egy $Key - Expr$ párt, akkor a kapcsoló értéke $S(Expr)$, egyébként üres. Például az alábbi két definíció hatása azonos:

```
p(X, Y) :- relation(X, [1-{1},2-{1,2},3-{1,2,3}], Y).

q(X, Y) +:
  X in unionof(B,dom(Y),switch(B,[1-{1,2,3},2-{2,3},3-{3}])),
  Y in unionof(B,dom(X),switch(B,[1-{1},2-{1,2},3-{1,2,3}])).
```

Reifikálható constraintek definiálása

Négy klózból állo FD-predikátum szükséges, példa:

```
'x\\=y'(X,Y) +:        % 1. a constraintet szükitő indexikálisok
        X in \{Y},
        Y in \{X}.
'x\\=y'(X,Y) -:        % 2. a negáltját szükitő indexikálisok
        X in dom(Y),
        Y in dom(X).
'x\\=y'(X,Y) +?        % 3. a levezethetőséget kérdező
        X in \dom(Y).  %                               indexikális
'x\\=y'(X,Y) -?        % 4. a negált levezethetőségét kérdező
        X in {Y}.      %                               indexikális
```

A kérdező klózok csak egyetlen indexikálist tartalmazhatnak.

`'x\\=y'(X,Y) #<=> B` **végrehajtásakor**

- A 3. klóz figyeli, hogy `X` és `Y` tartománya diszjunkttá vált-e, ha igen, `B=1`;
- A 4. klóz figyeli, hogy `X=Y` igaz-e, ha igen `B=0`;
- egy külön démon figyeli, hogy `B` behelyettesítődött-e, ha igen, és `B=1`, meghivja az 1. klózt, ha `B=0`, akkor a 2. klózt.

Kérdező indexikálisok feldolgozása

- Az `X in R` indexikálist felfüggesztjük amig kiértékelhető és antimonoton nem lesz (a megfelelő változók be nem helyettesítődnek).
- Az ébresztési feltételek (`Y` az `R`-ben előforduló változó):
  - `X` tartományának bármilyen változáskor
  - `dom(Y)`, `card(Y)` környezetben — bármilyen változáskor
  - `min(Y)` környezetben – alsó határ változásakor
  - `max(Y)` környezetben – felső határ változásakor
- Ha az indexikális felébred:
  - Ha $D(X, S) \subseteq S(R)$ akkor a constraint levezethetővé vált.
  - Egyébként, ha $D(X, S)$ és $S(R)$ diszjunktak, valamint $S(R)$ konstans, akkor a constraint negáltja levezethetővé vált.
  - Egyébként újra elaltatjuk az indexikálist.

Példa

```
'x=<y'(X,Y) +:
        X in inf..max(Y),
        Y in min(X)..sup.
'x=<y'(X,Y) -:
        X in (min(Y)+1)..sup,
        Y in inf..(max(X)-1).
'x=<y'(X,Y) +?
        X in inf..min(Y).
'x=<y'(X,Y) -?
        X in (max(Y)+1)..sup.
```


FD-predikátumok, indexikálisok összefoglalása

- Legyen `C(Y1, ...)` egy FD-predikátum, amelyben szerepel egy

  `Yi in R(Y1, ...)`

  indexikális. A baloldali `Yi` változót néha `X`-nek nevezzük. Az `R` tartománykifejezéshez tartozó halmazfüggvényt nevezzük R-nek.
- (definició:) Az indexikális az alábbi relációt definiálja:

  C = { $< y_1, \ldots >$ | $y_k \in$ `inf..sup` $\wedge y_i \in R(\{y_1\}, \ldots)\}$
- (alapszabály:) Egy FD-predikátum csak akkor értelmes, ha a pozitív klózaiban levő összes indexikális ugyanazt a relációt definiálja; továbbá a negatív klózaiban levő összes indexikális ennek a relációnak a negáltját (komplemensét) definiálja.
- Ha R monoton egy S tárra nézve, akkor $S(R)$-ről belátható, hogy minden olyan x értéket tartalmaz, amelyek (az S által megengedett y_j értékekkel együtt) a C relációt kielégítik. Ezért szűkítő indexikálisok esetén jogos az X tartományát $S(R)$-rel szűkíteni.
- Ha R antimonoton egy S tárra nézve, akkor $S(R)$-ről belátható, hogy minden olyan x értéket kizár, amelyekre (az S által megengedett y_j értékekkel együtt) a C reláció nem áll fenn. Ezért kérdező indexikálisok esetén, ha $D(X, S) \subseteq S(R)$, jogos a constraintet az S tárbol1 levezethetőnek tekinteni.
- A fentiek miatt természetesen adódik az indexikálisok felfüggesztési szabálya: a szűkítő indexikálisok végrehajtását mindaddig felfüggesztjük, amig monotonná nem válnak; a kérdező indexikálisok végrehajtását mindaddig felfüggesztjük, amig antimonotonná nem válnak.
- **Az indexikálisok deklaratív volta:** Ha a fenti alapszabályt betartjuk, akkor a `clpfd` megvalósítás az FD-predikátumot helyesen valósítja meg, azaz mire a változók teljesen behelyettesítetté válnak az FD-predikátum akkor és csak akkor fог sikeresen lefutni, vagy 1-gyé tükroződni (reifikálódni), ha a változók értékei a predikátum által definiált relációhoz tartoznak. Az indexikális megfogalmazásán csak az múlik, hogy a nem-konstans tárak esetén milyen jó lesz a szűkítő ill. kérdező viselkedése.

Globális constraintek

Definiálás módja

- `fd_global(Constraint, State, Susp)`: `Constraint` végrehajtásának elindítása, `State` kezdőállapottal, `Susp` ébresztési listával (elemei: `dom(X)`, `min(X)`, `max(X)`, `minmax(X)`, `val(X)`).
- `clpfd:dispatch_global(Constraint, State0, State, Actions)`: A kampó-eljárás törzse definiálja a `Constraint` felébredésekor elvégzendőket: `State0` a régi, `State` az új állapot. Az `Actions` lista elemei lehetnek: `exit`, `fail`, `X=V`, `X in R`, `X in_set S`, `call(Module:Goal)`.

Tartományok lekérdezése

- `fd_min(X, Min)`; `fd_max(X, Max)`; `fd_size(X, Size)`: Az `X` változó tartományának pillanatnyi alsó határa `Min`, felső határa `Max`, mérete `Size`. Ha valamelyik nem korlátos, az eljárás meghiúsul.
- `fd_set`: lásd alább

Segédeszköz: FD-halmazok

- `fd_set(X, Set)`: `X` tartománya a `Set` FD-halmaz.
- `X in_set Set`: `X`-et `Set`-re szűkíti.
- Az FD-halmaz: diszjunkt intervallumok rendezett listája. Mint absztrakt adattípus, alapműveletei:
  - `empty_fdset(S)`: `S` az üres FD-halmaz.
  - `fdset_parts(S, Min, Max, Rest)`: `S` első intervalluma `Min..Max`, a maradék FD-halmaz: `Rest`. FD-halmaz építésére is jó.
  - `is_fdset(S)`: `S` egy korrekt FD-halmaz.
- További, kényelmi szolgáltatások, pl.
  - `fdset_singleton(Set, Elt)`: `Set` az egyetlen `Elt`-ből áll.
  - `fdset_union/3`, `fdset_intersection/3`, `fdset_complement/2`.
  - `fdset_member(Elt, Set)`: `Elt` eleme a `Set` FD-halmaznak.

Példa: `exactly/3` (korábbi `pontosan/3`)

```
exactly(I, Xs, N) :-
    dom_susps(Xs, Susp), fd_global(exactly(I,Xs,N), Xs/N, Susp).

dom_susps([], []).
dom_susps([X|Xs], [dom(X)|Susp]) :- dom_susps(Xs, Susp).

:- multifile clpfd:dispatch_global/4.
clpfd:dispatch_global(exactly(I,_,_), Xs0/N0, Xs/N, Actions) :-
    ex_filter(Xs0, Xs, N0, N, I), length(Xs, M),
    (   N=:=0 -> Actions = [exit|Ps], ex_neq(Xs, I, Ps)
    ;   N=:=M -> Actions = [exit|Ps], ex_eq(Xs, I, Ps)
    ;   N>0, N<M -> Actions = []
    ;   Actions = [fail]
    ).

ex_filter([], [], N, N, _).
ex_filter([X|Xs], Ys, L, N, I) :-
    X==I, !, M is L-1, ex_filter(Xs, Ys, M, N, I).
ex_filter([X|Xs], Ys0, L, N, I) :-
    fd_set(X, Set), fdset_member(I, Set), !,
    Ys0 = [X|Ys], ex_filter(Xs, Ys, L, N, I).
ex_filter([_|Xs], Ys, L, N, I) :- ex_filter(Xs, Ys, L, N, I).

ex_neq(Xs, I, Ps) :- fdset_singleton(Set0, I),
    fdset_complement(Set0, Set), eq_all(Xs, Set, Ps).

ex_eq(Xs, I, Ps) :- fdset_singleton(Set, I), eq_all(Xs, Set, Ps).

eq_all([], _, []).
eq_all([X|Xs], Set, [X in_set Set|Ps]) :- eq_all(Xs, Set, Ps).

| ?- exactly(5,[A,B,C],1), A=5.
      A = 5, B in(inf..4)\/(6..sup), C in(inf..4)\/(6..sup)
| ?- exactly(5,[A,B,C],1), A in 1..2, B in 3..4.
      C = 5, A in 1..2, B in 3..4
```


Összetettebb constraint feladatok

Egy ütemezési alapfeladat

- a rendelkezésre álló erőforrások száma: 13
- az egyes tevékenységek időtartama és erőforrásigénye:

Tevékenység	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7
Időtartam	16	6	13	7	5	18	4
Erőforrásigény	2	9	3	7	10	1	11

A program szövege:

```
:- use_module(library(clpfd)).

schedule(Ss, End) :-
        length(Ss, 7),
        Ds = [16, 6,13, 7, 5,18, 4],
        Rs = [ 2, 9, 3, 7,10, 1,11],
        domain(Ss, 1, 30),
        domain([End], 1, 50),
        after(Ss, Ds, End),
        cumulative(Ss, Ds, Rs, 13),
        labeling([ff,minimize(End)], [End|Ss]).

after([], [], _).
after([S|Ss], [D|Ds], E) :- E #>= S+D, after(Ss, Ds, E).

%% End of file

| ?- schedule(Ss, End).

Ss = [1,17,10,10,5,5,1],
End = 23 ?
```


Utazó ügynök — kombinatorikus constraintek

```
:- module(tsp, [tsp/3]).
:- use_module(library(clpfd)).
:- use_module(library(lists), [append/3]).

tsp(Lab, Successor, Cost) :-
        Successor = [X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7],
        Costs = [C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7],
        element(X1, [0,205,677,581,461,878,345], C1),
        element(X2, [205,0,882,427,390,1105,540], C2),
        element(X3, [677,882,0,619,316,201,470], C3),
        element(X4, [581,427,619,0,412,592,570], C4),
        element(X5, [461,390,316,412,0,517,190], C5),
        element(X6, [878,1105,201,592,517,0,691], C6),
        element(X7, [345,540,470,570,190,691,0], C7),
        sum(Costs, #=, Cost),
        Predecessor = [Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7],
        Costs2 = [D1,D2,D3,D4,D5,D6,D7],
        element(Y1, [0,205,677,581,461,878,345], D1),
        element(Y2, [205,0,882,427,390,1105,540], D2),
        element(Y3, [677,882,0,619,316,201,470], D3),
        element(Y4, [581,427,619,0,412,592,570], D4),
        element(Y5, [461,390,316,412,0,517,190], D5),
        element(Y6, [878,1105,201,592,517,0,691], D6),
        element(Y7, [345,540,470,570,190,691,0], D7),
        sum(Costs2, #=, Cost),
        circuit(Successor, Predecessor),
        append(Successor, Predecessor, All),
        labeling([minimize(Cost)|Lab], All).


| ?- tsp([ff], Succs, Cost).

        Cost = 2276, Succs = [2,4,5,6,7,3,1] ?
```

Esettanulmány: Négyzetdarabolás

A feladat

- Adott egy nagy négyzet oldalhosszúsága, pl: `10`.
- Adottak kis négyzetek oldalhosszúságai, pl `[6,4,4,4,2,2,2,2]` (területösszegük megegyezik a nagy négyzet területével).
- A kis négyzetekkel pontosan le kell fedni a nagyot (meghatározandók a kis négyzetek koordinátái), pl:
  ```
  Xs = [1,7,7,1,5,5,7,9]
  Ys = [1,1,5,7,7,9,9,9]
  Ss = [6,4,4,4,2,2,2,2]
  ```

Próba-adatok

- `10, [6,4,4,4,2,2,2,2]`
- `20, [9,8,8,7,5,4,4,4,4,4,3,3,3,2,2,1,1]`
- `112, [50,42,37,35,33,29,27,25,24,19,18,17,16,15,11, 9,8,7,6,4,2]`
- `175, [81,64,56,55,51,43,39,38,35,33,31,30,29,20,18,16, 14,9,8,5,4,3,2,1]`

Négyzetdarabolás: Prolog megoldás

```
:- use_module(library(lists)).

squares_prolog(Ss, Size, SXYs) :-
        MSize is -Size,
        squares(Ss, [MSize/Size,Size/0], Size, SXYs).

squares([], _, _, [])  :- !.
squares(Ss0, L0, Size, SXYs) :-
        L0=[V0/_|_], Y0 is Size+1+V0,
        hole(L0, 1-Y0, XY, L1, L1T, L2),
        fill_hole(L2, L1T, XY, Size, Ss0, Ss, SXYs1, SXYs),
        squares(Ss, L1, Size, SXYs1).

fill_hole([V0/0,V/H|L], [V1/H|L], _XY, _Size,
                          Ss0, Ss0, SXYs0, SXYs0) :-
        !, V1 is  V0+V.
fill_hole([V/H|L0], [V1/S|L1], X-Y, Size,  Ss0, Ss,
                          SXYs0, [s(S,X,Y)|SXYs]) :-
        MaxS is min(H, Size+1-Y),
        select(S, Ss0, Ss1), S =< MaxS,
        V1 is V+S, MS is -S, H1 is H-S, X1 is X+S,
        fill_hole([MS/H1|L0], L1, X1-Y, Size, Ss1, Ss, SXYs0, SXYs).

hole([V1/0,V2/H|L], XY0, XY, L1, L1T, L2) :-
        !, V is V1+V2,
        hole([V/H|L], XY0, XY, L1, L1T, L2).
hole([V/H1,0/H2|L], XY0, XY, L1, L1T, L2) :-
        !, H is H1+H2,
        hole([V/H|L], XY0, XY, L1, L1T, L2).
hole([V1/H1|L], XY, XY, L1, L1, [V1/H1|L]) :-
        H1 > 0, V1 < 0, L = [V2/_|_], V2>0, !.
hole([VH1,VH2|L], X0-Y0, XY, [VH1|L1], L1T, L2) :-
        VH1=_/H1, VH2=V2/_, X1 is X0+H1, Y1 is Y0+V2,
        hole([VH2|L], X1-Y1, XY, L1, L1T, L2).
```


Négyzetdarabolás: naív `clpfd` megoldás

```
:- use_module(library(clpfd)).

squares_spec(Sizes, Size, Xs, Ys) :-
        generate_coordinates(Xs, Ys, Sizes, Size),
        state_asymmetry(Xs, Ys, Sizes, Size),
        state_no_overlap(Xs, Ys, Sizes),
        labeling([], Xs), labeling([], Ys).

generate_coordinates([], [], [], _).
generate_coordinates([X|Xs], [Y|Ys], [S|Ss], Size) :-
        Sd is Size-S+1, domain([X,Y], 1, Sd),
        generate_coordinates(Xs, Ys, Ss, Size).

state_asymmetry([X|_], [Y|_], [D|_], Limit) :-
        UB is (Limit-D+2)>>1, X in 1..UB, Y #=< X.

state_no_overlap([], [], []).
state_no_overlap([X|Xs], [Y|Ys], [S|Ss]) :-
        state_no_overlap(X, Y, S, Xs, Ys, Ss),
        state_no_overlap(Xs, Ys, Ss).

state_no_overlap(_, _, _, [], [], []).
state_no_overlap(X, Y, S, [X1|Xs], [Y1|Ys], [S1|Ss]) :-
        no_overlap_spec(X, Y, S, X1, Y1, S1),
        state_no_overlap(X, Y, S, Xs, Ys, Ss).

no_overlap_spec(X1, _Y1, S1, X2, _Y2, _S2) :-
        X1+S1 #=< X2.
no_overlap_spec(X1, _Y1, _S1, X2, _Y2, S2) :-
        X2+S2 #=< X1.
no_overlap_spec(_X1, Y1, S1, _X2, Y2, _S2) :-
        Y1+S1 #=< Y2.
no_overlap_spec(_X1, Y1, _S1, _X2, Y2, S2) :-
        Y2+S2 #=< Y1.
```


Négyzetdarabolás: diszjunktív constraintek

A diszjunkció lehetséges megvalósításai

- spekulatív: Prolog választási pontokkal (lásd `squares_spec`).
- reifikáció(számosság)-alapú: a #∨ müvelettel, pl:
  `X1+5 #=< X2 #∨ X2+5 #=< X1.`
- (gyenge) konstruktív diszjunkció:
  `domain([X1,X2], 0, 6), X1+5 #=< X2 ∨ X2+5 #=< X1`
  `X1 in (0..1)∨(5..6), X2 in (0..1)∨(5..6)`
- teljes konstruktív diszjunkció:
  `domain([X,Y], 0, 20), X+Y #= 20, X #=<5 ∨ Y #=< 5.`
  `X in (0..5)∨(15..20), Y in (0..5)∨(15..20)`

Számosság-alapú `no_overlap`

```
no_overlap_card(X1, Y1, S1, X2, Y2, S2) :-
        X1+S1 #=< X2 #<=> B1,
        X2+S2 #=< X1 #<=> B2,
        Y1+S1 #=< Y2 #<=> B3,
        Y2+S2 #=< Y1 #<=> B4,
        B1+B2+B3+B4 #>= 1.
```

Gyenge konstruktív diszjunkción (wcd) alapuló `no_overlap`

```
no_overlap_wcd1(X1, Y1, S1, X2, Y2, S2) :-
  call( abs(2*(X1-X2)+(S1-S2)) #>= S1+S2 #\/
        abs(2*(Y1-Y2)+(S1-S2)) #>= S1+S2 ).
```

```
no_overlap_wcd2(X1, Y1, S1, X2, Y2, S2) +:
  X1 in ((((min(Y1)+S1)..max(Y2))\/((min(Y2)+S2)..max(Y1))) ? (inf..sup))
        \/ ((inf..max(X2)-S1) \/ (min(X2)+S2..sup)),
  X2 in ((((min(Y1)+S1)..max(Y2))\/((min(Y2)+S2)..max(Y1))) ? (inf..sup))
        \/ ((inf..max(X1)-S2) \/ (min(X1)+S1..sup)),
  Y1 in ((((min(X1)+S1)..max(X2))\/((min(X2)+S2)..max(X1))) ? (inf..sup))
        \/ ((inf..max(Y2)-S1) \/ (min(Y2)+S2..sup)),
  Y2 in ((((min(X1)+S1)..max(X2))\/((min(X2)+S2)..max(X1))) ? (inf..sup))
        \/ ((inf..max(Y1)-S2) \/ (min(Y1)+S1..sup)).
```

Négyzetdarabolás: redundáns constraintek 1.

Kapacitás-constraintek

- minden sorban és minden oszlopban vizsgáljuk meg a metszett négyzeteket,
- kössük ki, hogy ezek oldalhossz-összege a nagy négyzet oldalával megegyezik.

A program

```
squares_cap(Sizes, Size, Xs, Ys) :-
        generate_coordinates(Xs, Ys, Sizes, Size),
        state_asymmetry(Xs, Ys, Sizes, Size),
        state_no_overlap(Xs, Ys, Sizes),
        state_capacity(Xs, Sizes, Size),
        state_capacity(Ys, Sizes, Size),
        labeling([], Xs), labeling([], Ys).

state_capacity(Cs, Sizes, Limit) :-
        state_capacity(1, Limit, Cs, Sizes).

state_capacity(Pos, Limit, _, _) :-
        Pos>Limit, !.
state_capacity(Pos, Limit, Cs, Sizes) :-
        accumulate(Cs, Sizes, Pos, Bs),
        scalar_product(Sizes, Bs, #=, Limit),
        Pos1 is Pos+1,
        state_capacity(Pos1, Limit, Cs, Sizes).

accumulate([], [], _, []).
accumulate([C|Cs], [S|Ss], Pos, [B|Bs]) :-
        Crutch is Pos-S+1,
        C in Crutch .. Pos #<=> B,
        accumulate(Cs, Ss, Pos, Bs).
```


Négyzetdarabolás: redundáns constraintek 2.

Kumulativ-constraint

- A négyzetdarabolás tekinthető ütemezési problémának is
- Alkalmazzuk a `cumulative` constraint-et mindkét tengely irányában

A program

```
squares_cum(Sizes, Size, Xs, Ys) :-
        generate_coordinates(Xs, Ys, Sizes, Size),
        state_asymmetry(Xs, Ys, Sizes, Size),
        state_no_overlap(Xs, Ys, Sizes),
        cumulative(Xs, Sizes, Sizes, Size),
        cumulative(Ys, Sizes, Sizes, Size),
        labeling([], Xs), labeling([], Ys).
```


Négyzetdarabolás: speciális cimkézés

A címkézés lényege:

- keressük meg a legkisebb alsó határt,
- sorra próbáljuk a változókat a legkisebb határ-értékkel behelyettesíteni,
- ha egy változóra ez nem sikerül, zárjuk ki az alsó határt a tartományából.

A program

```
squares_dual(Sizes, Size, Xs, Ys) :-
        generate_coordinates(Xs, Ys, Sizes, Size),
        state_no_overlap(Xs, Ys, Sizes),
        state_capacity(Xs, Sizes, Size),
        state_capacity(Ys, Sizes, Size),
        dual_labeling(Xs, 1, Size),
        dual_labeling(Ys, 1, Size).

dual_labeling([], _, _) :- !.
dual_labeling(L, I, Limit) :-
        dual_labeling(L, L1, I, Limit, J),
        dual_labeling(L1, J, Limit).

dual_labeling([], [], _, J, J).
dual_labeling([X|L1], L2, I, J0, J) :-
        (   integer(X) -> dual_labeling(L1, L2, I, J0, J)
        ;   X = I, dual_labeling(L1, L2, I, J0, J)
        ;   X #> I,
            fd_min(X, J1), J2 is min(J0,J1), L2 = [X|L3],
            dual_labeling(L1, L3, I, J2, J)
        ).
```


A négyzetdarabolás megoldásainak összehasonlítása

Futási idő (másodperc) — visszalépések száma

variáns/méret	10		20		112		175	
Prolog!!	0.00	0	6.29	1678	152.63	3.3M		
spec	10.98	34K						
cap+spec	11.00	34K						
spec+dual	11.03	34K						
cap+spec+dual	11.00	34K						
cap+card	0.24	0	1.81	18				
cap+wcd1	0.26	0	1.63	18				
cap+wcd2	0.09	0	0.54	18				
cap+card+dual	0.24	0	1.30	0	20.77	150	29.28	105
cap+wcd1+dual	0.26	0	1.28	0	18.52	150	27.10	105
cap+wcd2+dual	0.09	0	0.46	0	16.43	150	26.89	105
cum+card+dual	0.18	0	1.05	0	6.42	139	5.33	67
cum+wcd1+dual	0.20	0	1.05	0	5.29	139	4.47	67
cum+wcd2+dual	0.04	0	0.22	0	2.71	139	1.93	67
cap+cum+card+dual	0.26	0	1.37	0	13.55	134	14.22	65
cap+cum+wcd1+dual	0.27	0	1.37	0	12.14	134	13.13	65
cap+cum+wcd2+dual	0.11	0	0.54	0	10.05	134	10.96	65

A Mercury nagyhatékonyságú LP megvalósítás – áttekintés

Célok, alapelvek

- Tiszta deklaratív logikai programozás
- Nagy, megbízható, hatékony valódi alkalmazások létrehozásának támogatása
- A programozási munka hatékonyságának növelése

Fő tulajdonságok

- erős polimorfikus típus-rendszer

```
:- type tree(K,V) --> empty ; node(K,V,tree(K,V),tree(K,V)).
:- pred lookup(tree(K, V), K, V).
```

- erős mód-rendszer (argumentumok be- és kimenő voltának jelzése)
- erős determinizmus-rendszer

```
:- mode lookup(in, in, out) is semidet.
```

- modul-rendszer
- magasabbrendű szerkezetek (`solutions` hasonló `bagof`-hoz)
- teljesen deklaratív (még a be- és kivitel is)

Szintaktikus eltérések a Prologhoz képest:

- új klózfajta: függvény-definíció
- eltérő lezxikai elemek SICStus-hoz képest:
  - karakterek jelölése: 1-betűs nevek
  - string: külön adattípus (nem kódok listája)
- új operátorfajták: `fxx, fxy, fyx`.

Deklarációk

- típusokkal kapcsolatosak: `type, pred, func`
- módokkal kapcsolatosak: `inst, mode`
- modulokkal kapcsolatosak: `module, interface, implementation, import_module, external, end_module`
- a fordítóprogram vezérlése: `pragma`

Klózok

- függvény-tényállítás alakja: *Head* `=` *Result*
- tényállítás: term, amelynek funktora nem `:-/1, :-/2, ->/2, =/2`
- függvény-szabály alakja: *Head* `=` *Result* `:-` *Body*
- szabály alakja: *Head* `:-` *Body* vagy DCG: *Head* `->` *Body*
- korábbi `func` vagy ă`pred` deklaráció kell vonatkozzék ra.

Célok

- `some` *Vars Goal* — egzisztenciális kvantor;
- `any` *Vars Goal* — univerzális kvantor ≡ `not (some` *Vars*`, not` *Goal*);
- `call(`*Closure*`)`, `call(`*Closure, Arg1*`)`, `call(`*Closure, Arg1, Arg2*`)`, ... — magasabbrendű hívások;
- *CondGoal* `->` *ThenGoal* `;` *ElseGoal* — if-then-else (kötelező else!);
- diszjunkció, konjunkció, `true, fail`, negáció (`not` vagy `\+`) — a szokásos;
- *Goal1* `=>` *Goal2* — implikáció, azonos a `not (`*Goal1*`, not` *Goal2*) céllal;
- `<=, <=>` — hasonló értelemben;
- *Term1* `=` *Term2*, *Term1* `\=` *Term2* — egyenlő, ill. nem-egyenlő;
- minden más cél egy predikátum meghívása.

Típusok

Beépített típusok

- primitív típusok: `character, int, float, string`
- magasabbrendű típusok: `pred, pred(T), pred(T1, T2), ...` `func(T1) = T, func(T1, T2) = T, ...`
- univerzális típus: `univ`
- további könyvtári típusok, pl `list(T), pair(T1,T2), ...` , `io__state` (világ-állapot)

Definiált típusok

- Megkülönböztetett únió:
  <úniótípus> ::= `:- type` <típusazonosító> `-->` <típustörzs>
  <típustörzs> ::= <konstruktor> ; ...
  <konstruktor> ::= <név> | <rekordnév>(<típusazonosító>, ...)
  <típusazonosító> ::= <név> | <név>(<változó>,...)
- típusátnevezés:
  <típusátnevezés> ::= `:- type` <típusazonosító> == <típusazonosító>
- absztrakt típus:
  <absztrakt típus> ::= `:- type` <típusazonosító>

Predikátum- és függvénydeklarációk

- predikátumdeklaráció: `:- pred` <elj>`(`<típusazonosító>`, ...).`
- függvénydeklaráció:
  `:- function` <f>`(`<típusazonosító>`, ...) =` <típusazonosító>

Példák Mercury típusokra

Megkülönböztetett úniók

```
:- type gyumolcs --> alma ; korte; szilva.
    % egy gyümölcs a fenti három atom valamelyike.

:- type szemely --> szemely(string, string, int).
    % olyan három-argumentumú struktúra amelynek
    % elso4 két argumentuma string, a harmadik egész.

:- type list(T) -->   []
        ;              [T|list(T)].

:- type pair(T1, T2) --> T1 - T2.
    % egy olyan '-' nevu4 kétargumentumú struktúra,
    % amelynek argumentumai T1 ill. T2 típusúak
```

Típusátnevezések

```
:- type assoc_list(KeyType, ValueType)
          == list(pair(KeyType, ValueType)).

:- type szotar == assoc_list(magyar, angol).
:- type magyar == string.
:- type angol == string.
```

Absztrakt típusok

```
:- type titkos.
:- type titkos1(T1, T2)
```

Predikátum-deklarációk

```
:- pred member(T, list(T)).
:- func length(list(T)) = int.
```

Módok

Behelyettesítettségi állapot (intantiatedness)

- egy argumentumról elmondja, hogy mely részei üresek és melyek behelyettesítettek
- építőkövek: `free`, `bound( ... ; ... )`, `ground`
- példa: `:- inst listskel = bound( [] ; [free | listskel] ).`

Módok deklarálása

- új mód: `:- mode m :: inst1 -> inst2`
- átnevezés: `:- mode m1 :: m2`
- például: `:- mode in :: ground -> ground.`
  `:- mode out :: free -> ground.`
  `:- mode (+) :: in. :- mode (-) :: out.`

Paraméteres mód- és inst-deklarációk

```
:- inst listskel(Inst) = bound( [] ; [Inst|listskel(Inst)] ).
:- mode m :: listskel(listskel(free)) -> ground.
:- mode in(Inst) :: Inst -> Inst.
:- mode out(Inst) :: free -> Inst.
```

Predikátumok és függvények módjának deklarálása

```
:- func length(list(T)) = int.
:- mode length(in(listskel)) = out.
:- mode length(out(listskel)) = in.

:- pred append(list(T), list(T), list(T)).
:- mode append(in, in, out).
:- mode append(out, out, in).
```

Korlátozások

- Változók összekapcsolása nincs megengedve, pl. ez hibás:
  `:- mode append(in(listskel), in(listskel), out(listskel)).`
- A jelenlegi val1tozat csak `ground` és `free` inst-eket kezel.

Determinizmus

Minden egyes predikátum/függvény-módhoz egy determinizmust rendelünk

	Maximum number of solutions		
Can fail?	0	1	> 1
no	erroneous	det	multi
yes	failure	semidet	nondet

Példák

```
:- pred append(list(T), list(T), list(T)).
:- mode append(in, in, out) is det.
:- mode append(out, out, in) is multi.
:- mode append(in, in, in) is semidet.

:- func length(list(T)) = int.
:- mode length(in) = out is det.
:- mode length(in(list_skel)) = out is det.
:- mode length(in) = in is semidet.
```

Összevont predikátumdeklarációk

- ha csak egy mód van
- a mód és determinizmus a `pred` deklarációban is megadható
- `:- pred append(list(T)::in, list(T)::in, list(T)::out) is det.`

CC (committed choice) nemdeterminizmus

- olyan választási pont, amelyre sosem lépünk vissza
- például: `main/2`, vagy egy kimenő változók nélküli cél
- két új determinizmus: `cc_multi, cc_nondet`

További lehetőségek

Egyedi módok

- egyedi inst-ek: `unique, unique(...)`, olyan mint `ground` és `bound(...)`, de csak egyszer hivatkozunk rá
- `dead`: olyan érték, amire nincs több hivatkozás
- Ezekre épülö szabványos módok:

```
:- mode uo :: free -> unique.    % unique output
:- mode ui :: unique -> unique.  % unique input
:- mode di :: unique -> dead.    % destructive input
```

- ha visszalépéskor kell az érték, akkor `mostly_unique` ill. `mostly_dead` (nincs megvalósítva).

Magasabbrendű programozás

- Legyen a `sum` deklarációja:

```
:- pred sum(list(int), int).
:- mode sum(in, out) is det.
```

  Ekkor a következők ekvivalensek:

```
X = lambda([List::in, Length::out] is det, sum(List, Length))
Y = (pred(List::in, Length::out) is det :- sum(List, Length))
Z = sum
```

- Az `X, Y, Z` változók típusa: `pred(list(int), int)`
- Currying: `Sum123 = sum([1,2,3])` típusa `pred(int)`.
- Magasabbrendű predikátumok meghívása: `call/1,2,3...`
- Fontos könyvtári eljárás (vö: `bagof/3`):

```
:- pred solutions(pred(T), list(T)).
:- mode solutions(pred(out) is nondet, out) is det.
```

- `pred(out) is nondet` — ez egy magasabbrendű mód.

Modulok

A modulok szerkezete

```
:- module <név>.
:- interface.
<látható rész>
:- implementation.
<lokális definíciók>
:- end_module <név>.
```

Az indítási pont

- `:- pred main(io__state::di, io__state::uo) is` <det>
- ahol <det> `det` vagy `cc_multi`

Példa absztrakt adattípusra

```
:- module stack.
:- interface.
:- type stack(T).     % absztrakt adattípus

:- func empty_stack = stack(T).
:- func push(stack(T), T) = stack(T).
:- pred pop(stack(T)::in, T::out, stack(T)::out) is semidet.

:- implementation.
:- import_module list.
:- type stack(T) == list(T).

empty_stack = [].
push(Xs, X) = [X|Xs].
pop([X|Xs], X, Xs).

:- end_module stack.
```