Nagyhatékonyságú logikai programozás

Jegyzetek a BME informatikus hallgatói számára

Szeredi Péter, Benkő Tamás

Számítástudományi
és Információelméleti Tanszék

IQSOFT Rt.

`{szeredi,benko}@iqsoft.hu`

- Prolog háttér
- A CLP (Constraint Logic Programming) áttekintése
- A SICStus `clpq/r` könyvtárai
- A SICStus `clpb` könyvtára
- A SICStus `clpfd` könyvtára
- A SICStus `chr` könyvtára
- A Mercury programozási nyelv

Budapest 2000 szeptember

Prolog háttér: haladó vezérlés lehetőségek

Fejlett vezérlési lehetőségek SICStusban: Blokk-deklarációk

```
:- block p(-, ?, -, ?, ?).
```

Jelentése: ha az első és a harmadik argumentum is behelyettesítetlen változó (blokkolási feltétel), akkor a `p` hívás felfüggesztődik.

Ugyanarra az eljárásra több vagylagos feltétel is szerepelhet, pl.

```
:- block p(-, ?), p(?, -).
```

Végtelen választási pontok kiküszöbölése blokk-deklarációval

```
:- block append(-, ?, -).

append([], L, L).
append([X|L1], L2, [X|L3]) :-
    append(L1, L2, L3).
```

Generál-és-ellenőriz típusú programok gyorsítása

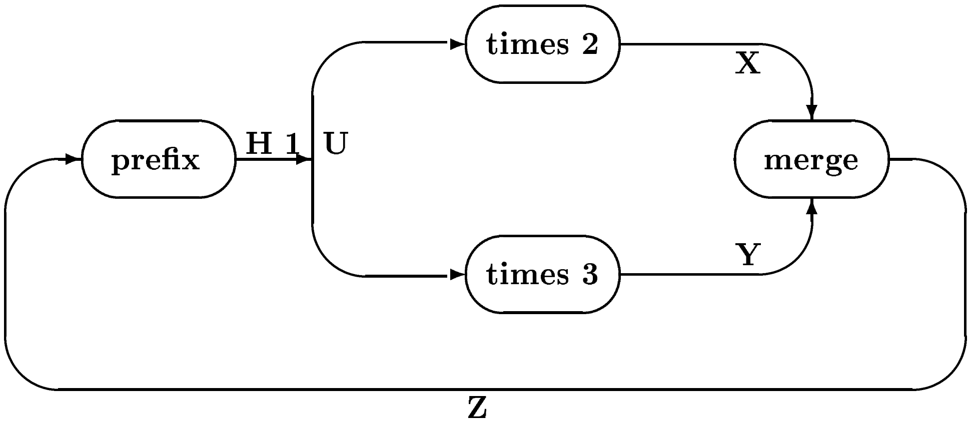
- általában nem hatékonyak (pl megrajzolja_1), mert túl sok visszalépést használnak
- korutinszervezéssel a generáló és ellenőrző rész „automatikusan” összefésülhető
- ehhez az ellenőrző részt kell előre tenni és megfelelően blokkolni

Korutinszervezésre épülő programok

Példa: egyszerűsített Hamming feladat

- keressük a $2^i * 3^j (i \geq 1, j \geq 1)$ alakú számok közül az első `N` darabot nagyság szerint rendezve.
- „stream-and-parallelism” közelítésmódot használva korutinszervezéssel egyszerűen lehet megoldani

Prolog háttér: a Hamming probléma




```
% A H lista az első N, csak a 2 és 3 tényezőkből álló szám.
hamming(N, H) :-
     U = [1|H], times(U, 2, X), times(U, 3, Y),
     merge(X, Y, Z), prefix(N, Z, H).

% times(X, M, Z): A Z lista az X elemeinek M-szerese
:- block times(-, ?, ?).
times([A|X], M, Z) :-
     B is M*A, Z = [B|U], times(X, M, U).
times([], _, []).

% merge(X, Y, Z): Z az X és Y összefésülése.
:- block merge(-, ?, ?), merge(?, -, ?).
% Csak akkor fusson, ha az első két argumentum ismert
merge([A|X], [B|Y], V) :-
     A < B, !, V = [A|Z], merge(X, [B|Y], Z).
merge([A|X], [B|Y], V) :-
     B < A, !, V = [B|Z], merge([A|X], Y, Z).
merge([A|X], [A|Y], [A|Z]) :- merge(X, Y, Z).
merge([], X, X) :- !.
merge(_, [], []).

% prefix(N, X, Y): Az X lista első N eleme Y.
prefix(0, _, []) :- !.
prefix(N, [A|X], [A|Y]) :-
     N > 0, N1 is N-1, prefix(N1, X, Y).
```

Prolog háttér: korutinszervező eljárások

`freeze(X, Hivas)`
`Hivas`t felfüggeszti mindaddig, amíg `X` behelyettesítetlen változó.

`frozen(X, Hivas)`
Az `X` változó miatt felfüggesztett hívás(oka)t egyesíti `Hivas`-sal.

`dif(X, Y)`
`X` és `Y` nem egyesíthető. Mindaddig felfüggesztődik, amíg ez el nem dönthető.

`call_residue(Hivas, Maradék)`
`Hivas`-t végrehajtja, és ha a sikeres lefutás után maradnak felfüggesztett hívások, akkor azokat visszaadja `Maradékban`. Pl.

```
| ?- call_residue(dif(X, f(Y)), Maradek).

Maradek = [[X]-(prolog:dif(X,f(Y)))] ?

yes
| ?- call_residue((dif(X, f(Y)), X=f(Z)), Maradek).

X = f(Z),
Maradek = [[Y,Z]-(prolog:dif(f(Z),f(Y)))] ?

yes
```

Prolog háttér: kifejezések testreszabott kiírása

`print/1`
Alapértelmezésben azonos `write`-tal. Ha a felhasználó definiál egy `portray/1` eljárást, akkor a rendszer minden a `print`-tel kinyomtatandó részkifejezésre meghívja `portray`-t. Ennek sikere esetén feltételezi, hogy a kiírás megtörtént, meghiúsulás esetén maga írja ki a részkifejezést.
A rendszer a `print` eljárást használja a változó-behelyettesítések és a nyomkövetés kiírására!

`portray/1`
Igaz, ha `Kif` kifejezést a Prolog rendszernek nem kell kiírnia. Alkalmas formában kiírja a `Kif` kifejezést.
Ez egy felhasználó által definiálandó (*kampó*) eljárás (hook predicate).

```
portray(Matrix) :-
     Matrix = [[_|_]|_],
     (   member(Row, Matrix), nl, print(Row), fail
     ;   true
     ).

| ?- X = [[1,2,3],[4,5,6]].
X =
[1,2,3]
[4,5,6] ?
```

A CLP alapgondolata

A CLP($\mathcal{X}$) séma

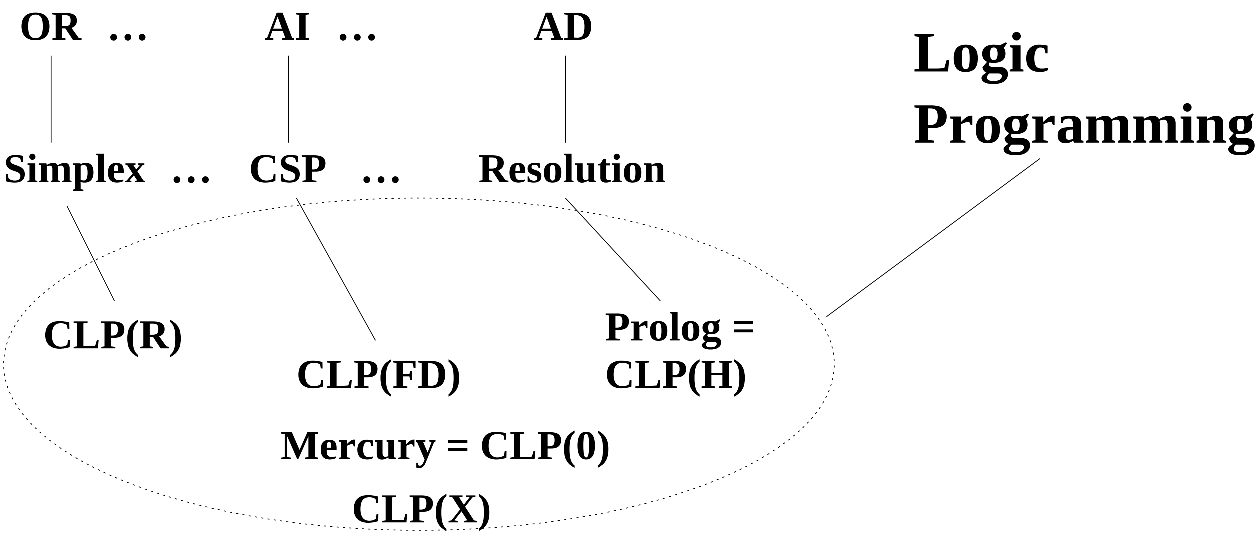
Prolog + egy valamilyen $\mathcal{X}$ adattartományra és azon értelmezett korlátokra (relációkra) vonatkozó „erős” következtetési mechanizmus.

Példák az $\mathcal{X}$ tartomány megválasztására

$\mathcal{X}$ = Q vagy R (a racionális vagy valós számok)
korlátok = lineáris egyenlőségek és egyenlőtlenségek
következtetési mechanizmus = Gauß elimináció és szimplex módszer

$\mathcal{X}$ = FD (egész számok Véges Tartománya, angolul FD — Finite Domain)
korlátok = különféle aritmetikai és kombinatorikus relációk
következtetési mechanizmus = MI CSP–módszerek (CSP = Korlát-Kielégítési Probléma)

$\mathcal{X}$ = B (0 és 1 Boole értékek)
korlátok = ítéletkalkulusbeli relációk
következtetési mechanizmus = MI SAT-módszerek (SAT — Boole kielégíthetőség)



„A CLP a lopás tudománya.”
(Mats Carlsson, SICS)

Példa: A SICStus `clpq` könyvtára

A Prologba ágyazás szintaxisa:

{*Korlát*} a *Korlát* felvétele

Példafutás

```
| ?- use_module(library(clpq)).
{loading .../library/clpq.ql...}
...

| ?- {X=Y+4, Y=Z-1, Z=2*X-9}.            % lineáris egyenlet
X = 6, Y = 2, Z = 3 ?

| ?- {X+Y+9<4*Z, 2*X=Y+2, 2*X+4*Z=36}.  % egyenlőtlenség is lehet
{X<29/5}, {Y= -2+2*X}, {Z=9-1/2*X} ?

| ?- {(Y+X)*(X+Y)/X = Y*Y/X+100}.       % lineárissá egyszerűsíthető
{X=100-2*Y} ?

| ?- {(Y+X)*(X+Y) = Y*Y+100*X}.         % így már nem...
clpq:{2*(X*Y)-100*X+X^2=0} ?

| ?- {exp(X+Y+1,2) = 3*X*X+Y*Y}.        % nem lineáris...
clpq:{1+2*X+2*(Y*X)-2*X^2+2*Y=0} ?

| ?- {exp(X+Y+1,2) = 3*X*X+Y*Y}, X=Y.   % így már igen...
X = -1/4, Y = -1/4 ?

| ?- {2 = exp(8, X)}.                   % nem-lineárisak is
                                        % megoldhatók
X = 1/3 ?
```

A CLP($\mathcal{X}$) séma megvalósítási elvei

A korlát-tár

- *konzisztens* korlátok halmaza (konjunkciója)
- elemei az ún. primitív korlátok (a megengedett korlátok egy részhalmaza)
- az előremenő végrehajtás során a tár csak bővülhet (pontosabb lehet)
- ha a tár inkonzisztenssé válna, visszalépés történik (és a tár is visszaáll)
- a nem-primitív korlátok ágensként (démonként) várakoznak arra, hogy:
  a. primitív korláttá váljanak
  b. a tárat egy primitív korláttal bővíthessék (az ún. erősítés)

Példa várakozó ágensre

```
| ?- {X =< Y}, {X*(Y+1) > X*X+Z},
       (   Z = X*(Y-X), {Y < 0}
       ;   Y = X
       ).
                        Y = X,  {X-Z>0} ? ; no
```

A végrehajtás részletei

```
| ?- {X =< Y}, {X*(Y+1) > X*X+Z}.
                        {X-Y=<0}, clpq:{Z-X-Y*X+X^2<0} ?

| ?- {X =< Y}, {X*(Y+1) > X*X+Z}, Z = X*(Y-X).
                        Z = X*(Y-X), {X-Y=<0}, {X>0} ?

| ?- {X =< Y}, {X*(Y+1) > X*X+Z}, Z = X*(Y-X), {Y < 0}.
                        no

| ?- {X =< Y}, {X*(Y+1) > X*X+Z}, Y = X.
                        Y = X, {X-Z>0} ?
```

CLP rendszerek a nagyvilágban

Néhány implementáció

- clp(R) — az első CLP(X) rendszer (Monash Univ, Australia, IBM Yorktown Heights és CMU)
- CHIP — FD, Q és B (ECRC, München, Cosytec, Franciao.); CHARME (Bull); Decision Power (ICL)
- Prolog III, Prolog IV (PrologIA, Marseille), Q (nem-lineáris is), B, FD, listák, intervallumok
- ILOG solver (ILOG, Franciao.) — C++ könyvtár: R (nem-lineáris is), FD, halmazok
- SICStus Prolog (SICS, Svédo.) — R/Q, FD, B, CHR
- GNU Prolog (INRIA, Franciao.) — FD (C-re fordít)
- Oz (DFKI, Németo.) — constraint alapú elosztott funkcionális nyelv.

Kommerciális rendszerek (a fentiek között)

- ILOG, CHIP, Prolog III–IV, SICStus
- a szakma óriása: ILOG
  - szakterület: CLP + vizualizációs eszközök + szabályalapú eszközök
  - felvásárolta az egyik vezető operációkutatási céget, a CPLEX-et
  - 400 munkatárs 7 országban
  - 55M USD éves bevétel
  - NASDAQ-on jegyzett

Mire használják a CLP rendszereket

Ipari erőforrás optimalizálás

- termék- és gépkonfiguráció
- gyártásütemezés
- emberi erőforrások ütemezése
- logisztikai tervezés

Közlekedés, szállítás

- repülőtéri allokációs feladatok (beszállókapu, poggyász-szalag stb.)
- repülő-személyzet járatokhoz rendelése
- menetrendkészítés
- forgalomtervezés

Távközlés, elektronika

- GSM átjátszók frekvencia-kiosztása
- lokális mobiltelefon-hálózat tervezése
- áramkörtervezés és verifikálás

Egyéb

- szabászati alkalmazások
- grafikus megjelenítés megtervezése
- multimédia szinkronizáció
- légifelvételek elemzése

A SICStus clp(Q,R) kiterjesztései

A `clpq/clpr` könyvtárak

- Tartomány:
  - `clpr`: lebegőpontos számok
  - `clpq`: racionális számok
- Függvények:

  `+ - * / min max pow exp` (kétargumentumúak),

  `+ - abs sin cos tan` (egyargumentumúak).
- Constraint-relációk:

  `=, =:=, <, >, =<, >=, =\=`
- Primitív constraint-ek (constraint tár elemei):

  lineáris kifejezéseket tartalmazó relációk
- Constraint-megoldó algoritmus:

  lineáris programozási módszerek: Gauss elimináció, szimplex módszer

A könyvtár betöltése:

- `use_module(library(clpq))`, vagy
- `use_module(library(clpr))`

A fő beépített eljárás

- `{` *Constraint* `}` , ahol *Constraint* változókból és (egész vagy lebegőpontos) számokból a fenti műveletekkel felépített reláció, vagy ilyen relációknak a (`,` operátorral képzett) konjunkciója.

Egy összetettebb példa: hiteltörlesztés

```
| ?- [user].
% Hiteltörlesztés számítása: P összegű hitelt
% Time hónapon át évi IntRate kamat mellett havi MP
% részletekben törlesztve Bal a maradványösszeg.
| mortgage(P, Time, IntRate, Bal, MP):-
     {Time > 0, Time =< 1,
     Bal = P*(1+Time*IntRate/1200)-Time*MP}.
| mortgage(P, Time, IntRate, Bal, MP):-
     {Time > 1},
     mortgage(P*(1+IntRate/1200)-MP, Time-1, IntRate, Bal, MP).
| {user consulted, 20 msec 160 bytes}


| ?- mortgage(100000,180,12,0,MP).      % 100000 Ft hitelt 180
                                        % hónap alatt törleszt 12%-os
                                        % kamatra, mi a havi részlet?
MP = 1200.1681 ?

| ?- mortgage(P,180,12,0,1200).         % ugyanez visszafelé

P = 99985.9968 ?

| ?- mortgage(100000,Time,12,0,1300).   % 1300 Ft a törlesztőrészlet,
                                        % mi a törlesztési idő?
Time = 147.3645 ?

| ?- mortgage(P,180,12,Bal,MP).

{MP=0.0120*P-0.0020*Bal} ?

| ?- mortgage(P,180,12,Bal,MP), ordering([P,Bal,MP]).

{P=0.1668*Bal+83.3217*MP} ?
```

További könyvtári eljárások

`entailed(Constraint)` — `Constraint` levezethető a jelenlegi tárból.

`inf(Kif, Inf)` ill. `sup(Kif, Sup)` — kiszámolja `Kif` infímumát ill. szuprémumát, és egyesíti `Inf`-fel ill. `Sup`-pal. Példa:

```
| ?- { 2*X+Y =< 16, X+2*Y =< 11, X+3*Y =< 15, Z = 30*X+50*Y
     }, sup(Z, Sup).

Sup = 310, {Z=30*X+50*Y}, {X+1/2*Y=<8}, {X+3*Y=<15}, {X+2*Y=<11}
```

`minimize(Kif)` ill. `maximize(Kif)` — kiszámolja `Kif` infimumát ill. szuprémumát, és egyenlővé teszi `Kif`-fel. Példa:

```
| ?- { 2*X+Y =< 16, X+2*Y =< 11, X+3*Y =< 15, Z = 30*X+50*Y
     }, maximize(Z).

X = 7, Y = 2, Z = 310
```

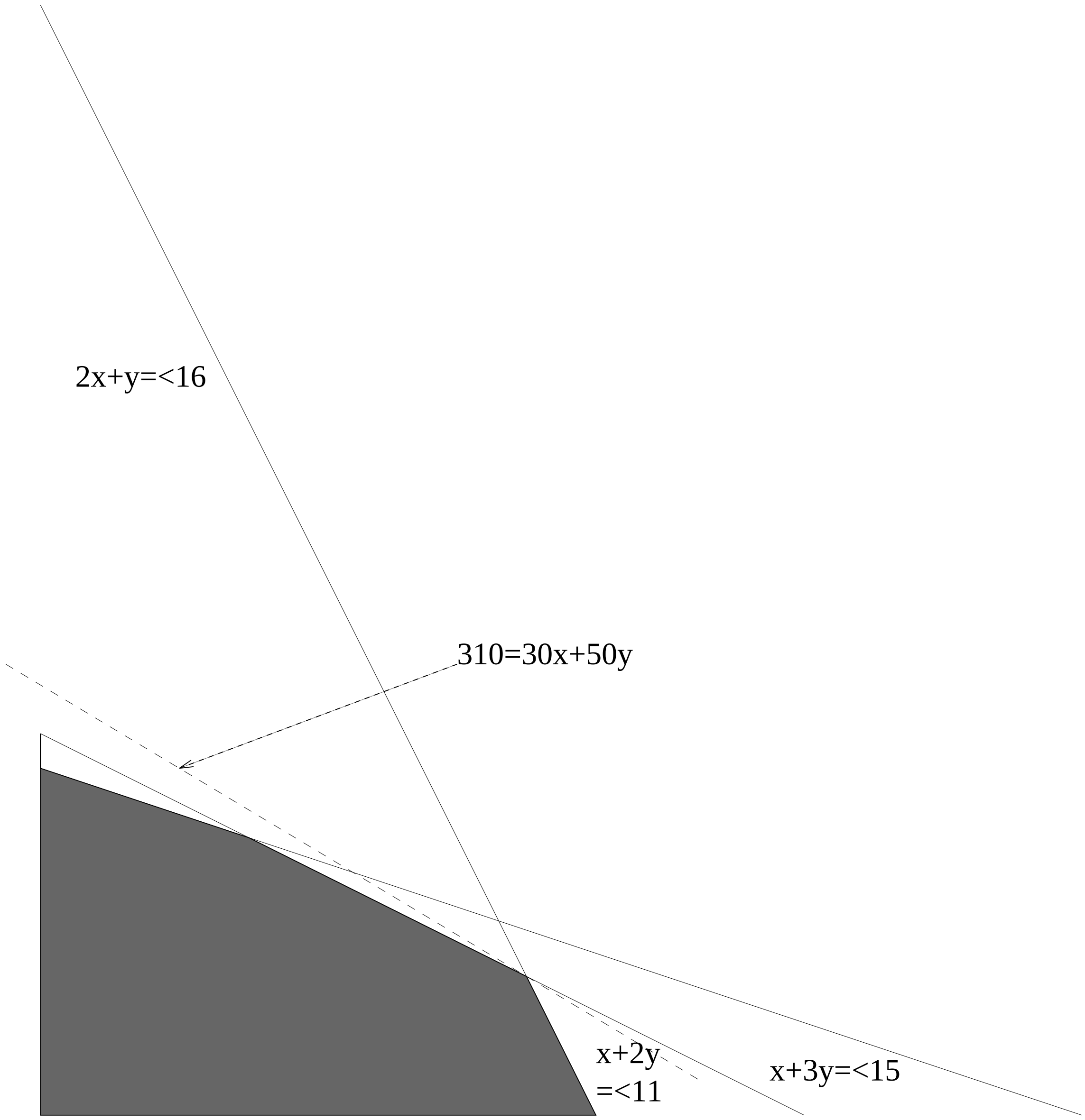
`bb_inf(Egészek, Kif, Inf)` — kiszámolja `Kif` infimumát, azzal a további feltétellel, hogy az Egészek listában levő minden változó egész (ún. „Mixed Integer Optimisation Problem”).

```
| ?- {X >= 0.5, Y >= 0.5}, inf(X+Y, I).

I = 1, {Y>=1/2}, {X>=1/2} ?

| ?- {X >= 0.5, Y >= 0.5}, bb_inf([X,Y], X+Y, I).

I = 2, {X>=1/2}, {Y>=1/2} ?
```

`ordering(V1 < V2)` — A `V1` változó előbb szerepeljen az eredmény-constraintben mint a `V2` változó.

`ordering([V1,V2,...])` — `V1, ...` ebben a sorrendben szerepeljen az eredmény-constraintben.

Szélsőérték-számítás grafikus illusztrálása




```
| ?- { 2*X+Y =< 16, X+2*Y =< 11, X+3*Y =< 15, Z = 30*X+50*Y
     }, sup(Z, Sup).

Sup = 310, {Z=30*X+50*Y}, {X+1/2*Y=<8}, {X+3*Y=<15}, {X+2*Y=<11}
```

További részletek

Projekció

```
% Az (X,Y) pont az (1,2) (1,4) (2,4) pontok
% által kifeszített háromszögben van.
hszogben(X,Y) :-
        { X=1*L1+1*L2+2*L3,
          Y=2*L1+4*L2+4*L3,
          L1+L2+L3=1, L1>=0, L2>=0, L3>=0 }.

| ?- hszogben(X,Y).
                     {Y=<4}, {X>=1}, {X-1/2*Y=<0} ?

| ?- hszogben(_, Y).
                     {Y=<4}, {Y>=2} ?

| ?- hszogben(X, _).
                     {X>=1}, {X=<2} ?
```

Belső ábrázolás

`clpr` — lebegőpontos szám; `clpq` —- `rat(`*Számláló*`,` *Nevező*`)`, ahol *Számláló* és *Nevező* relatív prímek. Például `clpq`-ban:

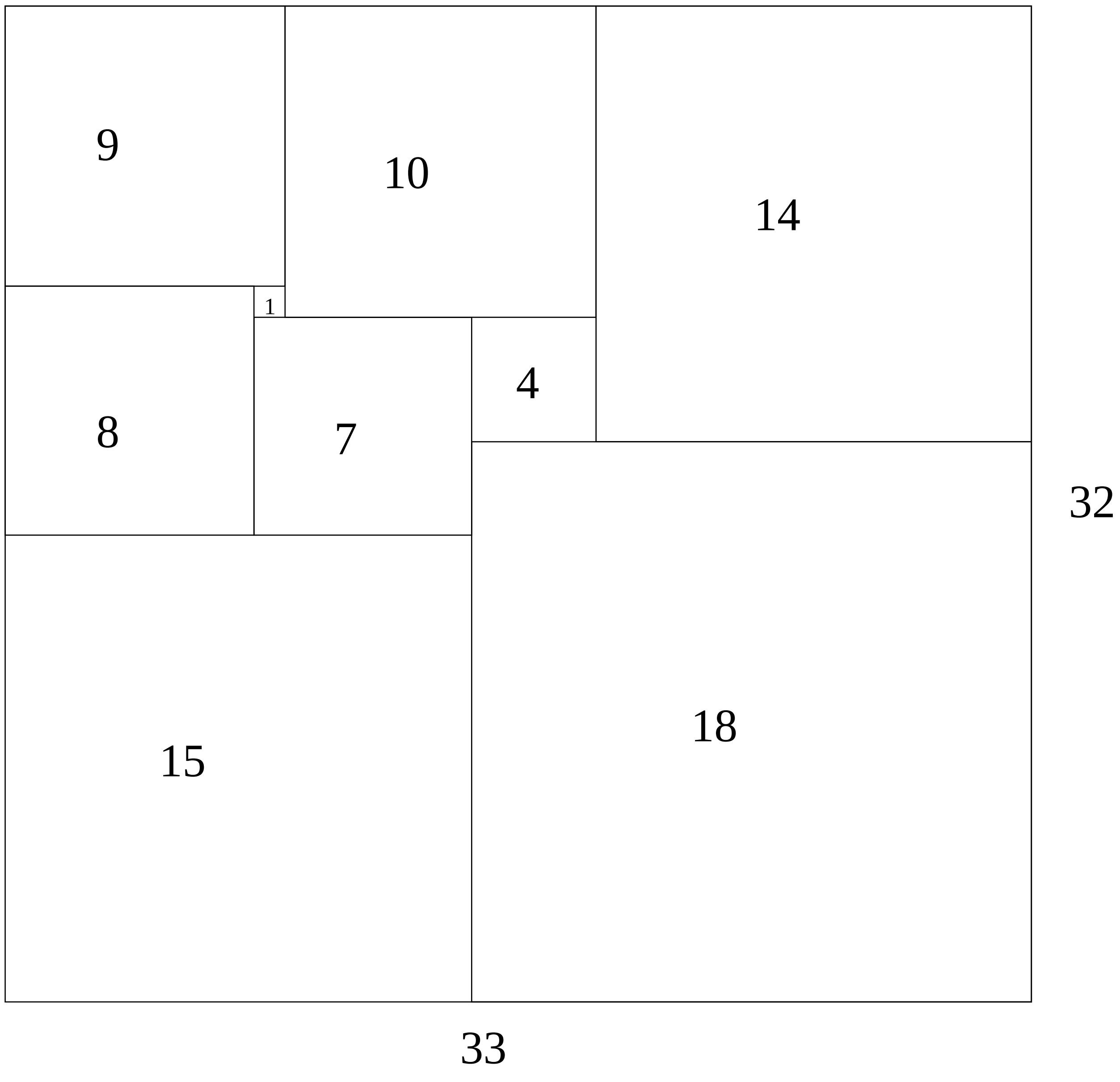
```
| ?- {X=0.5}, X=0.5.
no
| ?- {X=0.5}, X=1/2.
no
| ?- {X=0.5}, X=rat(2,4).
no
| ?- {X=0.5}, X=rat(1,2).
X = 1/2 ?
| ?- {X=5}, X=5.
no
| ?- {X=5}, X=rat(5,1).
X = 5 ?
```

Egy nagyobb CLP(Q) feladat: Tökéletes téglalapok

A feladat

- egy olyan téglalap keresése
- amely kirakható páronként különböző oldalú négyzetekből

Egy megoldás
(a legkevesebb, 9 darab négyzet felhasználásával)



Tökéletes téglalapok — CLP(Q) megoldás

```
% Rectangle 1 x Width is covered by distinct squares of size Ss.
filled_rectangle(Width, Ss) :-
  { Width >= 1 }, distinct_squares(Ss),
  filled_hole([-1,Width,1], _, Ss, []).

distinct_squares([]).
distinct_squares([S|Ss]) :-
  { S > 0 }, outof(Ss, S), distinct_squares(Ss).

outof([],     _).
outof([S|Ss], S0) :- { S =\= S0 }, outof(Ss, S0).

% filled_hole(L0, L, Ss0, Ss): Hole in line L0
% filled with squares Ss0-Ss (diff list) gives line L.
% Def: h(L): sum of lengths of vertical lines in L.
% Pre: All elements of L0 except the first >= 0.
% Post: All elems in L >=0, h(L0) = h(L).
filled_hole(L, L, Ss, Ss) :-
  L = [V|_], {V >= 0}.
filled_hole([V|HL], L, [S|Ss0], Ss) :-
  { V < 0 }, placed_square(S, HL, L1),
  filled_hole(L1, L2, Ss0, Ss1), { V1=V+S },
  filled_hole([V1,S|L2], L, Ss1, Ss).

% placed_square(S, HL, L): placing a square on
% HL horizontal line gives (vertical) line L.
% Pre: all elems in HL >=0
% Post: all in L except first >=0, h(L) = h(HL)-S.
placed_square(S, [H,V,H1|L], L1) :-
  { S > H, V=0, H2=H+H1 },
  placed_square(S, [H2|L], L1).
placed_square(S, [S,V|L], [X|L]) :-
  { X=V-S }.
placed_square(S, [H|L], [X,Y|L]) :-
  { S < H, X= -S, Y=H-S }.
```

Tökéletes téglalapok: példafutás

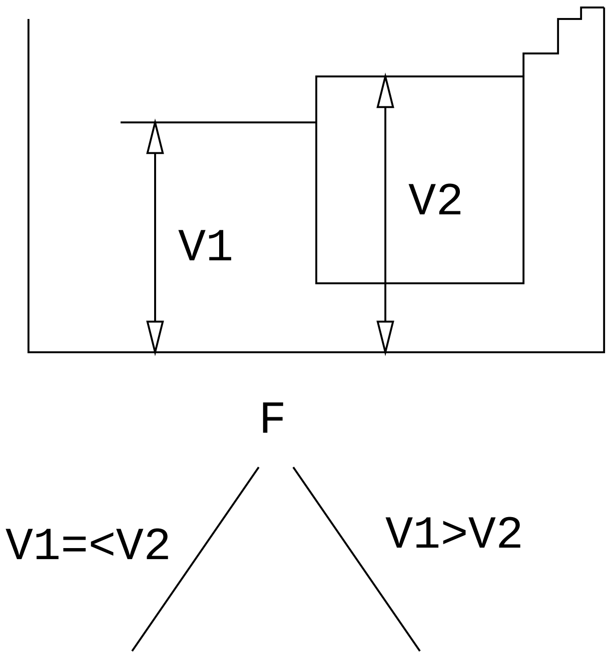
```
% 200 MHz Pentium
| ?-   length(Ss, N), N > 1, statistics(runtime, _),
   filled_rectangle(Width, Ss),
   statistics(runtime, [_,MSec]).

N = 9, MSec = 28800, Width = 33/32,
Ss = [15/32,9/16,1/4,7/32,1/8,7/16,1/32,5/16,9/32] ? ;

N = 9, MSec = 3590, Width = 69/61,
Ss = [33/61,36/61,28/61,5/61,2/61,9/61,25/61,7/61,16/61] ? ;

N = 9, MSec = 39260, Width = 33/32,
Ss = [9/16,15/32,7/32,1/4,7/16,1/8,5/16,1/32,9/32] ?
```

Az `outof` hívás kihagyásával kapott eredmények

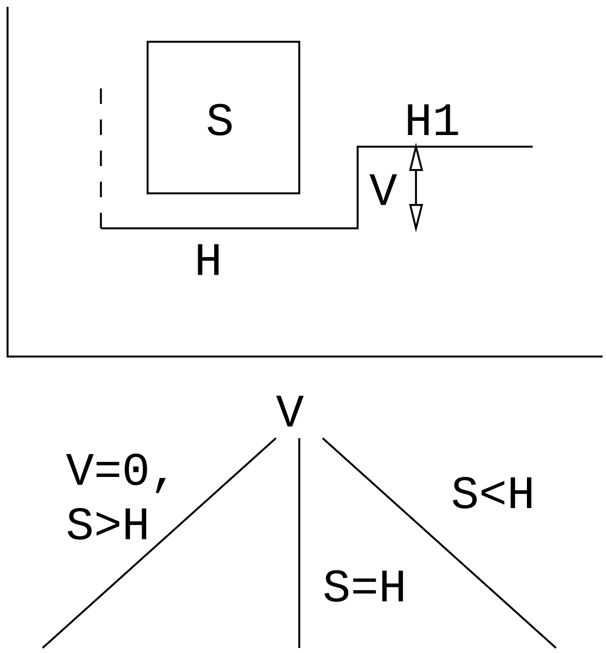
```
| ?- filled_rectangle(W, Ss).
W =   1, Ss = [  1]
W =   2, Ss = [  1,  1]
W = 3/2, Ss = [1/2,  1,1/2]
W = 3/2, Ss = [  1,1/2,1/2]
W =   3, Ss = [  1,  1,  1]
W = 4/3, Ss = [1/3,  1,1/3,1/3]
W =   1, Ss = [1/2,1/2,1/2,1/2]
W = 5/3, Ss = [2/3,  1,1/3,1/3]
W = 4/3, Ss = [  1,1/3,1/3,1/3]
W = 5/3, Ss = [  1,2/3,1/3,1/3]
W = 5/3, Ss = [1/3,1/3,  1,2/3]
W = 5/2, Ss = [1/2,  1,  1,1/2]
W = 5/3, Ss = [  1,1/3,1/3,2/3]
W = 5/2, Ss = [  1,1/2,  1,1/2]
W = 5/2, Ss = [  1,  1,1/2,1/2]
W =   4, Ss = [  1,  1,  1,  1]
W = 5/4, Ss = [1/4,  1,1/4,1/4,1/4]
....
```

Tökéletes téglalapok: választási pontok

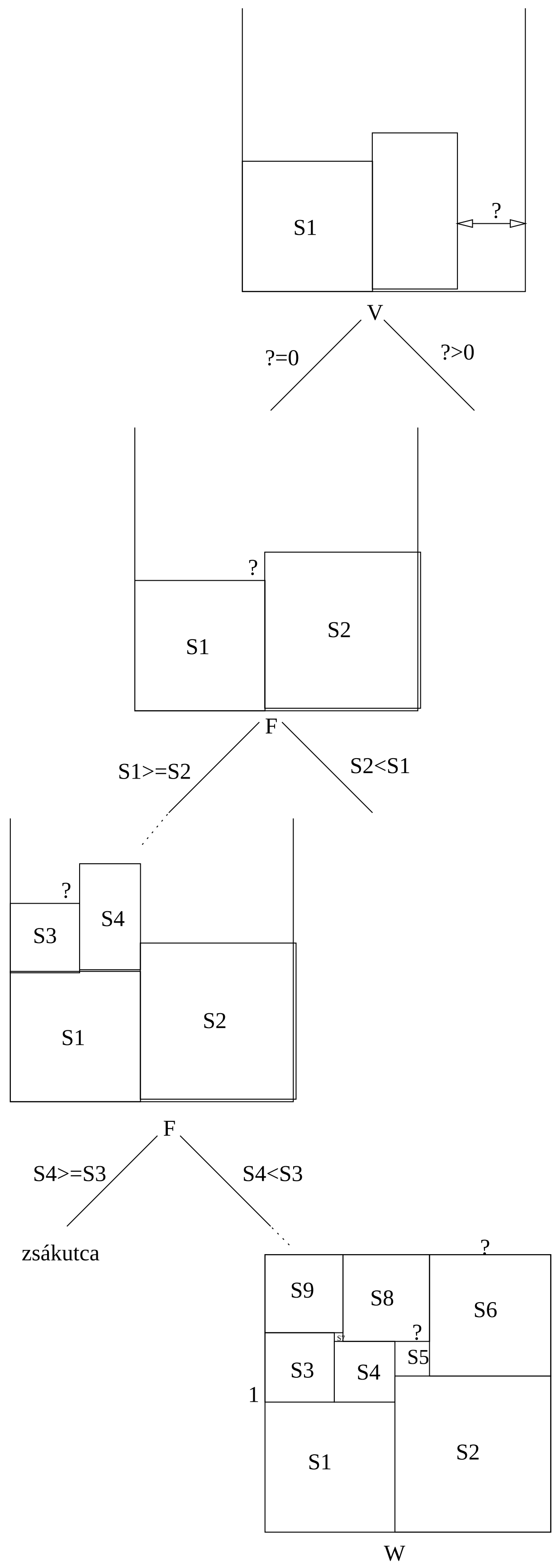
Függőleges



Vízszintes



Tökéletes téglalapok: a keresési tér szerkezete



A korlát logikai programozás elmélete

Egy CLP rendszer

- $\langle \mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{S} \rangle$
- $\mathcal{D}$: egy tartomány (domain), pl. egészek (N), valósak (R), racionálisak(Q), Boole értékek (B), listák, füzérek (stringek) (+ a Prolog-fastruktúrák (Herbrand — H) tartománya)
- $\mathcal{F}$: $\mathcal{D}$-ben definiált függvényeknek egy halmaza, pl. $+$, $-$, $*$, $\vee$, $\wedge$
- $\mathcal{R}$: $\mathcal{D}$-ben definiált relációknak (korlátoknak) egy halmaza pl. $=$, $\neq$, $<$, $\in$
- $\mathcal{S}$: egy korlát-megoldó algoritmus $\langle \mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$-re, azaz a $\mathcal{D}$ tartományban az $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ halmazbeli jelekből felépített korlátokra

CLP szintaxis és deklaratív szemantika

program

- klózok halmaza.

klóz

- szintaxis: `P :- G`$_1$, ..., `G`$_n$, ahol mindegyik `G`$_i$ vagy cél, vagy korlát.
- deklaratív olvasat: `P` igaz, ha `G`$_1$, ..., `G`$_n$ mind igaz.

kérdés

- szintaxis: `?- G`$_1$, ..., `G`$_n$
- válasz egy Q kérdésre: korlátoknak egy olyan konjunkciója, amelyből a kérdés következik.

CLP procedurális szemantika

Klózok procedurális olvasata

- `P :- G`$_1$, …, `G`$_n$ megoldásához megoldandó `G`$_1$, …, `G`$_n$.

Végrehajtási állapot

- $\langle$G, s$\rangle$
- G — cél/korlát sorozat
- s — korlát-tár: az eddig felhalmozott korlátok konjunkciója

Szükséges megkülönböztetés

- egyszerű korlát: amit a korlát-tár közvetlenül befogad ($\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$-től függ)
- összetett korlát: a tár nem tudja befogadni, de hathat a tárra

Végrehajtási invariánsok

- G $\land$ s $\rightarrow$ Q (Q a kezdő kérdés)
- s konzisztens

Végrehajtás vége

- $\langle$G$_e$, s$_e\rangle$, ahol G$_e$-re nem alkalmazható egyetlen következtetési lépés sem.

A végrehajtás eredménye

- Az s$_e$ korlát-tár, vagy annak a kérdésben szereplő változókra való „vetítése” (a többi változó egzisztenciális kvantálásával).
- A G$_e$ fennmaradó (összetett) korlátok.

Következtetési lépések

Következtetési fajták

- rezolúció:
  $\langle \texttt{P}\ \&\ \mathrm{G}, \mathrm{s}\rangle \Rightarrow \langle \texttt{G}_1\ \&\ \ldots\ \&\ \texttt{G}_n\ \&\ \mathrm{G}, \texttt{P = P}' \wedge \mathrm{s}\rangle$,
  ha a programban van egy $\texttt{P}'$ `:-` $\texttt{G}_1, \ldots, \texttt{G}_n$ klóz
- korlát-megoldás:
  $\langle \mathrm{c}\ \&\ \mathrm{G}, \mathrm{s}\rangle \Rightarrow \langle \mathrm{G}, \mathrm{s} \wedge \mathrm{c}\rangle$
- korlát-erősítés:
  $\langle \mathrm{C}\ \&\ \mathrm{G}, \mathrm{s}\rangle \Rightarrow \langle \mathrm{C}'\ \&\ \mathrm{G}, \mathrm{s} \wedge \mathrm{c}\rangle$
  ha s-ből következik, hogy C ekvivalens ($\mathrm{C}' \wedge \mathrm{c}$)-vel. ($\mathrm{C}' = \mathrm{C}$ is lehet.)

Ha a tár inkonzisztensé válna, visszalépés történik.

Követelmények

- inkrementalisság (az s tár konzisztenciáját ne bizonyítsa újra),
- a visszalépés támogatása,
- hatékonyság,
- teljesség.

A `clpb` könyvtár

- **Tartomány:** logikai értékek (`1` és `0`, igaz és hamis)
- **Függvények** (egyben constraint-relációk):

`~ P`	`P` hamis (*negáció*).
`P * Q`	`P` és `Q` mindegyike igaz (*konjunkció*).
`P + Q`	`P` és `Q` legalább egyike igaz (*diszjunkció*).
`P # Q`	`P` és `Q` pontosan egyike igaz (*kizáró vagy*).
`X ^ P`	Létezik olyan `X`, hogy `P` igaz (azaz `P[X/0]+P[X/1]` igaz).
`P =\= Q`	Ugyanaz mint `P # Q`.
`P =:= Q`	Ugyanaz mint `~(P # Q)`.
`P =< Q`	Ugyanaz mint `~P + Q`.
`P >= Q`	Ugyanaz mint `P + ~Q`.
`P < Q`	Ugyanaz mint `~P * Q`.
`P > Q`	Ugyanaz mint `P * ~Q`.
`card(Is, Es)`	Az `Es` listában szereplő igaz értékű kifejezések száma eleme az `Is` által jelölt halmaznak (`Is` egészek és `Tol-Ig` szakaszok listája).

- **Primitív constraintek** (constraint tár elemei): tetszőleges constraint (Boole-egyesítők formájában).
- **Constraint-megoldó algoritmus:** Boole-egyesítés.

A `library(clpb)` könyvtár eljárásai

- `sat(`*Kifejezés*`)`, ahol *Kifejezés* változókból, a `0`, `1` konstansokból és atomokból (ún. szimbolikus konstansok) a fenti müveletekkel felépített logikai kifejezés. Hozzáveszi *Kifejezés*t a constraint-tárhoz.
- `taut(`*Kif*`, `*Ért*`)`. Megvizsgálja, hogy *Kif* **levezethető-e** a tárból, ekkor *Ért*`=1`; vagy negáltja levezethető-e, ekkor *Ért*`=0`. Egyébként meghiúsul.
- `labeling(`*Változók*`)`. Behelyettesíti a *Változók*at `0`, `1` értekekre, úgy, hogy a tár teljesüljön. Visszalépéskor felsorolja az összes lehetséges értéket.

Egyszerű példák

```
| ?- use_module(library(clpb)).
{ ... loading ...}

| ?- sat(X + Y).                              sat(X=\=_A*Y#Y) ?

| ?- sat(x + Y).                              sat(Y=\=_A*x#x) ?

| ?- taut(_A ^ (X=\=_A*Y#Y) =:= X+Y, T).      T = 1 ?

| ?- sat(A # B =:= 0).                        B = A ?

| ?- sat(A # B =:= C), A = B.                 B = A, C = 0 ?

| ?- taut(A =< C, T).                         no

| ?- sat(A =< B), sat(B =< C), taut(A =< C, T).
                                              T = 1,
                                              sat(A=:=_A*_B*C),
                                              sat(B=:=_B*C) ?

| ?- taut(X, T).                              no

| ?- taut(x, T).                              T = 0 ?

| ?- taut(~x, T).                             T = 0 ?
```

Megjegyzések

- A tár megjelenítése: `sat(V =:= Kif)` ill. `sat(V =\ Kif)` ahol `Kif` egy „polinom”, azaz konjunkciókból kizáró vagy (#) művelettel képzett kifejezés.
- Az atommal jelölt szimbolikus konstansok nem behelyettesíthetőek, (legkívül) univerzálisan kvantifikált változóknak tekinthetők.

Példa: 1-bites összeadó

```
| ?- [user].
| adder(X, Y, Sum, Cin, Cout) :-
      sat(Sum =:= card([1,3],[X,Y,Cin])),
      sat(Cout =:= card([2-3],[X,Y,Cin])).
| {user consulted, 40 msec 576 bytes}

yes
| ?- adder(x, y, Sum, cin, Cout).

sat(Sum=:=cin#x#y),
sat(Cout=:=x*cin#x*y#y*cin) ?

yes
| ?- adder(x, y, Sum, 0, Cout).

sat(Sum=:=x#y),
sat(Cout=:=x*y) ?

yes
| ?- adder(X, Y, 0, Cin, 1), labeling([X,Y,Cin]).

Cin = 0, X = 1, Y = 1 ? ;

Cin = 1, X = 0, Y = 1 ? ;

Cin = 1, X = 1, Y = 0 ? ;

no
```

Boole-egyesítés

A feladat:

- Adott `g` és `h` logikai kifejezések.
- Keressük a `g = h` egyenletet megoldó legáltalánosabb egyesítőt (mgu).
- Példa: mgu(`X+Y`, `1`) lehet `X = W * Y # Y # 1` (új változó, pl. `W`, bejöhet).
- Egyszerűsítés: A `g = h` egyenlet helyettesíthető az `f = 0` egyenlettel, ahol `f = g # h`.
- Az egyesítés során minden lépésben egy f `= 0` formulabeli változót szeretnénk kifejezni.

Az `X` változó kifejezése

- Legyen $f_{\mathtt{X}}(1)$ az f-ből az `X=1`, $f_{\mathtt{X}}(0)$ az `X=0` behelyettesítéssel kapott kifejezés.
- f `= 0` kielégíthetőségének szükséges feltétele $f_{\mathtt{X}}(1)$ `*` $f_{\mathtt{X}}(0)$ `= 0` kielégíthetősége.
- Fejezzük ki `X`-et $f_{\mathtt{X}}(0)$-val és $f_{\mathtt{X}}(1)$-gyel úgy, hogy f `= 0` legyen!

$f_{\mathtt{X}}(0)$	$f_{\mathtt{X}}(1)$	`X`
0	0	bármi (`W`)
0	1	0
1	0	1
1	1	érdektelen

  Keressük `X`-et `X = A*~W # B*W` alakban!

- Határozzuk meg `A`-t és `B`-t $f_{\mathtt{X}}(0)$ és $f_{\mathtt{X}}(1)$ függvényeként!

$f_{\mathtt{X}}(0)$	$f_{\mathtt{X}}(1)$	`X`	`A`	`B`
0	0	`W`	0	1
0	1	0	0	0
1	0	1	1	1

  Az `A =` $f_{\mathtt{X}}(0)$ és `B = ~`$f_{\mathtt{X}}(1)$ megfeleltetés tűnik a legegyszerűbbnek.

Bool-egyesítés (folyt.)

Az egyesítési algoritmus az f = 0 egyenlőségre

- Ha f-ben nincs változó, akkor azonosnak kell lennie 0-val (különben nem egyesíthető).
- Helyettesítsünk: X = ~W*$f_{\mathtt{X}}(0)$ # W*~$f_{\mathtt{X}}(1)$ (Boole-egyesítő)
- Folytassuk az egyesítést az $f_{\mathtt{X}}(1)$ * $f_{\mathtt{X}}(0)$ = 0 egyenlőségre.

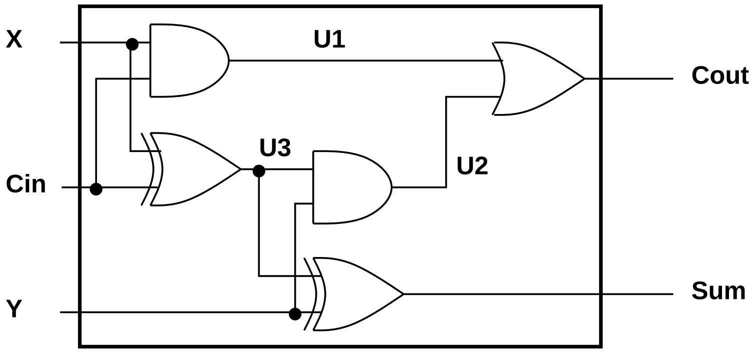
Példák

- mgu(X+Y, 0) $\longrightarrow$ X = 0, Y = 0;
- mgu(X+Y, 1) = mgu(~(X+Y), 0) $\longrightarrow$ X = W * Y # Y # 1;
- mgu(X*Y, ~(X*Z)) = mgu((X*Y)#(X*Z)#1, 0) $\longrightarrow$ X = 1, Y = ~Z.

Belső ábrázolás: BDD (Boolean/Binary Decision Diagrams)

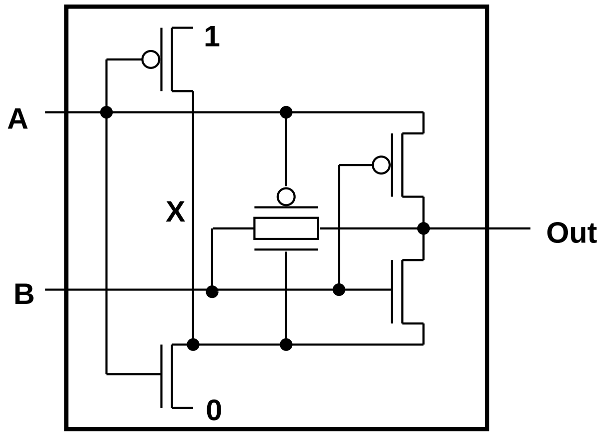
```
                                      X
                                     / \
                                    1   Y
X*Y # X*Z # 1   ábrázolása:            / \
                                      Z   Z
                                     / \ / \
                                    1   0   1
```

Példa: Hibakeresés áramkörben




```
fault([F1,F2,F3,F4,F5], [X,Y,Cin], [Sum,Cout]) :-
        sat(
                    card([0-1],[F1,F2,F3,F4,F5]) *
                    (F1 + (U1 =:= X * Cin)) *
                    (F2 + (U2 =:= Y * U3)) *
                    (F3 + (Cout =:= U1 + U2)) *
                    (F4 + (U3 =:= X # Cin)) *
                    (F5 + (Sum =:= Y # U3))
                ).

fault_ex(1, Faults) :- fault(Faults, [1,1,0], [1,0]).
fault_ex(2, Faults) :- fault(Faults, [1,0,1], [0,0]).

| ?- fault_ex(I,L), labeling(L).

I = 1, L = [0,0,0,1,0] ? ;
I = 2, L = [1,0,0,0,0] ? ;
I = 2, L = [0,0,1,0,0] ? ;
no
| ?- fault([0,0,0,0,0], [x,y,cin], [Sum,Cout]).

sat(Cout=:=x*cin#x*y#y*cin),
sat(Sum=:=cin#x#y)
```

Példa: Tranzisztoros áramkör verifikálása




```
n(D, G, S) :-    % Gate => Drain = Source
        sat( G*D =:= G*S).

p(D, G, S) :-    % ~ Gate => Drain = Source
        sat( ~G*D =:= ~G*S).

xor(A, B, Out) :-
        p(1, A, X),
        n(0, A, X),
        p(B, A, Out),
        n(B, X, Out),
        p(A, B, Out),
        n(X, B, Out).

| ?- n(D, 1, S).                S = D ?

| ?- n(D, 0, S).                true ?

| ?- p(D, 0, S).                S = D ?

| ?- p(D, 1, S).                true ?

| ?- xor(a, b, X).              sat(X=:=a#b) ?
```

Minesweeper `clpb`-ben

```
:- use_module(library(clpb)).    :- use_module(library(lists)).

mine(Rows, Cols, Mines, Bd) :-
  length(Bd, Rows), all_length(Bd, Cols), append_lists(Bd, All),
  sat(card([Mines], All)), play_mine(Bd, []).

all_length([], _).
all_length([L|Ls], Len) :- length(L, Len), all_length(Ls, Len).

append_lists([], []).
append_lists([L|Ls], Es) :-
  append_lists(Ls, Es0), append(L, Es0, Es).

play_mine(Bd, Asked) :- select_field(Bd, Asked, R, C, E), !,
  format('Row ~w, col ~w (m for mine)? ', [R,C]), read(Ans),
  process_ans(Ans, E, R, C, Bd), play_mine(Bd, [R-C|Asked]).
play_mine(_Bd, _Asked).

select_field(Bd, Asked, R, C, E) :-
  nth(R, Bd, L), nth(C, L, E), non_member(R-C, Asked), taut(E, 0), !.
select_field(Bd, _Asked, R, C, E) :-
  nth(R, Bd, L), nth(C, L, E), non_member(R-C, Asked), \+ taut(E,1), !.

process_ans(m, 1, _, _, _) :- format('Mine!~n', []), !, fail.
process_ans(Ans, 0, R, C, Bd) :-
  integer(Ans), neighbs(n(R, C, Bd), Ns), sat(card([Ans], Ns)).

neighbs(RCB, N7) :-
  neighbour(-1,-1, RCB, [], N0), neighbour(-1, 0, RCB, N0, N1),
  neighbour(-1, 1, RCB, N1, N2), neighbour( 0,-1, RCB, N2, N3),
  neighbour( 0, 1, RCB, N3, N4), neighbour( 1,-1, RCB, N4, N5),
  neighbour( 1, 0, RCB, N5, N6), neighbour( 1, 1, RCB, N6, N7).

neighbour(ROf, COf, n(R0, C0, Bd), Nbs, [E|Nbs]) :-
  R is R0+ROf, C is C0+COf, nth(R, Bd, Row), nth(C, Row, E), !.
neighbour(_, _, _, Nbs, Nbs).
```

Szándékosan üres

A SICStus `clpfd` könyvtár

Tartomány

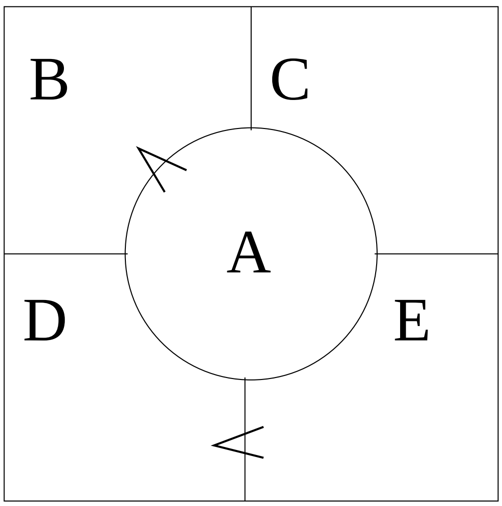
Egészek (negatívak is) véges (esetleg végtelen) halmaza

Korlátok

- aritmetikai
- halmaz (halmazba tartozás)
- tükrözött
- logikai
- kombinatorikai
- felhasználó által definiált

Háttér: CSP (Constraint Satisfaction Problems)

Példafeladat: Az alábbi térkép kiszínezése piros, sárga és kék színekkel úgy, hogy a < jellel összekapcsolt országok színei a fenti sorrend szerint kövessék egymást.



Az egyetlen megoldás:
A = kék, B = sárga, C = piros, D = piros, E = sárga

A CSP problémakör rövid áttekintése

A CSP fogalma

- CSP $= (X, D, C)$
  - $X = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ — változók
  - $D = \langle D_1, \ldots, D_n \rangle$ — tartományok, azaz nem üres halmazok
  - x_i változó a D_i véges halmazból (x_i tartománya) vehet fel értéket
  - C a problémában szereplő korlátok (atomi relációk) halmaza, argumentumaik X változói (például $r(x_1, x_3)$, $r \subseteq D_1 \times D_3$)
- A feladat: minden x_i változónak egy olyan $v \in D_i$ értéket adni, hogy minden $c \in C$ korlátot egyidejűleg kielégítsünk.
- Egy c korlát egy x_i változójának d_i értéke *felesleges*, ha nincs a c többi változójának olyan értékrendszere, amely d_i-vel együtt kielégíti c-t.
- Egy korlát *él-konzisztens* (arc consistent), ha egyik változójának tartományában sincs felesleges érték. A CSP *él-konzisztens*, ha minden korlátja él-konzisztens. Az él-konzisztencia a tartományok szűkítésével biztosítható.
- Ha minden reláció bináris, a CSP probléma gráffal ábrázolható. (Az él-konzisztencia elnevezes ebből fakad.)

A CSP megoldás folyamata

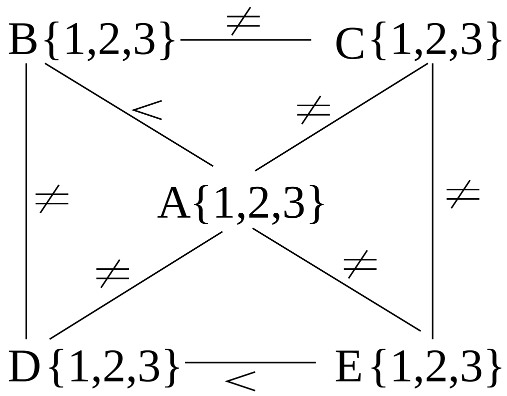
- felvesszük a változók tartományait;
- felvesszük a korlátokat mint démonokat, amelyek szűkítéssel él-konzisztenciát biztosítanak;
- többértelműség esetén címkézést (labeling) végzünk:
  - kiválasztunk egy változót (pl. a legkisebb tartományút),
  - a tartományt két vagy több részre osztjuk (választási pont),
  - az egyes választásokat visszalépéses kereséssel bejárjuk (egy tartomány üresre szűkülése váltja ki a visszalépést).

A térképszínezés mint CSP feladat

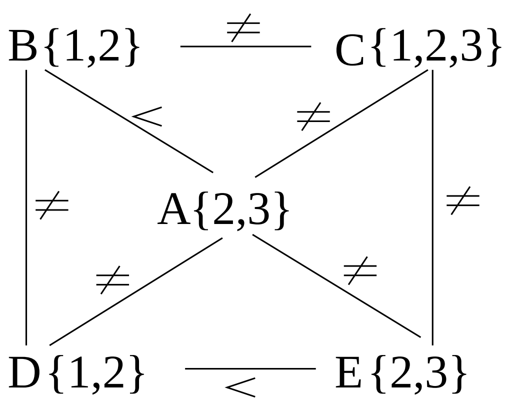
Modellezés (leképezés CSP-re)

- változók meghatározása: országonként egy a színt jelentő változó;
- változóértékek kódolása: piros → 1, sárga → 2, kék → 3 (sok CSP megvalósítás kiköti, hogy a tartományok elemei pl. nem-negatív egészek);
- korlátok meghatározása:
  - az előírt $<$ relációk teljesülnek,
  - a többi szomszédos ország-pár különböző színű.

A kiinduló korlát-gráf



A korlát-gráf él-konzisztens szűkítése



CLP(FD) = a CSP beágyazása a CLP($\mathcal{X}$) sémába

A CSP → CLP(FD) megfeleltetés

- CSP változó → CLP változó
- CSP: x tartománya T → CLP: „`X in T`” egyszerű korlát.
- CSP korlát → CLP összetett korlát

A CLP(FD) korlát-tár

- Tartalma: X `in` *Tartomány* alakú egyszerű korlátok.
- Tekinthető úgy mint egy hozzárendelés a változók és tartományaik (lehetséges értékek) között.
- Egyszerű korlát hozzávétele a tárhoz: egy már bennlévő változó tartományának szűkítése vagy egy új változó-hozzárendelés felvétele.

Összetett CLP(FD) korlátok

- A korlátok többsége démon lesz, hatását a *korlát-erősítés*en keresztül fejti ki ($\langle C, s\rangle \longrightarrow \langle C', s \wedge c >\rangle$ ahol $s \models C \equiv C' \wedge c$).
- Az erősítés egy egyszerű korlát hozzávételét, azaz a CLP(FD) esetén a tár szűkítését jelenti.
- A démonok ciklikusan működnek: szűkítenek, elalszanak, aktiválódnak, szűkítenek, ...
- A démonokat a korlátbeli változók tartományának változása aktiválja.
- Különböző korlátok különböző mértékű szűkítést alkalmazhatnak (a maximális szűkítés túl drága lehet).

A `clpfd` könyvtár — alap-korlátok

Alapvető aritmetikai korlátok

- Függvények

  `+ - * / mod min max` (kétargumentumúak),

  `abs` (egyargumentumú).

- Korlát-relációk: `#<, #>, #=<, #>=, #= #\=` (`xfx 700` operátorok)

Halmazkorlátok

- X `in` *KonstansTartomány*, jelentése: $X \in H$, ahol H a *KonstansTartomány* által leírt halmaz (`xfx 700` operátor);
- `domain([`$X, Y,$`...]`$,Min,Max$`)`: $X \in [Min, Max]$, $Y \in [Min, Max]$, ...

A konstans tartományok szintaxisa

- felsorolás: `{`*Szám*, ...`}`,
- intervallum: `(`*Min* `..` *Max*`)`, (`xfx 550` operátor)
- metszet: *KonsTartomány* `/\` *KonsTartomány* (`yfx 500`, beépített op.),
- únió: *KonsTartomány* `\/` *KonsTartomány*, (`yfx 500`, beépített op.),
- komplemens: `\` *KonsTartomány*, (`fy 500` operátor);

ahol *Min*: *Szám* vagy `inf`, *Max*: *Szám* vagy `sup`

Példák

```
| ?- X in (10..20)/\ (\{15}), Y in 6..sup, Z #= X+Y.
                X in(10..14)\/(16..20), Y in 6..sup, Z in 16..sup ?

| ?- X in 10..20, X #\= 15, Y in {2}, Z #= X*Y.
                Y = 2, X in(10..14)\/(16..20), Z in 20..40 ?
```

Szűkítési szintek

Jelölések

- Legyen C egy n-változós korlát, s egy tár,
- $D(X, s)$ az X változó tartománya az s tárban,
- $D'(X, s) = min(D(X, s))..max(D(X, s))$, az X változó tartományát lefedő (legszűkebb) intervallum.

A szűkítési szintek definíciója

- Tartomány-szűkítés (domain consistency)

  C **tartomány-szűkítő** ha minden szűkítési lépés lefutása után igaz, hogy C bármelyik X_i változójához és annak tetszőleges $V_i \in D(X_i, s)$ megengedett értékéhez található a többi változónak olyan $V_j \in D(X_j, s)$ értéke ($j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$),hogy $C(V_1, \ldots V_n)$ fennálljon. (Ez ugyanaz mint a CSP él-konzisztencia fogalma.)
- Intervallum-szűkítés (interval consistency)

  C **intervallum-szűkítő** ha minden szűkítési lépés lefutása után igaz, hogy C bármelyik X_i változója esetén e változó tartományának mindkét **vég**pontjához (azaz a $V_i = min(D(X_i, s))$ és $Vi = max(D(X_i, s))$ értékekhez) található a többi változónak olyan $V_j \in D'(X_j, s)$ értéke ($j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$), hogy $C(V_1, \ldots V_n)$ fennálljon.

Megjegyzések

- A tartomány-szűkítés lokálisan (egy korlátra nézve) a lehető legjobb;
- **DE** mégha mindenki tartomány-szűkítő, a megoldás nincs garantálva, pl.
  `| ?- domain([X,Y,Z], 1, 2), X #\= Y, X #\= Z, Y #\= Z.`
- Egy CLP(FD) probléma megoldásának hatékonysága fokozható:
  - több korlát összefogását jelentő ún. globális korlátokkal, pl. `all_distinct(L)`: Az `L` lista csupa különböző elemből áll;
  - redundáns korlátok felvételével.

Garantált szűkítési szintek SICStusban

A SICStus által garantált szűkítési szintek

- A halmaz-korlátok (triviálisan) tartomány-szűkítők.
- A *lineáris* aritmetikai korlátok legalább intervallum-szűkítők.
- A nem-lineáris aritmetikai korlátokra nincs garantált szűkítési szint.
- Ha egy változó valamelyik határa végtelen (`inf` vagy `sup`), akkor a változót tartalmazó korlátokra nincs szűkítési garancia. (**Példa?**)
- A később tárgyalandó korlátokra egyenként megadjuk majd a szűkítési szintet.

Példák

```
| ?- X in {4,9}, Y in {2,3}, Z #= X-Y.    % intervallum-szűkítő:
               X in {4}\/{9}, Y in 2..3, Z in 1..7 ?

| ?- X in {4,9}, Y=2, Z #= X-Y.           % tartomány-szűkítő:
               Y = 2, X in {4}\/{9}, Z in {2}\/{7} ?

| ?- X in {4,9}, Z #= X-Y, Y=2.           % így csak
                                          % intervallum-szűkítő!
               Y = 2, X in {4}\/{9}, Z in 2..7 ?

| ?-domain([X,Y], -10, 10), X*X+2*X+1 #= Y.
               X in -4..4, Y in -7..10 ? % nem interv.-szűkítő
                                          % Y < 0 nem lehet!

| ?- domain([X,Y], -10, 10), (X+1)*(X+1) #= Y.   % így már
               X in -4..2, Y in 0..9 ?   % intervallum-szűkítő
```

A térképszínezési feladat SICStus-ban

```
| ?- use_module(library(clpfd)).
...
| ?- domain([A,B,C,D,E], 1, 3),
     A #> B, A #\= C, A #\= D, A #\= E,
     B #\= C, B #\= D, C #\= E, D #< E.
                A in 2..3, B in 1..2,
                C in 1..3, D in 1..2, E in 2..3 ? ;
                no

| ?- domain([A,B,C,D,E], 1, 3),
     A #> B, A #\= C, A #\= D, A #\= E,
     B #\= C, B #\= D, C #\= E, D #< E,
     member(A, [1,2,3]). % címkézés, hivatalosan:
%    indomain(A).        % vagy:
%    labeling([], [A]).  % általánosan:
%    labeling([], [A,B,C,D,E]).
                A = 3, B = 2, C = 1, D = 1, E = 2 ? ;
                no

| ?- domain([A,B,C,D,E], 1, 3),
     A #> B, A #\= E, B #\= C, B #\= D, D #< E,
%    A #\= C, A #\= E, C #\= E helyett:
     all_distinct([A,C,E]).
                A = 3, B = 2, C = 1, D = 1, E = 2 ? ;
                no
```

Címkéző könyvtári eljárások

- `indomain(`*X*`)`: X-et a tartománya által megengedett értékkel helyettesíti (visszalépéskor felsorolja az összes értéket)
- `labeling(`*Opciók*`, `*Változók*`)`: A *Változók* lista minden elemét behelyettesíti, az *Opciók* lista által előírt módon.

Korlátok végrehajtása

A végrehajtás fázisai

- A korlát kifejtése elemi korlátokra (fordítási időben, lásd később)
- A korlát felvétele (posting):
  - azonnali végrehajtás (pl. `X < 3`), vagy
  - démon létrehozása, aktiválási feltételeinek meghatározása, első szűkítés elvégzése, a démon elaltatása.
- A démon aktiválása
  - szűkítés elvégzése,
  - döntés a folytatásról: a démon lefut, vagy újra elalszik.

Elemi korlátok működése — példák

`A #\= B` (tartomány-szűkítő)

- Aktiválás: ha vagy `A` vagy `B` konkrét értéket kap.
- Szűkítés: az érték kihagyása a másik változó tartományából
- Folytatás: az démon befejezi működését

`A #< B` (tartomány-szűkítő)

- Aktiválás: ha `A` alsó határa (min `A`) vagy `B` felső határa (max `B`) változik
- Szűkítés: `A` tartományából kihagyja az $X \geq$ max `B` értékeket,
  `B` tartományából kihagyja az $Y \leq$ min `A` értékeket
- Folytatás: ha max `A` $<$ min `B`, akkor lefut, különben újra elalszik

Korlátok végrehajtása (folyt.)

`all_distinct([A1,...])` (tartomány-szűkítő)

- Aktiválás: ha bármelyik változó tartománya változik
- Szűkítés: (egy a maximális párosításra épülő algoritmus segítségével) minden olyan értéket elhagy, amelyek esetén a korlát nem állhat fenn. Példa:

```
| ?- domain([A,B], 2, 3), C in 1..3, all_distinct([A,B,C]).
                              C = 1, A in 2..3, B in 2..3 ?
```

- Folytatás: ha már csak egy nem-konstans argumentuma van, akkor lefut, különben újra elalszik. (Jobb döntésnek tűnhet lefutni, ha a tartományok mind diszjunktak, de a SICStus nem így csinálja, valószinűleg nem éri meg.)

`X+Y #= T` (intervallum-szűkítő)

- Aktiválás: ha bármelyik változó alsó vagy felső határa változik
- Szűkítés: `T`-t szűkiti a `min(X)+min(Y)..max(X)+max(Y)` intervallumra, `X`-t szűkiti a `min(T)-max(Y)..max(T)-min(Y)` intervallumra, `Y`-t analóg módon szűkiti.
- Folytatás: ha mindhárom változó konstans, akkor lefut különben újra elalszik.

Példa a szűkítések kölcsönhatására

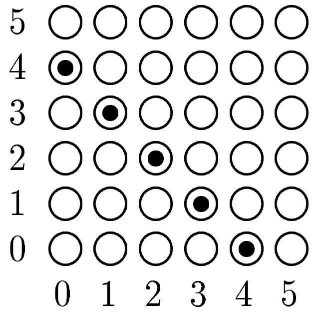
```
| ?- domain([X,Y], 0, 100), X+Y #=10, X-Y #=4.
               X in 4..10, Y in 0..6 ?

| ?- domain([X,Y], 0, 100), X+Y #=10, X+2*Y #=14.
               X = 6, Y = 4 ?
```

A szűkítés grafikus szemléltetése

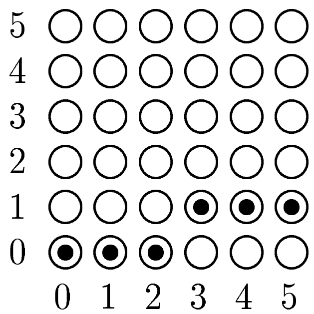
`domain([X,Y], 0, 5), C(X,Y), X#=<Y+2, X#>2, Y in {0,4,5}`

`C(X,Y):`

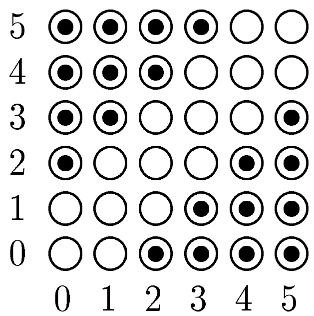
`X + Y #= 4`



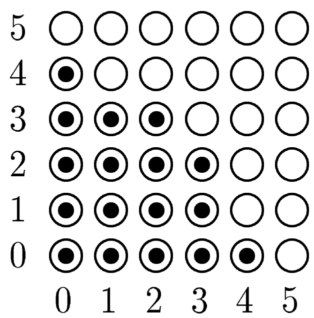
`Y #= X/3`



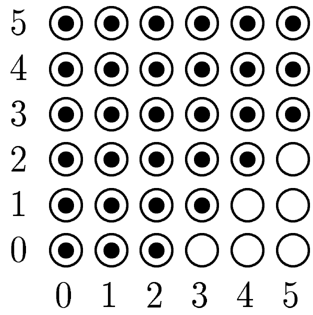
`abs(X-Y)#>1`



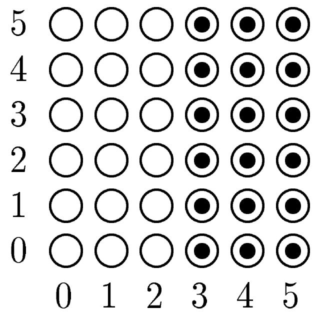
`X*X+Y*Y#=<16`



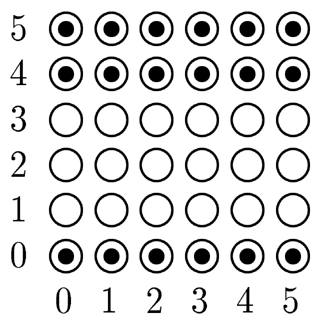
`X #=< Y+2`



`X #> 2`

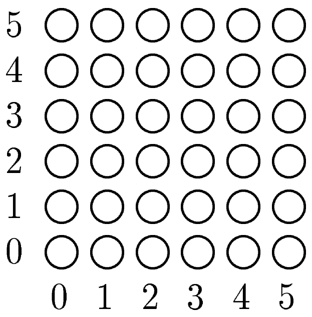


`Y in {0,4,5}`

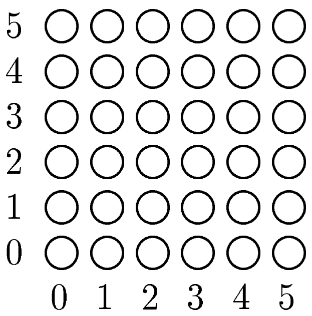


Gyakorló táblák

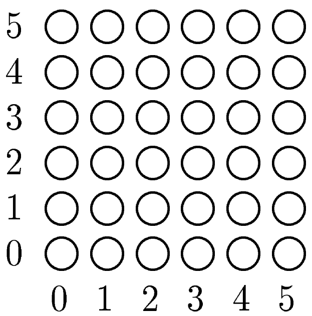
Kövesd nyomon a tár `X` és `Y` dimenziójának szűkülését az egyes korlátok felvételekor majd felébredésekor!



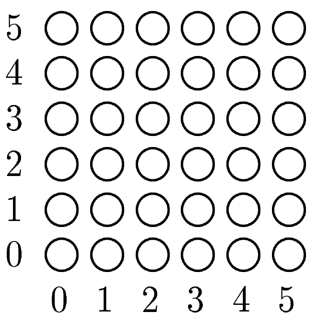

```
X+Y #= 4, X#=<Y+2, X#>2
```




```
Y #= X/3, X#=<Y+2, X#>2
```




```
abs(X-Y)#>1, X#=<Y+2, X#>2, Y in {0,4,5}
```




```
X*X+Y*Y#=<16, X#=<Y+2, X#>2
```

Miért más a CLP(FD)?

A CLP könyvtárak összehasonlítása

	`clpq/r`	`clpb`	`clpfd`
Korlátok:	aritmetikai	logikai	aritmetikai. logikai, kombinatorikai,...
Egyszerű korlátok:	lineárisak	összes	X `in` *Halmaz*
Összetett korlátok végrehajtása:	várakozás, míg lineáris nem lesz	nincs ilyen	erősítés (szűkítés)
A tár konzisztenciájának biztosítása:	Gauss elimináció, szimplex	Bináris Döntási Diagrammok	triviális: X `in` *Halmaz*$\rightarrow$ *Halmaz* nem üres
Az összes korlát konzisztenciájának biztosítása:	lineáris esetben automatikus	automatikus	csak címkézésen keresztül
Átlátszóság:	fekete doboz	fekete doboz	üveg-doboz
Kiterjeszthetőség:	nem	nem	igen

A CLP(FD) fő jellemzői

- A tár konzisztenciájának biztosítása triviális.
- A lényeg a démonok erősítő (szűkítő) működésében van.
- A démonok nem látják egymást, csak a táron keresztül hatnak egymásra.
- Globális korlátok: egyszerre több (akárhány) korlátot helyettesítenek, így erősebb szűkítést adnak (pl. `all_distinct`).
- A megoldás megléte általában csak a címkézéskor derül ki.

A CLP(FD) jellemzői — példák

```
| ?- domain([X,Y,Z], 1, 2), X #\= Y, X #\= Z, Y #\= Z.
                X in 1..2, Y in 1..2, Z in 1..2 ?

| ?- X #> Y, Y #> X.
                Y in inf..sup, X in inf..sup ?

| ?- domain([X,Y], 1, 10), X #> Y, Y #> X.
                no

| ?- statistics(runtime,_),
     (   domain([X,Y], 1, 1000000),  X #> Y, Y #> X
     ;   statistics(runtime,[_,T])
     ).
                T = 3630 ?

| ?- domain([X,Y], 1, 10), Y #= X+1, X+Y #= 8.
                X in 1..6, Y in 2..7 ?

| ?- domain([X,Y], 1, 10), Y #= X+1, X+(X+1) #= 8.
                no

| ?- domain([X,Y], 1, 10), Y #= X+1, X #= 2*A, X+Y #= 8.
                no

| ?- domain([X,Y], 1, 10), Y #= X+1, X #= 2*A+1, X+Y #= 8.
                no

| ?- domain([X,Y], 1, 10), Y #= X+1, X #= 2*A, X+Y #= 7.
                X in 2..4, Y in 3..5, A in 1..2 ?

| ?- domain([X,Y], 1, 10), Y #= X+1, X #= 2*A, X+Y #= 7,
     indomain(X).
                no
```

Klasszikus CSP/CLP programok

Példa: Kódaritmetika: SEND+MORE=MONEY

```
send(SEND, MORE, MONEY) :-
  List= [_,_,_,_,_,_,_,_],
  domain(List, 0, 9),               % tartományok megadása
  send(List, SEND, MORE, MONEY),    % korlátok
  labeling([], List).               % címkézés

send(List, SEND, MORE, MONEY) :-
  List= [S,E,N,D,M,O,R,Y],
  alldiff(List), S #\= 0, M#\= 0,
  SEND #=  1000*S+100*E+10*N+D,
  MORE #= 1000*M+100*O+10*R+E,
  MONEY #= 10000*M+1000*O+100*N+10*E+Y,
  SEND+MORE #= MONEY.

% Szűkítő hatásában azonos az all_different/1 eljárással
alldiff([]).
alldiff([X|Xs]) :- outof(X, Xs), alldiff(Xs).

outof(_, []).
outof(X, [Y|Ys]) :- X #\= Y, outof(X, Ys).

| ?- send(SEND, MORE, MONEY).
                MORE = 1085, SEND = 9567, MONEY = 10652 ? ;
                no
| ?- List=[S,E,N,D,M,O,R,Y], domain(List, 0, 9),
     send(List, SEND, MORE, MONEY).
                List = [9,E,N,D,1,0,R,Y],
                SEND in 9222..9866,
                MORE in 1022..1088,
                MONEY in 10244..10888,
                E in 2..8, N in 2..8, D in 2..8,
                R in 2..8, Y in 2..8 ?
```

CSP/CLP programok: a `zebra` feladat

```
:- use_module(library(lists)).
:- use_module(library(clpfd)).

% ZOwner a zebra tulajdonosának nemzetisége, All az összes
% változó értéke a "Kinek a háziállata a zebra" feladványban.
zebra(ZOwner, All):-
  All = [England,Spain,Japan,Norway,Italy,
         Green,Red,Yellow,Blue,White,
         Painter,Diplomat,Violinist,Doctor,Sculptor,
         Dog, Zebra, Fox, Snail, Horse,
         Juice,Water,Tea,Coffee,Milk],
  domain(All, 1, 5),
  all_different([England,Spain,Japan,Norway,Italy]),
  all_different([Green,Red,Yellow,Blue,White]),
  all_different([Painter,Diplomat,Violinist,Doctor,Sculptor]),
  all_different([Dog,Zebra,Fox,Snail,Horse]),
  all_different([Juice,Water,Tea,Coffee,Milk]),
  England = Red,          Spain = Dog,
  Japan = Painter,        Italy = Tea,
  Norway = 1,             Green = Coffee,
  Green #= White+1,       Sculptor = Snail,
  Diplomat = Yellow,      Milk = 3,
  Violinist = Juice,      nextto(Norway, Blue),
  nextto(Fox, Doctor),    nextto(Horse, Diplomat),
  labeling([], All),
  nth(N, [England,Spain,Japan,Norway,Italy], Zebra),
  nth(N, [england,spain,japan,norway,italy], ZOwner).

% A és B szomszédos számok.
nextto(A, B) :-  abs(A-B) #= 1.

| ?- zebra(ZOwner, All).
       All = [3,4,5,1,2,5,3,1,2,4|...],
       ZOwner = japan ? ; no
```

CSP/CLP programok: N királynő a sakktáblán

```
% A Qs lista N királynő biztonságos elhelyezését mutatja egy
% N*N-es sakktáblán: ha a lista i. eleme j, akkor az i.
% királynőt az i. sor j. oszlopába kell helyezni.
% LabOpts a címkézéshez használandó opciók listája.
queens(LabOpts, N, Qs):-
        length(Qs, N), domain(Qs, 1, N),
        safe(Qs), labeling(LabOpts,Qs).

% safe(Qs): A Qs királynő-lista biztonságos.
safe([]).
safe([Q|Qs]):- no_attack(Qs, Q, 1), safe(Qs).

% no_attack(Qs, Q, I): A Qs lista által leírt
% királynők egyike sem támadja a Q oszlopban levő
% királynőt, feltéve hogy Q és Qs távolsága I.
no_attack([],_,_).
no_attack([X|Xs], Y, I):-
      no_threat(X, Y, I), J is I+1, no_attack(Xs, Y, J).

% Az X és Y oszlopokban  I sortávolságra levő
% királynők nem támadják egymást.
no_threat(X, Y, I) :-
        Y #\= X, Y #\= X-I, Y #\= X+I.

| ?- length(Qs, 4), domain(Qs, 1, 4), safe(Qs).
        Qs = [_A,_B,_C,_D],
        _A in 1..4, _B in 1..4, _C in 1..4, _D in 1..4 ?
| ?- length(Qs, 4), domain(Qs, 1, 4), safe(Qs), Qs=[1|_].
        Qs = [1,_A,_B,_C],
        _A in 3..4, _B in{2}\/{4}, _C in 2..3 ?
| ?- Qs = [1|_], queens([], 4, Qs).
        no
| ?- length(Qs, 4), domain(Qs, 1, 4), safe(Qs), Qs=[2|_].
        Qs = [2,4,1,3] ?
```

Egy bonyolultabb példa: mágikus sorozatok

Definíció: Egy $L = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ sorozat *mágikus* ($x_i \in [0..n-1]$), ha L-ben az i szám pontosan x_i-szer fordul elő (minden $i \in [0..n-1]$-re).

Példa: n=4 esetén (1,2,1,0) és (2,0,2,0) mágikus sorozatok.

```
% Az L lista egy N hosszúságú mágikus sorozat.
magikus(N, L) :-
        length(L, N), N1 is N-1, domain(L, 0, N1),
        elofordulasok(L, 0, L),
        labeling([], L).              % most felesleges

% elofordulasok([Ei, Ei+1, ...], i, Sor): Sor-ban i, i+1, ...
% előfordulásainak száma Ei, Ei+1, ...
elofordulasok([], _, _).
elofordulasok([E|Ek], I, Sor) :-
        pontosan(I, Sor, E), J is I+1, elofordulasok(Ek, J, Sor).

% pontosan(I, L, E): Az I szám L-ben pontosan E-szer fordul elő.
pontosan(I, L, 0) :-     outof(I, L).
pontosan(I, [I|L], N) :- N #> 0, N1 #= N-1, pontosan(I, L, N1).
pontosan(I, [X|L], N) :- N #> 0, X #\= I,   pontosan(I, L, N).

| ?- magikus(4, L).
 +      1      1 Call: pontosan(0,[_A,_B,_C,_D],_A) ? s
?+      1      1 Exit: pontosan(0,[1,0,_C,_D],1) ? z
 +      2      1 Call: pontosan(1,[1,0,_C,_D],0) ? s
 +      2      1 Fail: pontosan(1,[1,0,_C,_D],0) ? z
 +      1      1 Redo: pontosan(0,[1,0,_C,_D],1) ? s
?+      1      1 Exit: pontosan(0,[2,0,0,_D],2) ? z
(...)
 +      4      1 Call: pontosan(2,[2,0,0,_D],0) ? s
 +      4      1 Fail: pontosan(2,[2,0,0,_D],0) ? z
(...)
?+      1      1 Exit: pontosan(0,[3,0,0,0],3) ? z
(...)
?+      1      1 Exit: pontosan(0,[2,0,_D,0],2) ?
```

Mágikus sorozatok: redundáns korlátok

Állítás: Ha az $L = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ sorozat mágikus, akkor $\sum_{i<n} x_i = n$, és $\sum_{i<n} i * x_i = n$.

Hatékonyabb változat

```
% N = 10 esetén kb. 50-szer gyorsabb mint az előző változat!
magikus2(N, L) :-
        length(L, N), N1 is N-1, domain(L, 0, N1),
        osszege(L, S), call(S #= N),        % lásd a megjegyzést
        szorzatosszege(L, 0, SS), call(SS #= N),
        elofordulasok(L, 0, L).             % lásd az előző lapon

% osszege(L, Ossz): Ossz az L lista elemeinek összeg-kifejezése
osszege([], 0).
osszege([X|L], X+S) :- osszege(L, S).

% szorzatosszege(L, I, Ossz): Az Ossz kifejezés az L lista
% elemeinek és az [I, I+1, ...] sorozatnak a skalárszorzata.
szorzatosszege([], _, 0).
szorzatosszege([X|L], I, I*X+S) :-
        J is I+1, szorzatosszege(L, J, S).

| ?- magikus2(4, L).
 +      1      1 Call: pontosan(0,[_A,_B,_C,_D],_A) ? s
?+      1      1 Exit: pontosan(0,[2,0,2,0],2) ? z
(...)
L = [2,0,2,0] ? ;
(...)
?+      1      1 Exit: pontosan(0,[1,2,1,0],1) ?
```

Megjegyzés

- Nem megengedett: `S=S1+S2, ..., S #= 0`.
- A korlát-kifejtési fázis késleltetése: `S=S1+S2, ..., call(S #= 0)`.

Reifikáció: korlátok tükrözése

Egy korlát tükrözése (reifikációja):

- a korlát igazságértékének „tükrözése” egy 0-1 értékű korlát-változóban;
- jelölése: C `#<=> B`, jelentése: `B` tartománya `0..1` és `B` csakkor `1`, ha C igaz;
- példa: `(X #>= 3) #<=> B`: `B` az `X` $\geq$ `3` egyenlőség igazságértéke.

Megjegyzések

- Az eddig ismertetett aritmetikai és halmaz-korlátok mind tükrözhetőek.
- A tükrözött korlátok is „közönséges” korlátok, csak definíciójuk és végrehajtásuk módja speciális.
- Példa: a `0..5` tartományon a `(X #>= 3) #<=> B` korlát teljesen megegyezik a `B #= X/3` korláttal.

Tükrözött korlátok végrehajtása

- A C `<=> B` tükrözött korlát végrehajtása többféle szűkítést igényel:
  a. amikor `B` behelyettesítődik: ha `B=1`, fel kell venni a korlátot, ha `B=0`, fel kell venni a negáltját a korlát-tárba.
  b. amikor C-ről kiderül, hogy levezethető a tárból: `B=1` lesz
  c. amikor $\neg C$-ről kiderül, hogy levezethető a tárból: `B=0` lesz
- A fenti a., b. és c. szűkítések elvégzését három démon végzi.
- A levezethetőség-vizsgálat (b. és c.) különböző bonyolultsági szinteken végezhető el.

Korlátok levezethetősége

A levezethetőség (entailment) felderítésének szintjei

- Tartomány-levezethetőség (domain-entailment):
  A C n-változós korlát **tartomány-levezethető** az s tárból, ha változóinak s-ben megengedett tetszőleges $V_j \in D(Xj, s)$ értékkombinációjára $(j = 1, \ldots, n)$, $C(V_1, \ldots V_n)$ fennáll.
- Intervallum-levezethetőség (interval-entailment):
  C **intervallum-levezethető** s-ből, ha minden $V_j \in D'(Xj, s)$ értékkombinációra $(j = 1, \ldots, n)$, $C(V_1, \ldots V_n)$ fennáll.

Megjegyzések

- Ha C intervallum-levezethető, akkor tartomány-levezethető is.
- Az tartomány-levezethetőség vizsgálata általában bonyolultabb, mint az intervallum-levezethetőségé. Példa: `X #\= Y` tartomány-levezethető, ha `X` és `Y` tartományai diszjunktak; `X #\= Y` intervallum-levezethető, ha `X` és `Y` tartományainak lefedő intervallumai diszjunktak.

A SICStus által garantált levezethetőségi szintek

- A tükrözött halmaz-korlátok kiderítik a tartomány-levezethetőséget.
- A tükrözött *lineáris* aritmetikai korlátok legalább az intervallum-levezethetőséget kiderítik.
- A tükrözött nem-lineáris aritmetikai korlátokra nincs garantált szint.

Példák

```
| ?- X in 1..4, X #< Y #<=> B, X+Y #=9.
        B = 1, X in 1..4, Y in 5..8 ?
| ?- X+Y #= Z #<=> B, X=1, Z=6, Y in 1..10, Y#\=5.
        X = 1, Z = 6, Y in(1..4)\/(6..10), B in 0..1 ?
        % X+Y #\= Z tartomány-, de nem interv.-levezethető!
```

Mágikus sorozatok (folyt.)

Tükrözést használó változat

```
magikus3(N, L) :-
        length(L, N),
        N1 is N-1, domain(L, 0, N1),
        osszege(L, S), call(S #= N),
        szorzatosszege(L, 0, SS), call(SS #= N),
        elofordulasok3(L, 0, L),
        labeling([], L). % most már kell a címkézés!

% A korábbi elofordulasok/3 másolata
elofordulasok3([], _, _).
elofordulasok3([E|Ek], I, Sor) :-
        pontosan3(I, Sor, E),
        J is I+1, elofordulasok3(Ek, J, Sor).

% pontosan3(I, L, E): I L-ben pontosan E-szer fordul elő.
pontosan3(_, [], 0).
pontosan3(I, [X|L], N) :-
        X #= I #<=> B, N #= N1+B, pontosan3(I, L, N1).
```

A mágikus sorozat megoldásainak összehasonlítása (586/133Mhz)

variáns/adat	n=8	n=10	n=12	n=14	n=20	n=30
választós	10.17	227.96				
választós+`osszege`	1.35	6.26	28.69	127.29		
vál.+`szorzatosszege`	0.27	0.66	1.32	2.54		
vál.+`ossz`+`szorzossz`	0.20	0.48	1.02	1.90	10.59	108.94
tükrözéses	1.20	2.76				
tükrözéses+`osszege`	0.47	0.95	1.73	2.54		
tükr.+`szorzatosszege`	0.20	0.40	0.54	0.72		
tükr.+`ossz`+`szorzossz`	0.25	0.43	0.62	0.82	1.89	4.83

Logikai korlátok

Logikai korlát argumentuma lehet

- egy `B` változó, `B` automatikusan a `0..1` tartományra szűkül;
- egy tetszőleges tükrözhető aritmetikai- vagy halmazkorlát;
- egy tetszőleges logikai korlát.

A logikai korlátok (egyben függvényjelként is használhatók)

`#\ Q`	negáció	`op(710,  fy, #\).`
`P #/\ Q`	konjunkció	`op(720, yfx, #/\).`
`P #\/ Q`	diszjunkció	`op(740, yfx, #\/).`
`P #\ Q`	kizáró vagy	`op(730, yfx, #\).`
`P #=> Q`	implikáció	`op(750, xfy, #=>).`
`Q #<= P`	implikáció	`op(750, yfx, #<=).`
`P #<=> Q`	ekvivalencia	`op(760, yfx, #<=>).`

A tükrözött és logikai korlátok kapcsolata

- A korábban bevezetett tükrözési jelölés (C `<=>` `B`) a fenti logikaikorlát-fogalom speciális esete.
- De: a (C `<=>` `B`) alakú *elemi* korlát az, amire a logikai korlátok visszavezetődnek.
- Példa: `X#=4 #\/ Y#>6` $\longrightarrow$ `X#=4#<=>B1, Y#>6#<=>B2, B1+B2 #>0`
- A logikai korlátok viszonylag gyengén szűkítenek, pl. egy n-tagú diszjunkció csak akkor tud szűkíteni, ha egy kivételével valamennyi tagjának a negáltja levezethetővé válik (a példában ha `X#\=4` vagy `Y#=<6` levezethető lesz).

Példa: lovagok, lókötők és normálisak

Egy szigeten minden bennszülött lovag vagy lókötő. A lovagok mindig igazat mondanak. A lókötők mindig hazudnak. A normális emberek néha hazudnak, néha igazat mondanak. Kódolás: `normális` → 2, `lovag` → 1, `lókötő` → 0.

```
:- use_module(library(clpfd)).
:- op(700, fy, nem).       :- op(900, yfx, vagy).
:- op(800, yfx, és).       :- op(950, xfy, mondja).

% Az A bennszülött mondhatja az Áll állítást.
A mondja Áll :- értéke(A mondja Áll, 1).

% értéke(Állítás, Érték): Az Állítás igazságértéke Érték.
értéke(X = Y, E) :-
        X in 0..2, Y in 0..2, E #<=> (X #= Y).
értéke(X mondja M, E) :-
        X in 0..2, értéke(M, E0), E #<=> (X #= 2 #\/ E0 #= X).
értéke(M1 és M2, E) :-
        értéke(M1, E1), értéke(M2, E2), E #<=> E1 #/\ E2.
értéke(M1 vagy M2, E) :-
        értéke(M1, E1), értéke(M2, E2), E #<=> E1 #\/ E2.
értéke(nem M, E) :-
        értéke(M, E0), E #<=> #\E0.

% http://www.math.wayne.edu/~boehm/Probweek2w99sol.htm
% We are given three people, A, B, C, one of whom is
% a knight, one a knave, and one a normal (but not necessarily
% in that order). They make the following statements.
%                           A: I am normal
%                           B: A is right
%                           C: I am not normal
| ?- all_different([A,B,C]),
     A mondja A = 2, B mondja A = 2, C mondja nem C =2,
     labeling([], [A,B,C]).

                A = 0, B = 2, C = 1 ? ; no
```

Globális aritmetikai korlátok

Ezek a korlátok nem tükrözhetőek, intervallum-szűkítést biztosítanak.

`scalar_product(Coeffs, Xs, `*`Relop`*`, Value)`
Igaz, ha a `Coeffs` és `Xs` listák skalárszorzata a *`Relop`* relációban van a `Value` értékkel, ahol *`Relop`* aritmetikai összehasonlító operátor (`#=`, `#<`, stb.).
`Coeffs` egészekből álló lista, `Xs` elemei és `Value` egészek vagy korlát változók lehetnek.
Megjegyzés: minden lineáris aritmetikai korlát átalakítható egy `scalar_product` hívássá.

`sum(Xs, `*`Relop`*`, Value)`
Jelentése: Σ `Xs` *`Relop`* `Value`.
Ekvivalens a következővel: `scalar_product(Csupa1, Xs, `*`Relop`*`, Value)`, ahol `Csupa1` csupa `1` számból álló lista, `Xs`-sel azonos hosszú.

Példa

```
send(List, SEND, MORE, MONEY) :-
        List= [S,E,N,D,M,O,R,Y],
        Pow10 = [1000,100,10,1],
        all_different(List), S #\= 0, M#\= 0,
        scalar_product(Pow10, [S,E,N,D], #=, SEND),
        %   SEND #=  1000*S+100*E+10*N+D,
        scalar_product(Pow10, [M,O,R,E], #=, MORE),
        %   MORE #= 1000*M+100*O+10*R+E,
        scalar_product([10000|Pow10], [M,O,N,E,Y], #=, MONEY),
        %   MONEY #= 10000*M+1000*O+100*N+10*E+Y,
        SEND+MORE #= MONEY.
```

Ezzel befejeztük a halmaz-, aritmetikai, logikai és tükrözött korlátok ismertetését.

A formula-korlátok megvalósítása

Formula-korlátok

- Formula-korlátnak hívjuk az operátoros jelöléssel írt korlátot, azaz az eddig ismertetetteket, kivéve a `sum/3` és `scalar_product/4` korlátokat.
- A formula-korlátokat a rendszer nem könyvtári eljárással valósítja meg, hanem a Prolog `goal_expansion/3` kampójának segítségével.
- A kampó-eljárás *fordítási időben* a formula-korlátot, egy `scalar_product/4` korlátra, és/vagy nem-publikus elemi korlátokra fejti ki.
- A formula-korlátok kifejtése `call/1`-be ágyazással elhalasztható a korlát *futási időben* való felvételéig.

A legfontosabb elemi korlátok a `clpfd` modulban

- aritmetika:`'x+y=t'/3 'x*y=z'/3 'x/y=z'/3 'x mod y=z'/3 '|x|=y'/2 'max(x,y)=z'/3 'min(x,y)=z'/3`
- összehasonlítás: `'x=y'/2, 'x=<y'/2, 'x\=y'/2` és tükrözött változataik: `iff_aux('x` *Rel* `y'(X,Y), B)`, ahol *Rel* a `= =< \=` egyike.
- halmaz-korlátok: `propagate_interval(X,Min,Max)` `prune_and_propagate(X,Halmaz)`
- logikai korlátok: `bool(Muvkod,X,Y,Z) % jelentése: X Muv Y = Z`
- optimalizálások: `'x*x=y'/2 'ax=t'/3 'ax+y=t'/4 'ax+by=t'/5 't+u=<c'/3 't=u+c'/3 't=<u+c'/3 't\=u+c'/3 't>=c'/2` stb.

Az elemi korlátok szűkítési szintje

- **Definíció:** A C korlát **pont-szűkítő**, ha minden olyan tár esetén tartomány-szűkítő, amelyben C változói, legfeljebb egy kivételével be vannak helyettesítve. (Másképpen: ha minden ilyen tár esetén a korlát a behelyettesítetlen változót pontosan a C reláció által megengedett értékekre szűkíti.)
- Az elemi korlátok mind pont-szűkítők.

Korlátok kifejtése

Példák

```
| ?- use_module(library(clpfd)).
| ?- goal_expansion(X*X+2*X+1 #= Y, user, Impl).
        Impl = clpfd:('x*x=y'(X,_A),
               scalar_product([1,-2,-1],[Y,X,_A],#=,1)) ?

| ?- goal_expansion((X+1)*(X+1) #= Y, user, Impl).
        Impl = clpfd:('t=u+c'(_A,X,1),'x*x=y'(_A,Y)) ?

| ?- goal_expansion(abs(X-Y)#>1, user, Impl).
        Impl = clpfd:('x+y=t'(Y,_A,X),
               '|x|=y'(_A,_B),'t>=c'(_B,2)) ?

| ?- goal_expansion(X#=4 #\/ Y#>6, user, Impl).
        Impl = clpfd:iff_aux(clpfd:'x=y'(X,4),_A),
               clpfd:iff_aux(clpfd:'x=<y'(7,Y),_B),
               clpfd:bool(3,_A,_B,1) ?  % 3 a \/ kódja

| ?- goal_expansion(X*X*X*X #= 16, user, Impl).
        Impl = clpfd:('x*x=y'(X,_A),'x*y=z'(_A,X,_B),
                      'x*y=z'(_B,X,16)) ?

| ?- goal_expansion(X in {1,2}, user, Impl).
        Impl = clpfd:propagate_interval(X,1,2) ?

| ?- goal_expansion(X in {1,2,5}, user, Impl).
        Impl = clpfd:prune_and_propagate(X,[[1|2],[5|5]]) ?
```

Megjegyzések

- Lineáris korlátok esetén a kifejtés megőrzi a pont- és intervallum-szűkítést.
- Általános esetben a kifejtés még a pont-szűkítést sem őrzi meg, pl
  `| ?- X in 0..10, X*X*X*X#=16.` $\longrightarrow$ `X in 1..4`

Címkéző eljárások

`labeling(Opciók, Változók)`:
A `Változók` lista minden elemét behelyettesíti, az `Opciók` lista által előírt módon. Az alábbi öt csoport mindegyikéből legfeljebb egy opció szerepelhet.

- A következő címkézendő változó kiválasztási szempontjai (ahol több szempont van, a későbbi csak akkor számít, ha a megelőzők egyenlőek):
  - `leftmost` — legbaloldalibb (alapértelmezés);
  - `min` — a legkisebb alsó határú; a legbaloldalibb;
  - `max` — a legnagyobb felső határú; a legbaloldalibb;
  - `ff` — („first-fail" elv): a legkisebb tartományú; a legbaloldalibb;
  - `ffc` — a legkisebb tartományú; a legtöbb korlátban előforduló; a legbaloldalibb;
  - `variable(Sel)` — (meta-opció) `Sel` egy felhasználói eljárás, amely kiválasztja a következő címkézendő változót (lásd a következő lapon).
- A tartomány felbontása a kiválasztott `X` változóra:
  - `step` — `X #= B` és `X #\= B` közötti választás, ahol `B` az `X` tartományának alsó vagy felső határa (alapértelmezés);
  - `enum` — többszörös választás `X` lehetséges értékei közül;
  - `bisect` — `X #< M` és `X #>= M` közötti választás, ahol `M` az `X` tartományának középső eleme ($\mathtt{M} = (min(\mathtt{X}) + max(\mathtt{X}))//2$);
  - `value(Enum)` — (meta-opció) `Enum` egy eljárás, amelynek az a feladata, hogy leszűkítse `X` tartományát (lásd a következő lapon).
- A tartomány bejárási iránya (`value` esetén érdektelen):
  - `up` — alulról felfelé (alapértelmezés);
  - `down` — felülről lefelé.
- A keresett megoldások:
  - `all` — visszalépéssel az összes megoldást felsorolja (alapértelmezés);
  - `minimize(X)` ill. `maximize(X)` — csak egy megoldást keres, `X`-re vonatkozóan a minimálisat ill. a maximálisat.
- Statisztika: `assumptions(K)` — egyesíti `K`-t a sikeres megoldáshoz vezető ágon levő változó-kiválasztások számával.

Címkéző eljárások (folyt.)

`labeling/2` — **meta-opciók**

- `variable(Sel)` — `Sel` egy eljárás, amely kiválasztja a következő címkézendő változót. `Sel(Vars,Selected,Rest)` alakban hívja meg a rendszer, ahol `Vars` a még címkézendő változók/számok listája.

  `Sel`-nek determinisztikusan sikerülnie kell egyesítve `Selected`-et a címkézendő *változóval* és `Rest`-et a maradékkal.

  `Sel`-nek egy meghívható kifejezésnek kell lennie. A 3 argumentumot a rendszer fűzi `Sel` argumentumlistájának végére.

- `value(Enum)` — `Enum` egy eljárás, amelynek az a feladata, hogy leszűkítse `X` tartományát. `Enum(X,Rest,BB)` alakban hívják meg, ahol `[X|Rest]` a még címkézendő változók listája.

  `Enum`-nak nemdeterminisztikusan kell leszűkítenie `X` tartományát az összes lehetséges módon. Az első kivételével minden megoldásnál meg kell hívnia az `apply_bound(BB)` eljárást hogy biztosítsa a branch-and-bound keresés helyességét.

  `Enum`-nak egy meghívható kifejezésnek kell lennie. A 3 argumentumot a rendszer fűzi `Enum` argumentumlistájának a végére.

Példa a `variable` opció használatára

```
% A Vars-beli változók között Sel a Hol-adik, Rest a maradék.
valaszt(Hol, Vars, Sel, Rest) :-
    szur(Vars, Szurtek), length(Szurtek, Len),
    N is integer(Hol*Len), nth0(N, Szurtek, Sel, Rest).

% szur(Vk, Szk): A Vk listában levő változók listája Szk.
szur([], []).
szur([V|Vk], Szk) :-       nonvar(V), !, szur(Vk, Szk).
szur([V|Vk], [V|Szk]) :-   szur(Vk, Szk).
```

```
queens([], 8, Qs).                           → Qs = [1,5,8,6,3,7,2,4]
queens([variable(valaszt(0.5))], 8, Qs)  → Qs = [7,2,6,3,1,4,8,5]
queens([variable(valaszt(0.7))], 8, Qs)  → Qs = [5,7,2,6,3,1,4,8]
```

A címkézés hatékonysága

Példa

- a korábbi `queens` eljárás,
- összes megoldását keressük,
- különböző címkézési opciókkal,
- különböző méretű táblákra,
- 433 MHz DEC Alpha gépen.

címkézés/méret	n=7	n=8	n=9	n=10	n=11	n=12
megoldások száma	40	92	352	724	2680	14200
`[]`	0.051	0.183	0.743	3.045	14.387	73.402
`[enum]`	0.039	0.140	0.587	2.413	11.447	60.886
`[bisect]`	0.042	0.147	0.619	2.539	12.070	63.420
`[min]`	0.234	1.241	7.281	45.809	315.754	2214.046
`[max]`	0.065	0.242	0.966	4.203	20.246	107.534
`[ff]`	0.053	0.177	0.697	2.712	12.196	60.278
`[ffc]`	0.057	0.196	0.768	3.000	13.429	66.257
`[enum,ff]`	0.047	0.161	0.640	2.494	11.266	56.275
`[enum,variable( valaszt(0.5))]`	0.041	0.143	0.542	2.101	9.432	45.909
`[enum,variable( valaszt(0.7))]`	0.041	0.144	0.588	2.307	10.244	49.756

További címkéző eljárások

`indomain(X)` — ekvivalens a `labeling([enum], [X])` hívással.

`minimize(Cél, X)` ill. `maximize(Cél, X)`
A `Cél` *ismételt hívásával* megkeresi az `X` változó minimális ill. maximális értékét. A `minimize/2` eljárás definíciója:

```
minimize(Goal, Var) :-
        minimize(Goal, Var, fail, 33554431).

% minimize(Goal, Var, BestGoal, UB): Var is the minimal value < UB
% allowed by Goal, or, failing that, Goal = BestGoal.
minimize(Goal, E, _, UB) :- var(UB), !,
        prolog:illarg(var, minimize(Goal,E), 2).
minimize(Goal, E, _, UB) :-
        E #< UB,
        findall(Goal-E, (Goal -> true), [Best1-UB1]), !,
        minimize(Goal, E, Best1, UB1).
minimize(Goal, E, Goal, E).
```

Példa a `minimize/2` használatára:

```
| vo(N, P) :-        % N valódi osztója P-nek.
     N1 is N-1, domain([X,P], 2, N1), P*X#=N, labeling([], [X,P]).

| ?- spy(minimize/4, call-print).
{Conditional spypoint for user:minimize/4 added, BID=1}

| ?- minimize(vo(5621, P), P).
 *      1      1 Call: minimize(vo(5621,_2),_2,fail,33554431)
 *      1      1 Call: minimize(vo(5621,_8),_8,vo(5621,803),803)
 *      1      1 Call: minimize(vo(5621,_8),_8,vo(5621,511),511)
 *      1      1 Call: minimize(vo(5621,_8),_8,vo(5621,77),77)
 *      1      1 Call: minimize(vo(5621,_8),_8,vo(5621,73),73)
 *      1      1 Call: minimize(vo(5621,_8),_8,vo(5621,11),11)
 *      1      1 Call: minimize(vo(5621,_8),_8,vo(5621,7),7)
P = 7 ?
```

Kis házi feladat: számkeresztrejtvény

A feladat

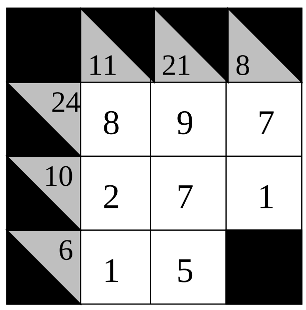
- Adott egy keresztrejtvény, amelyek egyes kockáiba 1..*Max* számokat kell elhelyezni (szokásosan $Max = 9$).
- A vízszintes és függőleges „szavak” meghatározásaként a benne levő számok összege van megadva.
- Egy szóban levő betűk (kockák) mind különböző értékkel kell bírjanak.

A keresztrejtvény Prolog ábrázolása:

- listák listájaként megadott mátrix;
- a fekete kockák helyén $F\backslash V$ alakú struktúrák vannak, ahol F és V az adott kockát követő függőleges ill. vízszintes szó összege, vagy `x`, ha nincs ott szó;
- a kitöltendő fehér kockákat (különböző) változók jelzik.

A megirandó Prolog eljárás és használata

```
% szamker(SzK, Max): SzK az 1..Max számokkal
% helyesen kitöltött számkeresztrejtvény.

pelda(mini, [[x\ x,11\x,21\x, 8\x],
             [x\24,   _,   _,   _],
             [x\10,   _,   _,   _],
             [x\6,    _,   _, x\x]], 9).
```




```
| ?- pelda(mini, SzK, _Max), szamker(SzK, _Max).
                SzK = [[x\x, 11\x,21\x,8\x],
                       [x\24,8,   9,   7 ],
                       [x\10,2,   7,   1 ],
                       [x\6, 1,   5,   x\x]] ? ; no
```

Kombinatorikus (szimbolikus) korlátok

Általános tulajdonságok

- A kombinatorikus korlátok nem tükrözhetőek.
- A kombinatorikus korlátokban a korlát-változók helyett mindig írható egész szám is.

Értékek számolása

`count(Val, List, `*`Relop`*`, Count)`
Jelentése: a `Val` egész szám `List`-ben való előfordulásainak száma n, és fennáll az „n *`Relop`* `Count`" reláció. Itt *`Relop`* a hat összehasonlító reláció egyike: `#=`, `#\=`, `#<` ....
Tartomány-szűkítést biztosít.
Például a korábbi `pontosan/3` predikátum visszavezethető a `count/4` eljárásra:

```
% Az I szám L-ben pontosan E-szer fordul elő.
pontosan(I, L, E) :- count(I, L, #=, E).
```

Példa: mágikus sorozatok, 4. változat

```
% Az L lista egy N hosszúságú mágikus sorozatot ír le.
magikus4(N, L) :-
        length(L, N), N1 is N-1, domain(L, 0, N1),
        elofordulasok4(L, 0, L, Egyhat),
        sum(L, #=, N),
        scalar_product(Egyhat, L, #=, N),
        labeling([], L).

% elofordulasok4(Ek, I, Sor, Egyhat): Sor-ban i, i+1, ...
% előfordulásainak száma Ei, Ei+1, ..., ahol Ek =[Ei,Ei+1,...].
% Egyhat az Ek-val azonos hosszú [i,i+1,...] együttható-lista.
elofordulasok4([], _, _, []).
elofordulasok4([E|Ek], I, Sor, [I|EH]) :-
        count(I, Sor, #=, E),
        J is I+1, elofordulasok4(Ek, J, Sor, EH).
```

Kombinatorikus korlátok — függvények, relációk

Speciális függvény-kapcsolatok leírása

`element(X, List, Y)`
Jelentése: `List` `X`-edik eleme `Y` (1-től számozva). Itt `X` és `Y` korlát-változók, `List` korlát-változókból álló lista.
Az `X` változóra nézve tartomány-szűkítést, az `Y` és `List` változókra nézve intervallum-szűkítést biztosít.
Példák:

```
| ?- element(X, [0,1,2,3,4], Y), X in {2,5}.  % Y #= X-1
                        X in {2}\/{5}, Y in 1..4 ?
| ?- element(X, [0,1,2,3,4], Y), Y in {1,4}.  % Y #= X-1
                        X in {2}\/{5}, Y in {1}\/{4} ?
```

```
% X #= C #<=> B megvalósítása, 1=<{X,C}=<6 esetére (C konstans).
beq(X, C, B) :-
        X in 1..6, call(I #= X+6-C),
        element(I, [0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0], B).
```

Kétargumentumú relációk leírása

`relation(X, Hozzárendelés, Y)`
Itt `X` és `Y` korlát-változók, `Hozzárendelés` *egész* - *KonstansHalmaz* alakú párok listája (ahol mindegyik *egész* csak egyszer fordulhat elő). Jelentése: `Hozzárendelés` tartalmaz egy `X-Halmaz` párt, ahol `Y` eleme a `Halmaz`-nak.
Tetszőleges bináris reláció definiálására használható.
Tartomány-szűkítést biztosít. Példa:

```
'abs(x-y)>1'(X,Y) :-
        relation(X, [0-(2..5), 1-(3..5), 2-{0,4,5},
                     3-{0,1,5}, 4-(0..2), 5-(0..3)], Y).
```

`'abs(x-y)>1'(X,Y), X in 2..3.` → `Y in(0..1)`∨`(4..5)`

Kombinatorikus korlátok — „mind különbözőek”

`all_different(Vs)` `all_different(Vs, Options)`
`all_distinct(Vs)` `all_distinct(Vs, Options)`
Jelentése: a `Vs` korlát-változó-lista elemei páronként különbözőek. A korlát szűkítési mechanizmusát az `Options` opció-lista szabályozza, lehetséges elemei:

- `complete(Boolean)` — a szűkítés erősségét szabályozza. `Boolean` lehet `true`, amely tartomány-szűkítést jelent, vagy `false`, amely a nemegyenlőség páronkénti felvételével azonos erejű szűkítést jelent.
- `on(On)` — az ébredést szabályozza. `On` lehet `value`, amely változók behelyettesítésekor ébreszt, `range`, amely a változók tartományának szélén történő változáskor ébreszt, vagy `domain`, amely a változók tartományának bármiféle változásakor ébreszt. A `complete(false)` beállításnál `range` és `domain` esetén sem tud erősebben szűkíteni, mint `value` esetén.

Az egyargumentumú változatok az alapértelmezett paraméterezésnek felelnek meg, ezek:

- `all_different(Vs, [on(value),complete(false)])`
- `all_distinct(Vs, [on(domain),complete(true)])`

Példa

```
pelda(Z, I, On, Complete) :-
     L = [X,Y,Z], domain(L, 1, 3),
     all_different(L, [on(On),complete(Complete)]),
%    all_distinct(L, [on(On),complete(Complete)]), % mindegy!
     X #\= I, Y #\= I.
```

```
 | ?- pelda(Z, 3, domain, false).  →   Z in 1..3
 | ?- pelda(Z, 3, value, true).     →   Z in 1..3
 | ?- pelda(Z, 3, range, true).     →   Z = 3
 | ?- pelda(Z, 2, range, true).     →   Z in 1..3
 | ?- pelda(Z, 2, domain, true).    →   Z = 2
```

Kombinatorikus korlátok — leképezések, gráfok

`assignment(Xs, Ys)` `assignment(Xs, Ys, Options)`
`Xs` és `Ys` korlát-változókból alkotott azonos (n) hosszúságú listák. Teljesül, ha `X[i]` és `Y[i]` mind az `1..`n tartományban vannak és `X[i]=j` $\Leftrightarrow$ `Y[j]=i`.
Azaz: `Xs` egy-egyértelmű leképezés az `1..`n halmazon (az `1..`n `számok` egy permutációja) és `Ys` az `Xs` inverze.
Az `Options` lista ugyanolyan, mint az `all_different/[1,2]` korlát esetében, az alapértelmezés `[on(domain),complete(true)]`.

`circuit(Xs)`
`Xs` n hosszúságú lista. Igaz ha minden `X[i]` az `1..`n tartományba esik és `X[1], X[X[1]], ...` (n-szer ismételve) az `1..`n egy permutációja.
Azaz: `Xs` egy egyetlen ciklusból álló permutációja az `1..`n számoknak.
Gráf-értelmezés: Legyen egy n szögpontú irányított gráfunk, jelöljük a pontokat az `1..`n számokkal. Vegyünk fel n korlát-változót, `X[i]` tartománya álljon azon `j` számokból, amelyekre `i`-ből vezet `j`-be él. Ekkor `circuit(Xs)` azt jelenti, hogy az `i` $\rightarrow$ `X[i]` élek a gráf egy Hamilton-körét adják.

`circuit(Xs, Ys)`
Ekvivalens a következővel: `circuit(Xs), assignment(Xs, Ys)`.

Példák

```
| ?- length(L, 3), domain(L, 1, 3), assignment(L, LInv), L=[2|_],
     labeling([], L).   L = [2,1,3], LInv = [2,1,3] ? ;
                        L = [2,3,1], LInv = [3,1,2] ? ; no
| ?- length(L, 3), domain(L, 1, 3), circuit(L, LInv), L=[2|_].
                        L = [2,3,1], LInv = [3,1,2] ? ; no

% Cikcakk feladat: 1 2 2    _1 _2 _3   megoldása:  2 4 6
%                  3 1 3    _4 _5 _6               7 3 8
%                  4 4 1    _7 _8 _9               5 9 1

| ?- L=[_1,_2,_3,_4,_5,_6,_7,_8,1], _1=2, _2 in {4,6}, _3=6,
     _4 in {7,8}, _5 in {2,3}, _6=8, _7=5, _8 in {5,9},
     circuit(L).
                        L = [2,4,6,7,3,8,5,9,1] ? ; no
```

Kombinatorikus korlátok — ütemezés

`cumulative(Starts, Durations, Resources, Limit)`
`cumulative(Starts, Durations, Resources, Limit, Options)`
Jelentése: a `Starts` kezdőidőpontokban elkezdett, `Durations` ideig tartó és `Resources` erőforrásigényű feladatok bármely időpontban összesített erőforrásigénye nem haladja meg a `Limit` határt (és fennállnak az opcionális precedencia korlátok). Az első három argumentum korlát-változókból álló egyforma hossszú lista, az utolsó egy korlát-változó. Jelöljük:

a = min($S1$,...,Sn), (kezdőidőpont)
b = max($S1$+$D1$,...,Sn+Dn), (végidőpont)
Rij = Rj, ha Sj =< i < Sj+Dj, egyébként Rij = 0; (a j. feladat erőforrásigénye az i. időpontban)

Ezekkel a jelölésekkel a korlát jelentése (a precedencia-korlátok nélkül):

$Ri1$+...+Rin =< $Limit$, minden a =< i < b esetén.

Az `Options` lista a következő dolgokat tartalmazhatja (a `Boolean` változók alapértelmezése `false`):

- `precedences(Ps)` — `Ps` precedencia korlátokat ír le. `Ps` `d(I,J,D)` alakú kifejezések listája, ahol `I` és `J` feladatok sorszámai, és `D` egy pozitív egész vagy `sup`. Egy ilyen kifejezés a következő korlátot jelenti:

  `SI+D =< SJ` vagy `SJ =< SI`, ha `D` egész
  `SJ =< SI`, ha `D` `sup`

  Egy `d(I,J,D)` megszorítás például az `I`-ről a `J` feladatra való átállás idejének előírására használható (D = DI+átállás)
- `decomposition(Boolean)` — Ha `Boolean` `true`, akkor minden ébredéskor megpróbálja kisebb darabokra bontani a korlátot. Pl. ha van két át nem lapoló feladathalmazunk, akkor ezeket külön–külön kezelhetjük, ami az algoritmusok gyorsabb lefutását eredményezheti.
- `resource(R)` — speciális ütemezési címkézéshez szükséges opció
- szűkítési algoritmus finomítására szolgáló opciók

`serialized(Starts, Durations)`
`serialized(Starts, Durations, Options)`
A `cumulative` speciális esete, ahol az összes erőforrás-igény és a korlát is 1.

Ütemezés — példafeladat

Egy egyszerű ütemezési probléma

- a rendelkezésre álló erőforrások száma: 13 (pl. 13 ember)
- az egyes tevékenységek időtartama és erőforrásigénye:

Tevékenység	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7
Időtartam	16	6	13	7	5	18	4
Erőforrásigény	2	9	3	7	10	1	11

A program szövege:

```
:- use_module(library(clpfd)).

schedule(Ss, End) :-
        length(Ss, 7),
        Ds = [16, 6,13, 7, 5,18, 4],
        Rs = [ 2, 9, 3, 7,10, 1,11],
        domain(Ss, 0, 30),
        End in 0.. 50,
        after(Ss, Ds, End),
        cumulative(Ss, Ds, Rs, 13),
        labeling([ff,minimize(End)], [End|Ss]).

after([], [], _).
after([S|Ss], [D|Ds], E) :- E #>= S+D, after(Ss, Ds, E).

| ?- schedule(Ss, End).

Ss = [0,16,9,9,4,4,0], End = 22 ? ;
no
```

Ütemezés — fejlett lehetőségek

Példa precedencia-korlátra

```
| ?- _S = [S1,S2], domain(_S,0,9), S1 #< S2,
     serialized(_S, [4,4], []).
        S1 in 0..8, S2 in 1..9 ? ;  no

| ?- _S = [S1,S2], domain(_S,0,9),
     serialized(_S, [4,4], [precedences([d(2,1,sup)])]).
        S1 in 0..5, S2 in 4..9 ? ;  no
```

A szűkítési algoritmus finomítására szolgáló opciók

- `path_consistency(Boolean)` Ha `Boolean` `true`, akkor figyeli a feladatok kezdési időpontja közti különbségek konzisztenciáját.

  Ez egy olyan redundáns korlátra hasonlít, amely minden i, j párra felveszi a $\texttt{SD}_{ij}$ `#=` $\texttt{S}_j$ `-` $\texttt{S}_i$, és minden i, j, k hármasra a $\texttt{SD}_{ik}$ `#=` $\texttt{SD}_{ij}$ `+` $\texttt{SD}_{jk}$ korlátot.

- `static_sets(Boolean)` Ha `Boolean` `true`, akkor, ha bizonyos feladatok sorrendje ismert, akkor ennek megfelelően megszorítja azok kezdő időpontjait.

  ```
  | ?- _L = [S1,S2,S3],  domain(_L, 0, 9), (SS = false ; SS = true),
       serialized(_L, [5,2,7], [static_sets(SS),
                               precedences([d(3,1,sup), d(3,2,sup)])]).
          SS = false, S1 in 0..4, S2 in(0..2)\/(5..7), S3 in 5..9 ? ;
          SS = true,  S1 in 0..4, S2 in(0..2)\/(5..7), S3 in 7..9 ?
  ```

- `edge_finder(Boolean)` Ha `Boolean` `true`, akkor megpróbálja kikövetkeztetni egyes feladatok sorrendjét.

  ```
  | ?- _S = [S1,S2,S3], domain(_S, 0, 9),
       serialized(_S, [8,2,2], [edge_finder(true)]).
          S1 in 4..9, S2 in 0..7, S3 in 0..7 ? ;  no
  ```

Ütemezés — speciális címkézés

A címkézéshez szükséges opció

- `resource(R)` R-et egyesíti egy kifejezéssel, amelyet később átadhatunk az `order_resource/2` eljárásnak hogy felsoroltassuk a feladatok lehetséges sorrendjeit.

A `cumulative/3`-hoz tartozó címkéző eljárás

`order_resource(+Options, +Resource)`
Igaz, ha a `Resource` által leírt feladatok elrendezhetők valamilyen sorrendbe. Ezeket az elrendezéseket felsorolja.
A `Resource` argumentumot a fenti ütemező eljárásoktól kaphatjuk meg, az `Options` lista pedig a következő dolgokat tartalmazhatja (mindegyik csoportból legfeljebb egyet, alapértelmezés: `[first,est]`):

- stratégia
  - `first` Mindig olyan feladatot választunk ki, amelyet az összes többi elé helyezhetünk.
  - `last` Mindig olyan feladatot választunk ki, amelyet az összes többi után helyezhetünk.
- tulajdonság: `first` stratégia esetén az adott tulajdonság minimumát, `last` esetén a maximumát tekintjük az összes feladatra nézve.
  - `est` legkorábbi lehetséges kezdési idő
  - `lst` legkésőbbi lehetséges kezdési idő
  - `ect` legkorábbi lehetséges befejezési idő
  - `lct` legkésőbbi lehetséges befejezési idő

Példa

```
| ?- _S=[S1,S2,S3], domain(_S, 0, 9),
     serialized(_S, [5,2,7],
                [precedences([d(3,1,sup), d(3,2,sup)]),
                 resource(_R)]), order_resource([],_R).
        S1 in 0..2, S2 in 5..7, S3 in 7..9 ? ;
        S1 in 2..4, S2 in 0..2, S3 in 7..9 ? ;  no
```

Kombinatorikus korlátok — diszjunkt szakaszok

`disjoint1(Lines) disjoint1(Lines, Options)`
Jelentése: A `Lines` által megadott intervallumok diszjunktak.
`Lines` `F(SJ,DJ)` vagy `F(SJ,DJ,TJ)` alakú kifejezések listája, ahol `SJ` és `DJ` rendre a `J` szakasz kezdőpontját illetve hosszát megadó véges tartományú változók.
`F` tetszőleges funktor, `TJ` egy atom vagy egy egész, amely a szakasz típusát definiálja (alapértelmezése 0).
Az `Options` lista a következő dolgokat tartalmazhatja (a `Boolean` változók alapértelmezése `false`):

- `decomposition(Boolean)` Ha `Boolean` `true`, akkor minden ébredéskor megpróbálja kisebb darabokra bontatni a korlátot.
- `global(Boolean)` Ha `Boolean` `true`, akkor egy redundáns algoritmust használ a jobb szűkítés érdekében.
- `wrap(Min,Max)` A szakaszok nem egy egyenesen, hanem egy körön helyezkednek el, ahol a `Min` és `Max` pozíciók egybeesnek (`Min` and `Max` egészek kell legyenek). Ez az opció a `Min..(Max-1)` intervallumba kényszeríti a kezdőpontokat.
- `margin(T1,T2,D)` Bármely `T1` típusú vonal végpontja legalább `D` távolságra lesz bármely `T2` típusú vonal kezdőpontjától, ha `D` egész. Ha `D` nem egész, akkor a `sup` atomnak kell lennie, ekkor minden `T2` típusú vonalnak előrébb kell lennie mint bármely `T1` típusú vonal.

Példa

```
| ?- domain([S1,S2,S3], 0, 9), (G = false ; G = true),
     disjoint1([S1-8,S2-2,S3-2], [global(G)]).
        G = false, S1 in 0..9, S2 in 0..9, S3 in 0..9 ? ;
        G = true,  S1 in 4..9, S2 in 0..7, S3 in 0..7 ?
```

Kombinatorikus korlátok — diszjunkt téglalapok

`disjoint2(Rectangles)` `disjoint2(Rectangles, Options)`
Jelentése: A `Rectangles` által megadott téglalapok nem metszik egymást.
`Rectangles` `F(SJ1,DJ1,SJ2,DJ2)` vagy `F(SJ1,DJ1,SJ2,DJ2,TJ)` alakú kifejezések listája, ahol `SJ1` és `DJ1` rendre a `J` téglalap X irányú kezdőpontját és hosszát jelölő véges tartományú változók. `SJ2` és `DJ2` ezek Y irányú megfelelőik.
`F` tetszőleges funktor. `TJ` egy egész vagy atom, amely a téglalap típusát jelöli (alapértelmezése 0).
Az `Options` lista a következő dolgokat tartalmazhatja (a `Boolean` változók alapértelmezése `false`):

- `decomposition(Boolean)` Mint `disjoint1/2`.
- `global(Boolean)` Mint `disjoint1/2`.
- `wrap(Min1,Max1,Min2,Max2)` `Min1` és `Max1` egész számok vagy rendre az `inf` vagy `sup` atom. Ha egészek, akkor a téglalapok egy olyan henger palástján helyezkednek el, amely az X irányban fordul körbe, ahol a `Min1` és `Max1` pozíciók egybeesnek. Ez az opció a `Min1..(Max1-1)` intervallumba kényszeríti az `SJ1` változókat.

  `Min2` és `Max2` ugyanezt jelenti Y irányban.

  Ha mind a négy paraméter egész, akkor a téglalapok egy tóruszon helyezkednek el.
- `margin(T1,T2,D1,D2)` Ez az opció minimális távolságokat ad meg, `D1` az X, `D2` az Y irányban bármely `T1` típusú téglalap vég- és bármely `T2` típusú téglalap kezdőpontja között.

  `D1` és `D2` egészek vagy a `sup` atom. `sup` azt jelenti, hogy a `T2` típusú téglalapokat a `T1` típusú téglalapok elé kell helyezni a megfelelő irányban.

Példa

```
| ?- domain([X1,X2,X3], 0, 2), domain([Y1,Y2], 0, 1),
     disjoint2([r(X1,1,Y1,1),r(X2,2,Y2,2),r(X3,5,0,3)]).
         X2 = 0, X3 = 2, Y1 = 0, Y2 = 1, X1 in 0..1 ?
```

Egyéb eljárások

Statisztika, válaszok

- `fd_statistics(Kulcs, Érték)`: A `Kulcs`-hoz tartozó számláló `Érték`-ét kiadja és lenullázza. Lehetséges kulcsok és számlált események:
  - `constraints` — korlát létrehozása;
  - `resumptions` — korlát felébresztése;
  - `entailments` — korlát levezethetővé válásának észlelése;
  - `prunings` — tartomány szűkítés;
  - `backtracks` — a tár ellentmondásossá válása (Prolog meghiúsúlások nem számítanak).
- `fd_statistics`: az összes számláló állását kiírja és lenullázza őket.
- `clpfd:full_answer`: ez egy dinamikus kampó eljárás. Ha nem sikerül, akkor a rendszer egy kérdésre való válaszoláskor csak a kérdésben előforduló változókat írja ki, és a még alvó korlátokat nem írja ki. Ha sikerül, kiírja az összes változót és a le nem vezetett korlátokat. (Sajnos a SICStus 3.8.4 változatában nem (mindig) működik.)

Példa

```
% Az N-királynő feladat összes megoldása Sols, Lab címkézéssel való
% végrehajtása Time msec-ig tart és Btracks FD visszalépést igényel.
run_queens(Lab, N, Sols, Time, Btracks) :-
   fd_statistics(backtracks, _),
   statistics(runtime, _),
   findall(Q, queens(Lab, N, Q), Sols),
   statistics(runtime, [_,Time]),
   fd_statistics(backtracks, Btracks).
```

Felhasználói korlátok

Mit kell meghatározni egy új korlát definiálásakor?

- Az aktiválás feltételei: mikor szűkítsen (melyik változó milyen jellegű tartomány-változásakor)?
- A szűkítés módja: hogyan szűkítse egyes változóit a többi tartományának függvényében?
- A befejezés feltétele: mikor fejezheti be a működését (mikor válik levezethetővé)?
- ha reifikálni is akarjuk:
  - hogyan kell végrehajtani a negáltját (aktiválás, szűkítés, befejezés)?
  - hogyan döntsük el a tárból való levezethetőségét?
  - hogyan döntsük el a negáltjának a levezethetőségét?

Korlát-definiálási lehetőségek SICStusban

- FD predikátumok: az ún. indexikálisokkal rögzített változó-számú korlátokat lehet definiálni, egy speciális funkcionális nyelv segítségével (reifikált korlátok is meghatározhatók).
- Globális korlátok: Prolog kódként lehet teljesen általánosan megadni a korlátok működését (aktiválás, szűkítés, befejezés), a reifikálás külön nem támogatott.
- A könyvtári korlátok mindegyike vagy globális korlátként definiált, vagy FD-predikátum-hívásokra fejtődik ki

FD predikátumok — példák

```
'x+y=t'(X,Y,T) +:
        X in min(T) - max(Y)..max(T) - min(Y),
        Y in min(T) - max(X)..max(T) - min(X),
        T in min(X) + min(Y)..max(X) + max(Y).

'x=<y'(X, Y) +:
        X in inf..max(Y),
        Y in min(X)..sup.
```

FD predikátumok

Egy FD predikátum 1..4 klózból áll

- Az FD predikátum klózai speciális nyakjelűek: a `+:` jelű kötelező, a további `-:`, `+?`, `-?` nyakjelűek csak reifikálandó korlátok esetén kellenek.
- A `+:` és `-:` jelűek ún. szűkítő (mondó, *tell*) indexikálisokból állnak, az adott korlát és negáltja tárra gyakorolt hatását írják le.
- A `+?` és `-?` jelűek egy ún. kérdező (*ask*) indexikálist tartalmaznak, az adott korlát és negáltja levezethetőségi feltételeit definiálják.
- Az FD predikátum fejében az argumentumok különböző változók; törzsében csak ezeket a változókat tartalmazó indexikálisok lehetnek.

Indexikálisok

- Alakja: „*Változó* `in` *Tartománykifejezés*”, ahol *Tartománykifejezés*, a *Változó*-tól különböző **összes** fejváltozót tartalmazza.
- A *Tartománykifejezés*, angolul *Range*, egy (parciális) halmazfüggvényt ír le, azaz a benne szereplő változók tartományai függvényében egy tartományt állít elő. Pl. `min(X)..sup` értéke `X in 1..10` esetén `1..sup`.
- Az `X in` *R*`(Y,Z,...)` *szűkítő* indexikális jelentése a következő reláció:

$$\{\langle x, y, z, \ldots \rangle \, | x \in R(\{y\}, \{z\}, \ldots)\}$$

  Alapszabály: az egy FD-klózban levő indexikálisok jelentése (azaz az általuk definiált reláció) azonos kell legyen!!!

- az „`X in` *R*” szűkítő indexikális végrehajtásának lényege: `X`-et az *R* tartománykifejezés értékével lehet szűkíteni (pontosabban később).

Példa: `'x+y=t'/3` tartomány-szűkítéssel

```
'x+y=t tsz'(X,Y,T) +:
      X in dom(T) - dom(Y),      % {t − y|t ∈ dom(T), y ∈ dom(Y)}
      Y in dom(T) - dom(X),
      T in dom(X) + dom(Y).
```

Indexikálisok szintaxisa

```
Indexical --> X in Range

X --> variable                      { korlát-változó }

Constant --> integer
  |   inf   |   sup                 { minusz/plusz végtelen }
  |   X                             { "pucér" változó-előfordulás:
                                      felfüggeszti az indexikálist
                                      míg X be nem helyettesítődik }
Term --> Constant
  |   card(X)                       { X tartományának mérete }
  |   min(X)                        { X alsó határa }
  |   max(X)                        { X felső határa }
  |   Term + Term | Term - Term
  |   Term * Term | Term mod Term
  |   - Term
  |   Term /> Term                  { felfelé kerekített osztás }
  |   Term /< Term                  { lefelé kerekített osztás }

ConstantSet -->  {Term,...,Term}

Range --> ConstantSet
  |   dom(X)                            { X tartománya }
  |   Term..Term                        { intervallum }
  |   Range/\Range                      { metszet }
  |   Range\/Range                      { únió }
  |   \Range                            { komplementer halmaz }
  |   - Range                           { pontonkénti negáció }
  |   Range + Range | Range + Term      { pontonkénti össszeadás}
  |   Range - Range | Range - Term
  |   Term - Range                      { pontonkénti kivonás }
  |   Range mod Range | Range mod Term { pontonkénti modulo }
  |   Range ? Range                     { feltételes kifejezés }
  |   unionof(X,Range,Range)            { únió-kifejezés }
  |   switch(Term,MapList)              { kapcsoló-kifejezés }
```

Indexikálisok monotonitása

Definíciók

- Jelöljük $D(X,S)$-sel az X változó tartományát az S tárban, $V(R,S)$-rel egy R tartománykifejezés értékét az S tárban.
- Egy R tartománykifejezés egy S tárban kiértékelhető, ha az R-ben előforduló összes „pucér” változó tartománya S-ben egyelemű (be van helyettesítve). A továbbiakban csak kiértékelhető tartománykifejezésekkel foglalkozunk,
- Egy S tárnak pontosítása S' ($S' \subseteq S$), ha minden X változóra $D(X,S') \subseteq D(X,S)$ (S' szűkítéssel állhat elő S-ből).
- Egy R tartománykifejezés egy S tárra nézve monoton, ha minden $S' \subseteq S$ esetén $V(R,S') \subseteq V(R,S)$.
- R S-ben antimonoton, ha minden $S' \subseteq S$ esetén $V(R,S') \supseteq V(R,S)$.
- R S-ben konstans, ha monoton és antimonoton (nem változik).
- Egy indexikális (anti)monoton, ha a tartománykifejezése (anti)monoton.

Példák

- `max(X)..max(Y)` monoton minden olyan tárban ahol `X` behelyettesített és antimonoton ahol `Y` behelyettesített.
- `min(X)..Y` kiértékelhető, ha `Y` behelyettesített, és ilyenkor monoton.
- `(min(X)..sup) \/ (0..sup)` egy tetszőleges tárban monoton, és konstans minden olyan tárban, ahol `min(X) >= 0`.

(Anti)monotonitás automatikus megállapítása

- Invertált és egyenes környezetek (pl. `Egy-Inv, Egy-Inv/>Egy, \Inv`).
- Alsó határban egyenes `min` vagy invertált `max, card` monoton; invertált `min` ill. egyenes `max, card` antimonoton, felső határban fordítva stb.
- „Rossz” irányítottság esetén a rendszer **változó-behelyettesítésre** vár.

Tétel ha egy „`X in R`” indexikális monoton egy S tárban, akkor `X` értéktartománya $V(\mathtt{R},S)$-rel szűkíthető (vö. alapszabály).

Szűkítő indexikálisok végrehajtása

Az `X in R` szűkítő indexikális feldolgozási lépései

- Végrehajthatóság vizsgálata: amíg `R`-ben behelyettesítetlen „pucér” változó van, vagy `R`-ről nem látható, hogy monoton, addig az indexikálist felfüggesztjük.
- Az aktiválás feltételei az `R`-beli változókra nézve:
  - `dom(Y), card(Y)` környezetben — bármilyen változáskor
  - `min(Y)` környezetben – alsó határ változásakor
  - `max(Y)` környezetben– felső határ változásakor
- A szűkítés módja:
  - Ha $D(X,S)$ és $V(R,S)$ diszjunktak, akkor visszalépünk.
  - a tárat az X `in` $V(R,S)$ korláttal **szűkítjük** (erősítjük), azaz $D(X,S) := D(X,S) \wedge V(R,S)$
- A befejezés feltétele: Ha a rendszer látja, hogy az R tartománykifejezés konstans, azaz az **indexikálist tartalmazó korlát** levezethetővé vált, akkor annak **minden** indexikálisa befejezi működését, egyébként újra elaltatjuk az indexikálist.

Példa

```
'x=<y'(X, Y) +:
        X in inf..max(Y),      % (ind1)
        Y in min(X)..sup.      % (ind2)
```

Az `(ind1)` indexikális végrehajtási lépései

- Végrehajthatóság vizsgálata: nincs benne pucér változó, monoton.
- Aktiválás: `Y` felső határának változásakor.
- Szűkítés: `X` tartományát elmetsszük az `inf..max(Y)` tartománnyal, azaz `X` felső határát az `Y`-éra állítjuk, ha az utóbbi a kisebb.
- Befejezés: amikor `Y` behelyettesítődik, akkor `(ind1)` konstanssá válik. Ekkor `(ind1)` és `(ind2)` is befejezi működését.

Példák szűkítő indexikálisokra

```
't+u=c'(T,U,C) +:                  % Tartomány-szűkítő!
        T in C - dom(U),
        U in C - dom(T).

'ax+c=t'(A,X,C,T) +:   % feltétel: A > 0
        X in (min(T) - C) /> A .. (max(T) - C) /< A,
        T in  min(X)*A + C     .. max(X)*A + C.

| ?- 'ax+c=t'(2,X,1,T), T in 0..4. ->>> X in 0..1, T in 1..3 ?

'abs(x-y)>=c'(X, Y, C) +:
        X in (inf .. max(Y)-C) \/ (min(Y)+C .. sup),
        % vagy:  X in \ (max(Y)-C+1 .. min(Y)+C-1),
        Y in (inf .. max(X)-C) \/ (min(X)+C .. sup).

| ?- 'abs(x-y)>=c'(X,Y,5), X in 0..6. ->>>  Y in(inf..1)\/(5..sup)
| ?- 'abs(x-y)>=c'(X,Y,5), X in 0..9. ->>>  Y in inf..sup

no_threat_2(X, Y, I) +:
        X in \{Y,Y+I,Y-I}, Y in \{X,X+I,X-I}.

| ?- no_threat_2(X, Y, 2), Y in 1..5, X=3. ->>>  Y in {2}\/{4} ?

'x=<y=<z rossz'(X, Y, Z) +:     % Hibás, sérti az alapszabályt!
        Y in min(X)..max(Z),
        Z in min(Y).. sup,
        X in inf..max(Y).

| ?- 'x=<y=<z rossz'(15, 5, Z). ->>> Z in 5..sup ?

'x=<y=<z lusta'(X, Y, Z) +:
        Y in min(X)..max(Z).    % Hallgatni arany!!

| ?- 'x=<y=<z lusta'(15, 5, Z). ->>> no
```

Bonyolultabb tartománykifejezések

Únió-kifejezés

`unionof(X, H, T)` — ahol `X` változó, `H` és `T` tartománykifejezések.
Kiértékelése egy S tárban: legyen `H` értéke az S tárban
$V(\mathtt{H}, S) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. (Ha $V(H, S)$ végtelen, a kiértékelést felfüggesztjük.)
Képezzük a T_i kifejezéseket úgy, hogy `T`-ben `X` helyébe x_i-t írjuk. Ekkor az únió-kifejezés értéke a $V(T_1, S), \ldots, V(T_n, S)$ halmazok úniója. Képlettel:

$$V(\mathtt{unionof}(\mathtt{X},\mathtt{H},\mathtt{T}), S) = \bigcup \{V(\mathtt{T}, (S \wedge \mathtt{X} \leftarrow x)) | x \in D(\mathtt{H}, S)\}$$

```
% Maximálisan szűkítő, de nagyon nem hatékony!
no_threat_3(X, Y, I) +:
        X in unionof(B,dom(Y),\{B,B+I,B-I}),
        Y in unionof(B,dom(X),\{B,B+I,B-I}).
```

Kapcsoló-kifejezés

`switch(T, MapList)` — ahol `T` a `term` szintaxisának megfelelő kifejezés, `MapList` pedig `integer-Range` alakú párokból álló lista. Mindaddig felfüggesztjük, amíg `T` behelyettesített nem lesz. Ha $V(\mathtt{T}, S)$ értéke Key és `MapList` tartalmaz egy $Key - Expr$ párt, akkor a kapcsoló értéke $V(Expr, S)$, egyébként üres. Például az alábbi két definíció azonos szűkítő hatású:

```
sq1(X, Y) :- relation(X, [0-{0},1-{-1,1},4-{-2,2}], Y).  % Y*Y = X

sq2(X, Y) +:
  X in unionof(B,dom(Y),switch(B,[-2-{4},-1-{1},0-{0},1-{1},2-{4}])),
  Y in unionof(B,dom(X),switch(B,[0-{0},1-{-1,1},4-{-2,2}])).   % (*)
```

Példa

Az `X in -1..1` tárban a `(*)` indexikális kiértékelése a következő
(jelöljük `KAPCS = [0-{0},1-{-1,1},4-{-2,2}]`):

```
Y in unionof(B,-1..1,switch(B,KAPCS)) =
     switch(-1,KAPCS) \/ switch(0,KAPCS) \/ switch(1,KAPCS) =
     {} \/ {0} \/ {-1,1}                           = {-1,0,1}
```

Bonyolultabb tartománykifejezések (folyt.)

Feltételes kifejezés

`Felt ? Tart` – ahol `Felt` és `Tart` tartománykifejezések. Ha $V($`Felt`$, S)$ üres halmaz, akkor a feltételes kifejezés értéke is üres halmaz, egyébként pedig azonos $V($`Tart`$, S)$ értékével. Példa:

```
'x=<y=<z'(X, Y, Z) +:        % Ez már helyes!
        Y in min(X)..max(Z),
        Z in ((inf..max(Y)) /\ dom(X)) ? (min(Y).. sup),  % (*)
        X in ((min(Y)..sup) /\ dom(Z)) ? (inf..max(Y)).
```

A `(*)` indexikális jobboldalának kiértékelése:

```
X = 15, Y = 5 ->>> (inf..5)/\{15} ? (5..sup) = {} ? (5..sup) = {}

X = 15, Y in 5..30 ->>> (inf..30)/\{15} ? 5.sup =
                        {15} ? 5..sup = 5..sup
```

Feltételes kifejezés használata a kiértékelés késleltetésére

A `( Felt?(inf..sup) \/ Tart )` tartománykifejezés értéke $V($`Tart`$, S)$, ha $V($`Felt`$, S)$ üres, egyébként `inf..sup`. Az ilyen szerkezetekben `Tart` értékét a rendszer nem értékeli ki, amíg `Felt` nem üres. Példa:

```
% Maximálisan szűkít, kicsit kevésbé lassú
no_threat_4(X, Y, I) +:
    X in (4..card(Y))?(inf..sup) \/
                 unionof(B,dom(Y),\{B,B+I,B-I}),          % (**)
    Y in (4..card(X))?(inf..sup) \/ unionof(B,dom(X),\{B,B+I,B-I}).
```

A `(**)` indexikális jobboldalának kiértékelése (`I = 1`):

```
Y in 5..8 ->>> (4..4)?(inf..sup) \/ unionof(...) = inf..sup

Y in 5..7 ->>> (4..3)?(inf..sup) \/ unionof(B,5..7,\{B,B+1,B-1}) =
               {}?(inf..sup) \/ unionof(B,5..7,\{B,B+1,B-1}) =
               {} \/ \{5,6,4} \/ \{6,7,5} \/ \{7,8,6} =     \{6}
```

Reifikálható FD-predikátumok

Egy reifikálható FD-predikátum

- általában négy klózból áll (a `+:`, `-:`, `+?`, `-?` nyakjelűekből).
- ha egy adott nyakjelű klóz hiányzik, akkor az adott szűkítés ill. levezethetőség-vizsgálat elmarad.

Példa

```
'x\\=y'(X,Y) +:          % 1. a korlátot szűkítő indexikálisok
        X in \{Y},
        Y in \{X}.
'x\\=y'(X,Y) -:          % 2. a negáltját szűkítő indexikálisok
        X in dom(Y),
        Y in dom(X).
'x\\=y'(X,Y) +?          % 3. a levezethetőséget kérdező
        X in \dom(Y).    % indexikális
'x\\=y'(X,Y) -?          % 4. a negált levezethetőségét kérdező
        X in {Y}.        % indexikális (itt felesleges, ld. később)
```

A kérdező klózok csak egyetlen indexikálist tartalmazhatnak. Egy `X in R` kérdező indexikális tulajdonképpen a `dom(X)` $\subseteq$ `R` feltételt fejezi ki, mint az FD-predikátum (ill. negáltja) levezethetőségi feltételét.

A `'x\\=y'(X,Y) #<=> B` korlát végrehajtásának vázlata

- A 3. klóz figyeli, hogy az `X` és `Y` változók tartománya diszjunkttá vált-e (`dom(X)` $\subseteq$ `\dom(Y)`), ha igen, akkor az `'x\\=y'(X,Y)` korlát levezethetővé vált, és így `B=1`;
- A 4. klóz figyeli, hogy `X=Y` igaz-e (`dom(X)` $\subseteq$ `{Y}`), ha igen, akkor a korlát negáltja levezethetővé vált, tehát `B=0`;
- egy külön démon figyeli, hogy `B` behelyettesítődött-e, ha igen, és `B=1`, akkor végrehajtja az 1. klózt, ha `B=0`, akkor a 2. klózt.

Reifikálható FD-predikátumok (folyt.)

Kérdező indexikálisok feldolgozása

- Az `X in R` indexikálist felfüggesztjük amíg kiértékelhető és antimonoton nem lesz (a megfelelő változók be nem helyettesítődnek).
- Az ébresztési feltételek (`Y` az `R`-ben előforduló változó):
  - `X` tartományának bármilyen változáskor
  - `dom(Y), card(Y)` környezetben — bármilyen változáskor
  - `min(Y)` környezetben – alsó határ változásakor
  - `max(Y)` környezetben – felső határ változásakor
- Ha az indexikális felébred:
  - Ha $D(X,S) \subseteq V(R,S)$ akkor a korlát levezethetővé vált.
  - Egyébként, ha $D(X,S)$ és $V(R,S)$ diszjunktak, valamint $V(R,S)$ monoton (vagyis konstans), akkor a korlát negáltja levezethetővé vált (emiatt felesleges az `'x\\=y'` FD-predikátum 4. klóza).
  - Egyébként újra elaltatjuk az indexikálist.

Példa

```
'x=<y'(X,Y) +:                % X =< Y korlát szűkítései.
        X in inf..max(Y),
        Y in min(X)..sup.
'x=<y'(X,Y) -:                % X > Y korlát szűkítései.
        X in (min(Y)+1)..sup,
        Y in inf..(max(X)-1).
'x=<y'(X,Y) +?                % Ha dom(X) része az inf..min(Y)
        X in inf..min(Y).     % tart.-nak, akkor X =< Y levezethető.
'x=<y'(X,Y) -?                % Ha dom(X) része a (max(Y)+1)..sup
        X in (max(Y)+1)..sup. % tart.-nak, akkor X > Y levezethető.
```

FD-predikátumok, indexikálisok összefoglalása

- Legyen `C(Y1, ...)` egy FD-predikátum, amelyben szerepel egy

  `Yi in R(Y1, ...)`

  indexikális. Az `R` tartománykifejezés által definiált reláció:

  $$C = \{\langle y_1, \ldots \rangle \, | y_i \in V(\mathtt{R}, \langle \mathtt{Y}_1 = y_1, \ldots \rangle)\}$$

- **Alapszabály** (kiterjesztett): Egy FD-predikátum csak akkor értelmes, ha a pozitív klózaiban levő összes indexikális ugyanazt a relációt definiálja; továbbá a negatív klózaiban levő összes indexikális ennek a relációnak a negáltját (komplemensét) definiálja.

- Ha R monoton egy S tárra nézve, akkor $V(R, S)$-ről belátható, hogy minden olyan y_i értéket tartalmaz, amelyek (az S által megengedett y_j értékekkel együtt) a C relációt kielégítik. Ezért szűkítő indexikálisok esetén jogos az Y_i tartományát $V(R, S)$-rel szűkíteni.

- Ha R antimonoton egy S tárra nézve, akkor $V(R, S)$-ről belátható, hogy minden olyan y_i értéket kizár, amelyekre (az S által megengedett legalább egy y_j érték-rendszerrel együtt) a C reláció nem áll fenn. Ezért kérdező indexikálisok esetén, ha $D(Y_i, S) \subseteq V(R, S)$, jogos a korlátot az S tárból levezethetőnek tekinteni.

- A fentiek miatt természetesen adódik az indexikálisok felfüggesztési szabálya: a szűkítő indexikálisok végrehajtását mindaddig felfüggesztjük, amíg monotonná nem válnak; a kérdező indexikálisok végrehajtását mindaddig felfüggesztjük, amíg antimonotonná nem válnak.

- **Az indexikálisok deklaratív volta:** Ha a fenti alapszabályt betartjuk, akkor a `clpfd` megvalósítás az FD-predikátumot helyesen valósítja meg, azaz mire a változók teljesen behelyettesítetté válnak az FD-predikátum akkor és csak akkor for sikeresen lefutni, vagy az 1 értékre tükröződni (reifikálódni), ha a változók értékei a predikátum által definiált relációhoz tartoznak. Az indexikális megfogalmazásán csak az múlik, hogy a nem-konstans tárak esetén milyen jó lesz a szűkítő ill. kérdező viselkedése.

Korlátok automatikus fordítása indexikálisokká

Indexikálissá fordítandó korlát

- Formája: „*Head* `+:` *Korlát*.”, ahol *Korlát* lehet
  - csak lineáris kifejezéseket tartalmazó **aritmetikai** korlát;
  - a `relation/3` és `element/3` szimbólikus korlátok egyike.
- Csak a `+:` nyakjel használható, ezek a korlátok nem reifikálhatóak.

Mi a különbség?

- Pl. `p(X,Y,U,V) :- X+Y#<U+V.` törzse `clpfd` könyvtári hívásokra vagy a `scalar_product` globális korlátra fordul.
- `p(X,Y,U,V) +: X+Y#<U+V.` (négyzetes helyigényű) FD predikátummá fordul:

```
p(X,Y,U,V) +: X in min(U)+min(V)-max(Y)..max(U)+max(V)-min(Y),
              Y in ... , U in ... , V in ... .
```

- Általában az első változat kevesebb helyet foglal el és gyorsabb is, de bizonyos esetekben a második a gyorsabb (lásd alább a dominó példát).
- A `relation/3` és `element/3` szimbólikus korlátok unió- és kapcsoló-kifejezésekké fordulnak (lineáris helyigényűek, vö. a korábbi `sq1` és `sq2` példákat). **Megjegyzés**: Mivel ezek végrehajtási ideje függ a tartomány méretétől, és az első alkalmazás nem különbözik a többitől, ezért vigyázni kell a kezdő-tartományok megfelelő beállítására.
- A később ismertetendő esettanulmányokban a „nyakjelek” hatása:

Torpedó	`:-`	`+:`
fules2	12.31	10.67
dense-clean	4.02	2.77
dense-collapse	1.79	1.29

Dominó	`:-`	`+:`
2803	174.7	127.6
2804	37.3	27.7
2805	327.7	239.8

- A torpedó feladatban a `relation/3` korlátot, a dominó feladatban `B1+...+BN #= 1` alakú korlátokat (`Bi 0..1` értékű változók, `N=<5`) fejtettünk ki indexikálisokká.

Nagy házi feladat: szélrózsa

Adott egy $n \times m$-es téglalap amelyben bizonyos mezőkön nem-negatív egész számok vannak elhelyezve. A számokat tartalmazó mezőkből a négy égtáj irányába valahány egyenes vonalat kell húzni. A mezőkön álló szám a belőle kiinduló vonalak összhosszát (a vonalak által érintett mezők számát) adja meg; magát a számozott mezőt nem kell ebbe beszámítani. A vonalak nem keresztezhetik egymást és minden üres mezőt pontosan egy vonal kell érintsen.

```
Példa:      o1  o2  o3  o4                    Megoldás:
          .   .   .   .   .                   .   .   .   .   .
     s1         4                               a---4---a   b
          .   .   .   .   .                   .   . | .   . | .
     s2             0                           c   a   0   b
          .   .   .   .   .                   . | . | .   . | .
     s3                 4                       c   a   b---4
          .   .   .   .   .                   . | .   .   . | .
     s4     4                                   4---c---c   b
          .   .   .   .   .                   .   .   .   .   .
```

```
% A példa megadása Prologban:
  a(4,4,         % 4 soros, 4 oszlopos tábla
      [t(1,2,4),  % az 1. sor 2. oszlopában egy 4 magas torony
       t(2,3,0),  % a  2. sor 3. oszlopában egy 0 magas torony, stb.
       t(3,4,4),t(4,1,4)])

% A megoldás Prolog alakja:
  [s(0,1,2,1), % észak: 0, nyugat: 1, dél: 2, kelet: 1 korong, stb.
   s(0,0,0,0),s(2,1,1,0),s(2,0,0,2)],

% :- pred szelrozsa(tábla::in, megoldás::out).
% szelrozsa(+Tábla, -Szélrózsák): Szélrózsák hézagmentesen
% és helyesen lefedik a Táblát.

| ?- szelrozsa(a(4,4,  [t(1,2,4), t(2,3,0), t(3,4,4), t(4,1,4)]), M).
       M = [s(0,1,1,2),s(0,0,0,0),s(1,2,1,0),s(2,0,0,2)] ? ;
       M = [s(0,1,2,1),s(0,0,0,0),s(2,1,1,0),s(2,0,0,2)] ? ; no
```

FD változók lekérdezése

(címkézéshez, globális korlátokhoz)

Tartományok pillanatnyi jellemzőinek lekérdezése

- `fd_min(X, Min)`, `fd_max(X, Max)`, `fd_size(X, Size)`: Az `X` változó tartományának alsó határa `Min`, felső határa `Max`, mérete `Size`.
- `fd_dom(X, Range)`, `fd_set(X, Set)`: `X` tartománya a `Range` tartománykifejezés ill. a `Set` ún. FD-halmaz.
- `fd_degree(X, D)`: `D` az `X`-hez kapcsolódó korlátok száma (vö. `ffc`).

FD-halmaz

- Ábrázolása: `[Alsó|Felső]` alakú szeparált zárt intervallumok rendezett listája. Elvben csak absztrakt adattípusként használható, alapműveletei:
  - `empty_fdset(S)`: `S` az üres FD-halmaz.
  - `fdset_parts(S, Min, Max, Rest)`: `S` első intervalluma `Min..Max`, a maradék FD-halmaz: `Rest`. FD-halmaz építésére is jó.
  - `is_fdset(S)`: `S` egy korrekt FD-halmaz.
- Használata szűkítésre: `X in_set Set`: `X`-et `Set`-re szűkíti.
- Számos további kényelmi szolgáltatás áll rendelkezésre, pl.
  - `fdset_singleton(Set, Elt)`: `Set` az egyetlen `Elt`-ből áll.
  - `fdset_union/[2,3]`, `fdset_intersection/[2,3]`, `fdset_complement/2`.
  - `fdset_member(Elt, Set)`: `Elt` eleme a `Set` FD-halmaznak.

Példák

```
| ?- X in 1..10, X #\= 9, fd_dom(X, Dom), fd_min(X, Min),
     fd_max(X, Max), fd_size(X, Size), fd_set(X, Set).
 ->>>   Dom=(1..8)\/{10}, Min=1, Max=10, Size=9, Set=[[1|8],[10|10]]
| ?- fd_size(X, Size),fd_set(X, Set). ->>> Size=sup, Set=[[inf|sup]]
| ?- X in 1..10, X #\= 9, fd_set(X, S), fdset_parts(S, L1, U1, _R1),
     fdset_parts(_R1, L2, U2, _R2), empty_fdset(_R2).
 ->>>   L1=1, U1=8, L2=10, U2=10
```

Globális korlátok

A korlát elindítása

- A globális korlátot egy közönséges Prolog eljárásként kell megírni, ezen belül az `fd_global/3` eljárás meghívásával indítható el a korlát végrehajtása.
- `fd_global(Constraint, State, Susp)`: `Constraint` végrehajtásának elindítása, `State` kezdőállapottal, `Susp` ébresztési listával. Itt `Constraint` a korlátot azonosító Prolog kifejezés, célszerűen megegyezik a korlátot definiáló Prolog eljárás fejével.
- A CLP(FD) könyvtár gondoskodik arról, hogy a korlát ébresztései között megőrizzen egy ún. állapotot, amely egy tetszőleges nem-változó Prolog kifejezés lehet. Az állapot kezdőértéke az `fd_global/3` második paramétere.
- A korlát indításakor, az `fd_global/3` harmadik paraméterében meg kell adni egy ébresztési listát, amely előírja, hogy mely változók milyen tartomány-változásakor kell felébreszteni a korlátot. A lista elemei a következők lehetnek:
  - `dom(X)` — az `X` változó tartományának bármely változásakor;
  - `min(X)` — az `X` változó alsó határának változásakor;
  - `max(X)` — az `X` változó felső határának változásakor;
  - `minmax(X)` — az `X` változó alsó vagy felső határának változásakor;
  - `val(X)` — az `X` változó behelyettesítésekor;

Példa

```
% X =< Y, globális korlátként megvalósítva.
lseq(X, Y) :-
        % lseq(X,Y) globális démon indul, kezdőállapot: void.
        % Ébredés: X alsó és Y felső határának változásakor.
        fd_global(lseq(X,Y), void, [min(X),max(Y)]).
```

Globális korlátok (folyt.)

A korlát aktiválása

- Az `fd_global/3` meghívásakor, és minden ébredéskor a rendszer elvégzi a felhasználó által meghatározott szűkítéseket. Ehhez a felhasználónak a `clpfd:dispatch_global/4` többállományos (`multifile`) kampó-eljárás egy megfelelő klózát kell definiálnia.
- `clpfd:dispatch_global(Constraint, State0, State, Actions)`: A kampó-eljárás törzse definiálja a `Constraint` kifejezés által azonosított korlát felébredésekor elvégzendő teendőket. A `State0` paraméterben kapja a régi, a `State` paraméterben kell kiadnia az új állapotot. Az `Actions` paraméterben kell kiadnia a korlát által elvégzendő szűkítéseket (a korlát törzsében **tilos** szűkítéseket végezni), és ott kell jelezni a (sikeres vagy sikertelen) lefutást is. Alaphelyzetben a korlát újra elalszik.
- Az `Actions` lista elemei a következők lehetnek (a sorrend érdektelen):
  - `exit` ill. `fail`— a korlát sikeresen ill. sikertelenül lefutott,
  - `X=V`, `X in R`, `X in_set S` — az adott szűkítést kérjük végrehajtani (ez is okozhat meghiúsulást),
  - `call(Module:Goal)` — az adott hívást kérjük végrehajtani.
- A `dispatch_global` eljárás interpretáltan fut (mint minden `multifile` eljárás), ezért célszerű a szűkítéseket külön eljárásban implementálni.

Példa

```
:- multifile clpfd:dispatch_global/4.
clpfd:dispatch_global(lseq(X,Y), St, St, Actions) :-
        dispatch_lseq(X, Y, Actions).

dispatch_lseq(X, Y, Actions) :-
        fd_min(X, MinX), fd_max(X, MaxX),
        fd_min(Y, MinY), fd_max(Y, MaxY),
        (   number(MaxX), number(MinY), MaxX =< MinY
        ->  Actions = [exit]
        ;   Actions = [X in inf..MaxY,Y in MinX..sup]
        ).
```

Példa: exactly/3 (korábbi pontosan/3)

```
% Xs-ben az I szám pontosan N-szer fordul elő
exactly(I, Xs, N) :-
    dom_susps(Xs, Susp),
    length(Xs, Len), N in 0..Len,
    fd_global(exactly(I,Xs,N), Xs/0, [minmax(N)|Susp]).
    % Állapot: L/Min ahol L az Xs-ből az I-vel azonos ill.
    % biztosan nem-egyenlő elemek esetleges kiszűrésével áll
    % elő, és Min az I-vel azonos kiszűrt elemek száma.

% dom_susps(Xs, Susp): Susp dom(X)-ek listája, minden X ∈ Xs-re.
dom_susps([], []).
dom_susps([X|Xs], [dom(X)|Susp]) :-
    dom_susps(Xs, Susp).

:- multifile clpfd:dispatch_global/4.
clpfd:dispatch_global(exactly(I,_,N), Xs0/Min0, Xs/Min, Actions) :-
    % Xs az Xs0-ból az I-vel azonos ill. attól biztosan különböző
    % elemek szűrésével áll elő, Min-Min0 a kiszűrt I-k száma:
    ex_filter(Xs0, Xs, Min0, Min, I),
    length(Xs, Len), Max is Min+Len,
    fd_min(N, MinN), fd_max(N, MaxN),
    (   MaxN =:= Min -> Actions = [exit,N=MaxN|Ps],
        ex_neq(Xs, I, Ps) % Ps = {X in_set \{I} | X ∈ Xs}
    ;   MinN =:= Max -> Actions = [exit,N=MinN|Ps],
        ex_eq(Xs, I, Ps)  % Ps = {X in_set  {I} | X ∈ Xs}
    ;   Actions = [N in Min..Max]
    ).

| ?- exactly(5, [A,B,C], N), N #=< 1, A=5.
     A = 5, B in(inf..4)\/(6..sup), C in(inf..4)\/(6..sup), N = 1 ?
| ?- exactly(5, [A,B,C], N), A in 1..2, B in 3..4, N #>= 1.
     A in 1..2, B in 3..4, C = 5, N = 1 ?
| ?- _L=[A,B,C], domain(_L,1,3), A #=< B, B #< C, exactly(3, _L, N).
     A in 1..2, B in 1..2, C in 2..3, N in 0..1 ?
```

Példa: exactly/3 (folyt.)

Segédeljárások

```
% ex_filter(Xs, Ys, N0, N, I): Xs-ből az I-vel azonos ill. attól
% különböző elemek elhagyásával kapjuk Ys-t, N-N0 a kiszűrt I-k száma.
ex_filter([], [], N, N, _).
ex_filter([X|Xs], Ys, N0, N, I) :-
    X==I, !, N1 is N0+1, ex_filter(Xs, Ys, N1, N, I).
ex_filter([X|Xs], Ys0, N0, N, I) :-
    fd_set(X, Set), fdset_member(I, Set), !,
    Ys0 = [X|Ys], ex_filter(Xs, Ys, N0, N, I).
ex_filter([_|Xs], Ys, N0, N, I) :-
    ex_filter(Xs, Ys, N0, N, I).

% `X in_set S' alakú elemek listája Ps, ahol X eleme Xs, S=\{I}.
ex_neq(Xs, I, Ps) :- fdset_singleton(Set0, I),
    fdset_complement(Set0, Set), eq_all(Xs, Set, Ps).

% `X in_set S' alakú elemek listája Ps, ahol X eleme Xs, S={I}.
ex_eq(Xs, I, Ps) :- fdset_singleton(Set, I), eq_all(Xs, Set, Ps).

% eq_all(Xs, S, Ps): Ps `X in_set S'-ek listája, minden X eleme Xs-re.
eq_all([], _, []).
eq_all([X|Xs], Set, [X in_set Set|Ps]) :- eq_all(Xs, Set, Ps).
```

Probléma az `exactly` korláttal

```
| ?- L = [N,1], N in {0,2}, exactly(0, L, N).
        L = [0,1], N = 0 ? ; no

% javítás: az N számláló ,,elszakítása'' a listaelemektől.
exactly2(I, Xs, N) :-
        dom_susps(Xs, Susp),
        length(Xs, Len), N in 0..Len, N #= N0,
        fd_global(exactly2(I,Xs,N0), Xs/0, [minmax(N)|Susp]).

| ?- L = [N,1], N in {0,2}, exactly2(0, L, N).
        no
```

Esettanulmányok

- **Négyzetdarabolás** (Pascal van Hentenryck cikke nyomán)
- **Torpedó-feladvány** (1999-es házi feladat)
- **Dominó-feladvány** (2000 tavaszi házi feladat)

Négyzetdarabolás

- Adott egy nagy négyzet oldalhosszúsága, pl.: `Limit = 10`.
- Adottak kis négyzetek oldalhosszúságai, pl. `Sizes = [6,4,4,4,2,2,2,2]` (területösszegük megegyezik a nagy négyzet területével).
- A kis négyzetekkel pontosan le kell fedni a nagyot (meghatározandók a kis négyzetek koordinátái), pl.:
```
Xs = [1,7,7,1,5,5,7,9]
Ys = [1,1,5,7,7,9,9,9]
Sizes = [6,4,4,4,2,2,2,2]
```

Próba-adatok

Limit	Sizes
10	[6,4,4,4,2,2,2,2]
20	[9,8,8,7,5,4,4,4,4,4,3,3,3,2,2,1,1]
112	[50,42,37,35,33,29,27,25,24,19,18,17,16,15,11, 9,8,7,6,4,2]
175	[81,64,56,55,51,43,39,38,35,33,31,30,29,20,18,16, 14,9,8,5,4,3,2,1]
503	[211,179,167,157,149,143,135,113,100,93,88,87,67, 62,50,34,33,27,25,23,22,19,16,15,4]

A futási táblázatok értelmezése

- Az adatok: az **első megoldás** előállításához szükséges CPU idő másodpercben ill. a visszalépések száma.
- Futási környezet: 433 MHz DEC Alpha gép.
- Időkorlát: 500 másodperc, túllépés esetén a mező üresen marad.

Négyzetdarabolás: Prolog megoldás

Colmerauer clp(R) programja nyomán

```
% Square of size Limit is covered by distinct squares of size Ss
% with coordinates Xs and Ys.
squares_prolog(Ss, Limit, Xs, Ys) :-
        triples(Ss, Xs, Ys, SXYs),
        Y0 is Limit+1, XY0 = 1-Y0, NLimit is -Limit,
        filled_hole([NLimit,Limit,Limit], _, XY0, SXYs, []).

% triples(Ss, Xs, Ys, SXYs): SXYs is a list of s(S,X,Y)-s.
triples([S|Ss], [X|Xs], [Y|Ys], [s(S,X,Y)|SXYs]) :-
        triples(Ss, Xs, Ys, SXYs).
triples([], [], [], []).

% filled_hole(L0, L, XY, SXYs0, SXYs): Hole in line L0 starting at
% point XY, filled with squares SXYs0-SXYs (diff list) gives line L.
filled_hole(L, L, _, SXYs, SXYs) :-
        L = [V|_], V >= 0, !.
filled_hole([V|HL], L, X0-Y0, SXYs00, SXYs) :-
        V < 0 , Y1 is Y0+V,  select(s(S,X0,Y1), SXYs00, SXYs0),
        placed_square(S, HL, L1),  Y2 is Y1+S, X2 is X0+S,
        filled_hole(L1, L2, X2-Y2, SXYs0, SXYs1),  V1 is V+S,
        filled_hole([V1,S|L2], L, X0-Y0, SXYs1, SXYs).

% placed_square(S, HL, L): placing a square on HL horizontal line
% gives (vertical) line L.
placed_square(S, [H,0,H1|L], L1) :- S > H, !, H2 is H+H1,
        placed_square(S, [H2|L], L1).
placed_square(S, [H,V|L], [X|L]) :- S = H, !, X is V-S.
placed_square(S, [H|L], [X,Y|L]) :- S < H, X is -S, Y is H-S.
```

variáns	10		20		112		175		503	
Prolog	0.000	0	1.84	271K	0.855	183K	13.80	2.6M	224.93	29M

Négyzetdarabolás: egyszerű `clpfd` megoldás

```
% A solution of the problem using speculative disjunction.
squares_spec(Sizes, Limit, Xs, Ys) :-
        generate_coordinates(Xs, Ys, Sizes, Limit),
        state_asymmetry(Xs, Ys, Sizes, Limit),
        state_no_overlap(Xs, Ys, Sizes),
        labeling([], Xs), labeling([], Ys).

generate_coordinates([], [], [], _).
generate_coordinates([X|Xs], [Y|Ys], [S|Ss], Limit) :-
        Sd is Limit-S+1, domain([X,Y], 1, Sd),
        generate_coordinates(Xs, Ys, Ss, Limit).

% First square has center in SW quarter, under the positive diagonal
state_asymmetry([X|_], [Y|_], [D|_], Limit) :-
        UB is (Limit-D+2)>>1, X in 1..UB, Y #=< X.

% Set up pairwise no-overlap constraints.
state_no_overlap([], [], []).
state_no_overlap([X|Xs], [Y|Ys], [S|Ss]) :-
        state_no_overlap(X, Y, S, Xs, Ys, Ss),
        state_no_overlap(Xs, Ys, Ss).

% Set up no-overlap constraints between <X,Y,S> and the rest.
state_no_overlap(X, Y, S, [X1|Xs], [Y1|Ys], [S1|Ss]) :-
        no_overlap_spec(X, Y, S, X1, Y1, S1),
        state_no_overlap(X, Y, S, Xs, Ys, Ss).
state_no_overlap(_, _, _, [], [], []).

no_overlap_spec(X1, _Y1, S1, X2, _Y2, _S2) :-   X1+S1 #=< X2.
no_overlap_spec(X1, _Y1, _S1, X2, _Y2, S2) :-   X2+S2 #=< X1.
no_overlap_spec(_X1, Y1, S1, _X2, Y2, _S2) :-   Y1+S1 #=< Y2.
no_overlap_spec(_X1, Y1, _S1, _X2, Y2, S2) :-   Y2+S2 #=< Y1.
```

variáns	10	20	112	175	503
spec	3.81 34K				

Diszjunktív korlátok lehetséges megvalósításai

Példa: az `X+5` $\leq$ `Y` $\vee$ `Y+5` $\leq$ `X` korlát

```
% Spekulatív változat
| ?- domain([X,Y], 0, 6), ( X+5 #=< Y ; Y+5 #=< X).
        ->>>  X in 0..1, Y in 5..6 ? ;
              X in 5..6, Y in 0..1 ? ; no
% Tükrözés-alapú változat
| ?- ...,  X+5 #=< Y #\/ Y+5 #=< X.     ->>> X in 0..6, Y in 0..6
% A diszjunkció összevonása egy korláttá: abs
| ?- ...,  abs(X-Y) #>= 5.              ->>> X in 0..6, Y in 0..6
| ?- ...,  'x+y=t tsz'(Y, D, X), abs(D) #>= 5.
        ->>>  X in (0..1)\/(5..6), Y in (0..1)\/(5..6) ?
% A diszjunkció összevonása indexikálissá
ix_disj(X, Y) +: X in \ (max(Y)-4..min(Y)+4),
                 Y in \ (max(X)-4..min(X)+4).
        ->>>  X in (0..1)\/(5..6), Y in (0..1)\/(5..6) ?
```

Konstruktív diszjunkció — egy szűkítési módszer

- A diszjunkció minden tagja esetén vizsgáljuk meg a hatását a tárra, jelöljük az így kapott „vagylagos" tárakat $S_1, \ldots, S_n$-nel.
- Minden változó a vagylagos tárakban kapott tartományok úniójára szűkíthető: `X in_set` $\cup D(\mathtt{X}, S_i)$

```
constr_disj(Cs, Var) :-
        empty_fdset(S0), constr_disj(Cs, Var, S0, S), Var in_set S.

constr_disj([Constraint|Cs], Var, Set0, Set) :-
        findall(S, (Constraint,fd_set(Var,S)), Sets),
        fdset_union([Set0|Sets], Set1),
        constr_disj(Cs, Var, Set1, Set).
constr_disj([], _, Set, Set).

| ?- domain([X,Y], 0, 6), constr_disj([X+5 #=< Y,Y+5 #=< X], X).
        ->>> X in(0..1)\/(5..6), Y in 0..6 ?
| ?- domain([X,Y], 0, 20), X+Y #= 20, constr_disj([X#=<5,Y#=<5], X).
        ->>> X in(0..5)\/(15..20), Y in(0..5)\/(15..20) ?
```

Négyzetdarabolás: diszjunktív korlátok

Számosság-alapú `no_overlap` változatok

```
no_overlap_card1(X1, Y1, S1, X2, Y2, S2) :-
        X1+S1 #=< X2 #<=> B1,
        X2+S2 #=< X1 #<=> B2,
        Y1+S1 #=< Y2 #<=> B3,
        Y2+S2 #=< Y1 #<=> B4,
        B1+B2+B3+B4 #>= 1.

no_overlap_card2(X1, Y1, S1, X2, Y2, S2) :-
  call( abs(2*(X1-X2)+(S1-S2)) #>= S1+S2 #\/
        abs(2*(Y1-Y2)+(S1-S2)) #>= S1+S2 ).
```

Indexikális `no_overlap` („gyenge” konstruktív diszjunkció)

```
no_overlap_ix(X1, Y1, S1, X2, Y2, S2) +:
%       ha Y irányú átfedés van, azaz
%       ha min(Y1)+S1 > max(Y2) és min(Y2)+S2 > max(Y1) ...
        X1 in ((min(Y1)+S1..max(Y2)) \/ (min(Y2)+S2..max(Y1)))
%       ... akkor X irányban nincs átfedés:
             ? (inf..sup) \/ \(max(X2)-(S1-1) .. min(X2)+(S2-1)),
        X2 in ((min(Y1)+S1..max(Y2)) \/ (min(Y2)+S2..max(Y1)))
             ? (inf..sup) \/ \(max(X1)-(S2-1) .. min(X1)+(S1-1)),
        Y1 in ((min(X1)+S1..max(X2)) \/ (min(X2)+S2..max(X1)))
             ? (inf..sup) \/ \(max(Y2)-(S1-1) .. min(Y2)+(S2-1)),
        Y2 in ((min(X1)+S1..max(X2)) \/ (min(X2)+S2..max(X1)))
             ? (inf..sup)\/ \(max(Y1)-(S2-1) .. min(Y1)+(S1-1)).
```

variáns	10	20	112	175	503
card1	0.139 141				
card2	0.156 141				
ix	0.036 141				

Négyzetdarabolás: kapacitás-korlátok, címkézés

- **Kapacitás-megszorítás** (redundáns korlát): minden sorban és oszlopban vizsgáljuk meg a metszett négyzeteket, ezek oldalhossz-összege a nagy négyzet oldalával meg kell egyezzék.
- **Címkézés**: tegyük paraméterezhetővé, keressük a feladathoz illő címkézést!

```
squares_cap(Lab, Sizes, Limit, Xs, Ys) :-
        generate_coordinates(Xs, Ys, Sizes, Limit),
        state_asymmetry(Xs, Ys, Sizes, Limit),
        state_no_overlap(Xs, Ys, Sizes),
        state_capacity(1, Xs, Sizes, Limit),
        state_capacity(1, Ys, Sizes, Limit),
        labeling(Lab, Xs), labeling(Lab, Ys).

% State capacity constraint for coordinates Cs, problem Sizes/Limit,
% for each position  Pos..Limit.
state_capacity(Pos, Limit, Cs, Sizes) :-
        Pos =< Limit, !, accumulate(Cs, Sizes, Pos, Bs),
        scalar_product(Sizes, Bs, #=, Limit),
        Pos1 is Pos+1, state_capacity(Pos1, Limit, Cs, Sizes).
state_capacity(_Pos, _Limit, _, _).

% accumulate(Cs, Sizes, Pos, Bs): Bi=1 iff the square denoted by the
% ith element of Cs/Sizes intersects the line at coordinate Pos.
accumulate([], [], _, []).
accumulate([C|Cs], [S|Ss], Pos, [B|Bs]) :-
        Crutch is Pos-S+1, C in Crutch .. Pos #<=> B,
        accumulate(Cs, Ss, Pos, Bs).
```

variáns, címkézés	10		20		112		175		503	
`cap-ix, []`	0.022	0	0.115	18						
`cap-ix, [min]`	0.021	0	0.092	0	2.68	115	5.01	105	36.32	438
`cap-spec, [min]`	3.88	34K								
`cap-card1, [min]`	0.054	0	0.252	0	3.41	115	5.94	105	36.58	438
`cap-card2, [min]`	0.061	0	0.305	0	3.29	115	5.36	105	34.58	438

Négyzetdarabolás: könyvtári globális korlátok

Ütemezési és lefedési korlátok használata

- A négyzetdarabolás mint ütemezési probléma: alkalmazzuk a `cumulative` korlátot mindkét tengely irányában.
- A négyzetdarabolás mint diszjunkt téglalapok problémája: alkalmazzuk a `disjoint2` korlátot (ekkor nem kell `no_overlap`).

```
squares_cum(Lab, Opts, Sizes, Limit, Xs, Ys) :-
        generate_coordinates(Xs, Ys, Sizes, Limit),
        state_asymmetry(Xs, Ys, Sizes, Limit),
        state_no_overlap(Xs, Ys, Sizes),   % ix változatban
        cumulative(Xs, Sizes, Sizes, Limit, Opts),
        cumulative(Ys, Sizes, Sizes, Limit, Opts),
        labeling(Lab, Xs), labeling(Lab, Ys).

squares_dis(Lab, Opts, Sizes, Limit, Xs, Ys) :-
        generate_coordinates(Xs, Ys, Sizes, Limit),
        state_asymmetry(Xs, Ys, Sizes, Limit),
%       state_no_overlap(Xs, Ys, Sizes),      % dis(g)-ix változat!
        disjoint2_data(Xs, Ys, Sizes, Rects),
        disjoint2(Rects, Opts),
        labeling(Lab, Xs), labeling(Lab, Ys).

disjoint2_data([], [], [], []).
disjoint2_data([X|Xs], [Y|Ys], [S|Ss], [r(X,S,Y,S)|Rects]) :-
        disjoint2_data(Xs, Ys, Ss, Rects).
```

Globális korlátok hatékonyságának összehasonlítása

Címkézés: `[min]`, rövidítések: `e = edge_finder(true)`, `g = global(true)`

variáns	10		20		112		175		503	
`cum-ix`	0.008	0	0.040	0						
`cum(e)-ix`	0.008	0	0.041	0	0.604	139	0.432	67	2.26	421
`dis-none`	0.020	52								
`dis(g)-none`	0.004	0	0.017	0	0.546	288	0.351	142	1.58	751
`dis(g)-ix`	0.006	0	0.034	0	0.881	288	0.600	142	2.85	751

Négyzetdarabolás: speciális, ún. duális címkézés

A címkézés lényege:

- nem a változókhoz keresünk értéket, hanem az értékekhez változót
- algoritmus:
  - keressük meg a legkisebb alsó határt, legyen ez `I`;
  - sorra próbáljuk a változókat az `I` értékkel behelyettesíteni;
  - ha egy behelyettesítés meghiúsul, kizárjuk `I`-t a változó tartományából.
- hívása: `dual_labeling(Xs,1,Limit),dual_labeling(Ys,1,Limit).`

```
dual_labeling([], _, _) :- !.
dual_labeling(L0, Min0, Limit) :-
        dual_labeling(L0, L1, Min0, Limit, Min1),
        dual_labeling(L1, Min1, Limit).

% dual_labeling(L0, L, I, Min0, Min): label vars in L0 with I
% whenever possible, return the remaining vars in L. Simultaneously
% accumulate in Min0-Min the minimum of lower bounds of vars in L.
dual_labeling([], [], _, Min, Min).
dual_labeling([X|L0], L, I, Min0, Min) :-
        (   integer(X) -> dual_labeling(L0, L, I, Min0, Min)
        ;   X = I, dual_labeling(L0, L, I, Min0, Min)
        ;   X #> I, fd_min(X, Min1), Min2 is min(Min0,Min1),
            L = [X|L1], dual_labeling(L0, L1, I, Min2, Min)
        ).
```

Duális címkézés, variáns-kombinációk hatékonysága

(Nem jelzett címkézés = `[min]`.)

variáns; címkézés	10		20		112		175		503	
`dis(g)-none; [min]`	0.004	0	0.017	0	0.546	288	0.351	142	1.58	751
`dis(g)-none; dual`	0.004	0	0.017	0	0.553	288	0.364	142	1.54	751
`cap-cum(e)-ix;`	0.025	0	0.109	0	1.961	100	2.338	65	21.36	395
`cap-dis(g)-none;`	0.020	0	0.082	0	2.086	102	2.616	65	29.27	402
`cum(e),dis(g)-none;`	0.008	0	0.034	0	0.512	139	0.343	67	1.85	421

Torpedó — 1999-es házi feladadat

A feladat

- Téglalap alakú táblázat.
- Egyenes hajókat kell elhelyezni benne (kiírás: 1, 2, 3 és 4 hosszúak, minta-megvalósítás: tetszőleges hosszúak)
- A hajók különböző színűek lehetnek.
- Minden szín esetén adott:
  - minden hajóhosszhoz: az adott színű és hosszú hajók száma;
  - minden sorra és oszlopra: az adott színű hajó-darabok száma;
  - ismert hajó-darabok a táblázat mezőiben.
- Színfüggetlenül adott: ismert torpedó-mentes (tenger) mezők

Példa — adat és eredmény egy táblában

```
      1 2 3 4 5         % oszlopsorszám
      0 1 1 1 0         % 1. szín oszlopösszegek

1  2  = * r : :  0      %
2  0  : : : : #  1      %
3  0  # : : : :  1      %
4  1  # : : * :  1      %
%  ^-------------^------- 1. és 2. szín sorösszegek
      2 0 0 0 1         % 2. szín oszlopösszegek

% Ismert mezők, > 1 hossz:  (1. szín)     (2. szín)   (tenger)
% (irányított hajók)            u              U
%                           l   m   r      L   M   R
%                               d              D
% Ismert mezők (1 hosszúak):    o              O           =
% Kikövetkeztetett mezők:       *              #           :
```

Torpedó — modellezés

Mik legyenek a korlát-változók?

a. Minden hajóhoz: irány (vízsz. vagy függ.) és a kezdőpont koordinátái — kevés változó, de szimmetria problémák (pl. azonos méretű hajók sorrendje), bonyolultabb korlátok, sok diszjunktív korlát (pl. vízsz. ill. függ. elhelyezés esetén a hajó más-más mezőket fed le).

b. Minden mezőhöz: mi található ott: hajó-darab vagy tenger — sok változó, egyszerűbb korlátok; **ez a választott megoldás**.

Milyen értékkészletet adjunk a korlát-változóknak (mezőknek)?

a. adott színű hajó-darab vagy tenger — egyszerű kódolás, de információvesztés az ismert mezőknél;

b. megkülönböztetjük a hajó-darabokat:

   b1. az előre kitöltött mezőknek megfelelő darabok `(u,l,m,r,d,o)` — diszjunktív korlátok (pl. ugyanaz a betű többféle hajó része lehet);

   b2. részletesebb bontás: a mezőket megkülönböztetjük a hajó hossza, iránya, a darab hajón belüli pozíciója szerint, pl. egy 4 hosszú vízszintes hajó balról 3. darabja; **ez a választott megoldás**.
   A megoldás jellemzője: ha egy mező egy nem-tenger értéket kap, akkor a teljes hajó meghatározottá válik.

Hány változóval ábrázoljunk egy mezőt?

a. külön változó mutatja a szín, hossz, irány és pozíció értékét — egyszerű kódolás, a szűkítés gyenge;

b. egyetlen változó mutatja az összes jellemzőt — bonyolult kódolás, hatékonyabb szűkítés; **ez a választott megoldás**.

Torpedó mintamegoldás — változók

Korlát-változók

- Minden mezőnek egy változó felel meg.
- Az értékek kódolási elvei (`max` címkézéshez igazítva)
  - az irányított hajók orra (`l` és `u`) kapja a legmagasabb kódokat,
  - ezen belül a hosszabbak kapják a nagyobb kódokat
  - adott hossz esetén az irány és a szín sorrendje nem fontos
  - az irányított hajók nem-orr elemeinek kódolása nem lényeges (címkézéskor az orr-elemek helyettesítődnek be)
  - az egy-hosszú hajók (hajódarabok) kódja a legalacsonyabb
  - a tenger kódja minden hajónál alacsonyabb
- Példa-kódolás: 1 szín, max 3 hosszú hajók, hij = horizontális (vízszintes), i hosszú hajó j-edik darabja, vij = vertikális (függőleges) hajó megfelelő darabja, stb. A kód-kiosztás:

```
0:      tenger
1:      h11 = v11       % 1-hosszú hajó
2..4    v33  h22 h32    % nem-orr-elemek
5..7    v32 v22  h33    % nem-orr-elemek
8..9    h21 v21         % orr-elemek
10..11  h31 v31         % orr-elemek
```

A kódoláshoz kapcsolódó segéd-korlátok

- `coded_field_neighbour(Dir, CF0, CF1)`: `CF0` kódolt mező `Dir` irányú szomszédja `CF1`, ahol `Dir` lehet `horiz, vert, diag`. Például
  `| ?- coded_field_neighbour(horiz, 0, R). ->>> R in \{3,4,7}.`
- `group_count(Group, CFs, Count, Env)`: a `Group` csoportba tartozó elemek száma a `CFs` listában `Count`, ahol a futási környezet `Env`. Itt `Group` például lehet `all(Clr)`: az összes `Clr` színű hajódarab. Ez a `count/4` eljárás kiterjesztése: nem egyetlen szám, hanem egy számhalmaz előfordulásait számoljuk meg.

Torpedó mintamegoldás — korlátok

Alapvető korlátok

1. Az ismert mezők megfelelő csoportra való megszorítása (`X in ...`).
2. Színenként az adott sor- és oszlopszámlálók előírása (`group_count`).
3. A hajóorr-darabok megszámolásával az adott hajófajta darabszámának biztosítása (`group_count`, minden színre, minden hajófajtára).
4. A vízszintes, függőleges és átlós irányú szomszédos mezőkre vonatkozó korlátok biztosítása (`coded_field_neighbour`).

Segédváltozók — korlátok összekapcsolása

- A 3. korlát felírásában a részösszegekre érdemes segédváltozókat bevezetni (pl. `A+B+C #=2, A+B+D #=2` helyett `A+B #= S, S+C #=2, S+D #=2`).
- Jelölje sor_s^K ill. $oszl_s^L$ az s hajódarab előfordulási számát a K-adik sorban, ill. az L-edik oszlopban. A hajók számolásához a $sor_{\mathtt{hI1}}^K$ és $oszl_{\mathtt{vI1}}^L$ mennyiségekre segédváltozókat vezetünk be, ezekkel a 3. korlát:

  az `I` hosszú hajók száma $= \sum_K sor_{\mathtt{hI1}}^K + \sum_L oszl_{\mathtt{vI1}}^L \quad (\mathtt{I} > 1)$

  az 1 hosszú hajók száma $= \sum_K sor_{\mathtt{h11}}^K$

Redundáns korlátok (alapértelmezésben mind bekapcsolva)

1. `count_ships_occs`: sorösszegek alternatív kiszámolása:

   $$\text{a } K\text{. sorbeli darabok száma} = \sum_{\mathtt{I} \le hosszak} \mathtt{I} * sor_{\mathtt{hI1}}^K + \sum_{1 < \mathtt{I} \le hosszak, \mathtt{J} \le \mathtt{I}} sor_{\mathtt{vIJ}}^K$$

   ($\Rightarrow$ pl. ha a sorösszeg N, akkor nincs a sorban N-nél hosszabb hajó.)

   Analóg módon az oszlopösszegekre is.
2. `count_ones_columns`: az egy hosszú darabok számát az oszloponkénti előfordulások összegeként is meghatározzuk.
3. `count_empties`: minden sorra és oszlopra a tenger-mezők számát is előírjuk.

Torpedó mintamegoldás — címkézés

Címkézési variánsok — `label(`*`Variáns`*`)` opciók

- `plain`: `labeling([max,down], Mezők).`
- `max_dual`: a négyzetkirakáshoz hasonlóan a legmagasabb *értékeket* próbálja a változóknak értékül adni.
- `ships`: speciális címkézés, minden hosszra, a legnagyobbtól kezdve, minden színre az adott színű és hosszú hajókat sorra elhelyezi (alapértelmezés).

Címkézés közbeni szűrés

- a konstruktív diszjunkció egy egyszerű formája
- sorra az összes mezőt megpróbáljuk „tenger"-re helyettesíteni, ha ez azonnal meghiúsulást okoz, akkor ott hajó-darab van
- a szűrést minden szín címkézése előtt megismételjük
- variánsok — `filter(`*`VariánsLista`*`)` opció, ahol a lista eleme lehet:
  - `off`: nincs szűrés
  - `on`: egyszeres szűrés van (alapértelmezés)
  - `repetitive`: mindaddig ismételten szűrünk, amíg az újabb korlátokat eredményez

```
% filter_count_vars(Vars0, Vars, Cnt0, Cnt): Vars0 megszűrve
% Vars-t adja. A megszűrt változók száma Cnt-Cnt0.
filter_count_vars([], [], Cnt, Cnt).
filter_count_vars([V|Vs], Fs, Cnt0, Cnt) :-
        integer(V), !, filter_count_vars(Vs, Fs, Cnt0, Cnt).
filter_count_vars([V|Vs], [V|Fs], Cnt0, Cnt) :-
        (   fd_min(V, Min), Min > 0 -> Cnt1 = Cnt0
        ;   \+ (V = 0) -> V #\= 0, Cnt1 is Cnt0+1
        ;   Cnt1 = Cnt0
        ), filter_count_vars(Vs, Fs, Cnt1, Cnt).
```

Torpedó — korlát-variánsok, eredmények

Korlátok megvalósítási variánsai

- `relation(R)`, `R = clause` vagy `R = indexical` (alapértelmezés): a vízszintes és függőleges szomszédsági relációt a `relation/3` meghívásával, vagy indexikálisként való fordításával valósítjuk meg.
- `diag(D)`: az átlós szomszédsági reláció megvalósítása, `D =`
  - `reif` — reifikációs alapon: `CF1 #= 0 #\/ CF2 #= 0`
  - `ind_arith` — aritmetikát használó indexikálissal:
    ```
    diagonal_neighbour_arith(CF1, CF2) +:
       CF1 in 0 ..  (1000-(min(CF2)/>1000)*1000), ...
    ```
  - `ind_cond` (alapértelmezés) — feltételes indexikálissal:
    ```
    diagonal_neighbour_cond(CF1, CF2) +:
       CF1 in (min(CF2)..0) ?  (inf..sup) \/ 0, ...
    ```

Eredmények (összes megoldás, DEC Alpha 433 MHz)

Opciók/példa	fules2a		fules3		fules_clean	
1. sima	51.437	10178	253.1	55157	1085.7	260K
2. = 1 + `count_ships_occs`	16.218	1910	105.6	13209	395.2	52398
3. = 2 + `count_ones_columns`	16.175	1861	105.0	12797	386.4	50181
4. = 3 + `count_empties`	17.915	1771	107.2	11273	381.7	42417
5. = 4 + `label(max_dual)`	18.296	1771	106.3	11273	379.8	42417
6. = 4 + `label(ships)`	17.153	1708	105.7	11236	367.8	41891
7. = 6 + `filter([repetitive])`	10.517	313	64.3	2534	206.1	10740
8. = 6 + `filter([on])`	9.549	332	59.0	2811	199.7	12004
9. = 8 + `relation(indexical)`	8.426	332	54.0	2811	180.8	12004
10.= 9 + `diag(ind_arith)`	7.855	332	50.2	2811	167.7	12004
11.= 9 + `diag(ind_cond)`	*7.819*	*332*	*50.1*	*2811*	*166.2*	*12004*
12.= 11 − `count_empties`	6.750	350	47.5	3248	166.2	14233

Jelmagyarázat:

1. sima = `[-count_ships_occs,-count_ones_columns,-count_empties,`
`label(plain),filter([off]),relation(clause),diag(reif)]`

11. = alapértelmezés

Dominó — 2000 tavaszi házi feladadat

A feladat

Adott egy $(n+1) \times (n+2)$ méretű téglalap, amelyen egy teljes n-es dominókészlet összes elemét elhelyeztük, majd a határaikat eltávolítottuk. A feladat a határok helyreállítása.

```
%  Egy feladat (n=3):

  1   3   0   1   2

  3   2   0   1   3

  3   3   0   0   1

  2   2   1   2   0
```

```
% Az (egyetlen) megoldás:
---------------------
| 1 | 3   0 | 1 | 2 |
|   |-------|   |   |
| 3 | 2   0 | 1 | 3 |
|---------------|---|
| 3   3 | 0   0 | 1 |
|-------|-------|   |
| 2   2 | 1   2 | 0 |
---------------------
```

```
% Bemenő adatformátum:

[[1,  3,  0,  1,  2],
 [3,  2,  0,  1,  3],
 [3,  3,  0,  0,  1],
 [2,  2,  1,  2,  0]]
```

```
% A megoldás Prolog alakja:

[[n,  w,  e,  n,  n],
 [s,  w,  e,  s,  s],
 [w,  e,  w,  e,  n],
 [w,  e,  w,  e,  s]]
```

A megoldásban a téglalap minden mezőjéről meg kell mondani, hogy azt egy dominó északi (`n`), nyugati (`w`), déli (`s`), vagy keleti (`e`) fele fedi le.

Minta adat-csoportok

- `base` — 16 könnyű alap-feladat $n = 1$–25 közötti méretben.
- `easy` — 24 közép-nehéz feladat többségük $n = 15$–25 méretben.
- `diff` — 21 nehéz feladat 28-as, és egy 30-as méretben.
- `hard` — egy nagyon nehéz feladat 28-as méretben.

Dominó — modellezés

Mik legyenek a korlát-változók?

a. Minden mezőhöz egy ún. *irány*-változót rendelünk, amely a lefedő féldominó irányát jelzi — körülményes a dominók egyszeri felhasználását biztosítani.

b. Minden dominóhoz egy ún. *dominó*-változót rendelünk, amelynek értéke megmondja hová kerül az adott dominó — körülményes a dominók át nem fedését biztosítani.

c. Mezőkhöz és dominókhoz is rendelünk változókat (a.+b.), **ez az 1. választott megoldás**.

d. A mezők közötti választóvonalakhoz rendelünk egy 0-1 értékű ún. *határ*-változót (az a. megoldás egy variánsa), **ez a 2. választott megoldás**.

Milyen legyen a korlát-változók értékkészlete

- Az irány-változók értékkészlete a megoldás-mátrixbeli `n, w, s, e` konstansok tetszőleges numerikus kódolása lehet.
- A dominó-változók „természetes” értéke lehet a $\langle sor, oszlop, lehelyezési\_irány \rangle$ hármas valamilyen kódolása. Elegendő azonban az egyes lerakási helyeket megszámozni; ha egy dominót l különböző módon lehet lerakni, akkor az $1..l$ számokkal (**ez a választott megoldás**).
- A határ-változók 1 értékének „természetes” jelentése lehet az, hogy az adott határvonalat be kell húzni. A választott megoldás ennek a negáltja: az 1 érték azt jelenti, hogy az adott vonal nincs behúzva, azaz egy dominó középvonala. (Ettől az összes korlát `A+B+... #= 1` alakú lesz.)

Dominó — 1. változat

Változók, korlátok

- Minden mezőhöz egy irány-változó (`I`yx `in 1..4` $\equiv$ `{`n`,`w`,`s`,`e`}`), minden dominóhoz egy dominó-változó (`D`$ij, 0 \le i \le j \le n$) tartozik.
- Szomszédsági korlát: két szomszédos irány-változó kapcsolata, pl. `I14#=`n `#<=> I24#=`s`, I14#=`w `#<=> I15#=`e, stb.
- Dominó-korlát: egy dominó-elhelyezésben a dominó-változó és a lerakás bal vagy felső mezőjének irány-változója közötti kapcsolat. A korábbi példában pl. `D02#=1 #<=> I22#=`w`, D02#=2 #<=> I34#=`n`, D02#=3 #<=> I44#=`w

Algoritmus-változatok

- `csakkor=Cs` — a `csakkor_egyenlo(X,C,Y,D)` korlát megvalósítása:
  - `Cs=reif`: reifikációval (`X#=C#<=>Y#=D`)
  - `Cs=ind1`: az `'x=c=>y=d'` FD-predikátum kétszeri hívásával,
  - `Cs=ind2`: az `'x=c<=>y=d'` FD-predikátum hívásával.
- `valt=V, label=LOpciok` — Az `LOpciok` opciókkal és a `V` által kijelölt változókkal (`V=irany;domino`) hívjuk a `labeling/2` cimkéző eljárást.
- `szur=Sz, szurtek=L` — Ha `szur` $\neq$ `ki`, akkor az irány-változókat megszűrjük, sorra megpróbáljuk az `L` elemeire behelyettesíteni, és ha ez meghiúsulást okoz, akkor az adott elemet kivesszük a változó tartományából. `szur` lehet: `elott` — csak a címkézés előtt, `N` — minden `N`. változó címkézése után szűrünk. `L` alapértelmezése `[`w`,`n`]`.

A `csakkor_egyenlo` megvalósításában használt FD-predikátumok

```
'x=c=>y=d'(X, C, Y, D) +:
       X in (dom(Y) /\ {D}) ? (inf..sup) \/ \({C}),
       Y in ({X} /\  \({C})) ? (inf..sup) \/ {D}.

'x=c<=>y=d'(X, C, Y, D) +:
       X in ((dom(Y) /\ {D}) ? (inf..sup) \/ \({C})) /\
            ((dom(Y) /\ \({D})) ? (inf..sup) \/ {C}),
       Y in ((dom(X) /\ {C}) ? (inf..sup) \/ \({D})) /\
            ((dom(X) /\ \({C})) ? (inf..sup) \/ {D}).
```

Dominó — 2. változat

Változók, korlátok

- Minden mező keleti ill. déli határvonalához egy-egy határ-változó tartozik (`E`yx ill. , `S`yx). A határ-változó akkor és csak akkor 1, ha az adott vonal egy dominó középvonala. A táblázat külső határai 0 értékűek.
- Szomszédsági korlát: minden mező négy oldala közül pontosan egy lesz egy dominó középvonala, tehát pl. a $(2,4)$ koordinátájú dominó esetén `sum([S14,E23,S24,E24]), #=, 1)`.
- Lerakási korlát: egy dominó összes lerakási lehetőségei tekintjük, ezek középvonalai közül pontosan egy lesz 1, így a példabeli $\langle 0,2\rangle$ dominóra: `sum([E22,S34,E44], #=, 1)`.

Algoritmus-változatok

- `osszeg=Ossz` — a `lista_osszege_1` feltétel megvalósítása:
  - `Ossz=ari(N)`: `N`-nél nem hosszabb listákra aritmetikai korláttal,
  - `Ossz=ind(N)`: `N`-nél nem hosszabb listákra FD-predikátummal,
  - egyébként (`N`-nél hosszabb, vagy `Ossz=sum`): a `sum/3` korláttal,
- `szomsz=Ossz, lerak=Ossz` — a fenti viselkedést írja elő a szomszédsági ill. a lerakási korlátokra külön-külön.
- `label=LOpciok` — Az `LOpciok` opciókkal hívjuk a `labeling/2` eljárást.
- `szur=Sz, szurtek=L` — mint az 1. dominó-változatban. `L` alapértelmezése `[1]`. (`[0,1]` nem ad lényegesen erősebb szűrést.)

A `lista_osszege_1` megvalósítása FD-predikátummal

```
o1fd(A, B) +:           A+B #= 1.
o1fd(A, B, C) +:        A+B+C #= 1.
o1fd(A, B, C, D) +:     A+B+C+D #= 1.
(...)
```

Dominó — eredmények

Összes megoldás, futási idő (mp), visszalépések, ! = időtúllépés (7200mp).

Opciók/példa	base		easy		diff		hard	
1. változat,csakkor=ind1,valt=domino,label=[],szur=2,szurtek=[1,2]								
szur=2	*5.44*	*1*	*26.6*	*28*	*4001.7*	*4950*	*1162.9*	*1448*
szur=1,label=[ff]	5.87	1	27.6	5	3900.6	1168	554.4	159
szur=2,label=[ff]	5.48	1	25.8	13	3222.9	2074	446.9	288
szur=3,label=[ff]	5.36	1	25.7	19	3232.6	3597	429.3	477
label=[ffc]	5.49	1	23.7	7	!9885.8	6403	3902.0	2795
csakkor=ind2	5.14	1	26.4	28	4250.9	4950	1233.0	1448
csakkor=reif	6.87	1	33.5	28	4573.2	4950	1320.2	1448
szurtek=[1]	4.98	9	34.1	92	6375.0	13824	1976.5	3566
szur=elott	5.09	1	25.1	1722				
szur=ki	38.6	9K	590	157K				
1. változat,csakkor=ind1,valt=irany,label=[],szur=2,szurtek=[1,2]								
label=[]	*5.39*	*1*	*23.4*	*10*	*2138.1*	*1377*	*3362.9*	*2326*
label=[ff]	5.40	1	23.4	10	2137.9	1377	3376.5	2326
label=[ffc]	5.42	1	24.1	10	!15036.1	10155	!7199.7	4380
szurtek=[1]	4.94	3	29.4	45	3240.2	4000	6077.2	7782
2. változat,osszeg=ind(5),label=[],szur=2,szurtek=[1]								
szur=2	*2.10*	*1*	*11.5*	*8*	*1045.9*	*1399*	*1607.0*	*2254*
szur=1	2.28	1	11.9	3	1294.7	787	1977.9	1277
szur=3	2.04	1	11.5	20	1051.2	2436	1583.1	3851
osszeg=ind(4)	2.18	1	11.9	8	1152.7	1399	1768.0	2254
osszeg=ind(6)	2.13	1	11.9	8	1149.2	1399	1765.5	2254
osszeg=sum	2.96	1	15.8	8	1409.3	1399	2263.1	2254
osszeg=ari(5)	2.97	1	15.9	8	1462.7	1399	2257.8	2254
szurtek=[0]	1.86	2	15.1	103	2104.6	10719	3211.3	17300
szurtek=[0,1]	2.00	1	12.3	7	1182.2	1324	1823.7	2150
label=[ff]	2.12	1	11.7	8	1132.3	1399	1735.2	2254
label=[ffc]	2.14	1	12.4	8	2189.5	2841	2672.1	3732
2. változat,szur=ki,label=[], rövidítések: l => lerak sz => szomsz								
osszeg=ind(5)	3.31	818	57.0	21181				
l=ind(5),sz=sum	4.61	818	78.6	21181				
l=sum,sz=ind(5)	3.97	818	62.8	21181				
osszeg=sum	4.57	818	74.8	21181				

A Mercury nagyhatékonyságú LP megvalósítás

Célok

- Nagybani programozás támogatása
- Produktivitás, megbízhatóság, hatékonyság növelése

Eszközök, elvek

- Teljesen deklaratív programozás
- Funkcionális elemek integrálása
- Hagyományos (Prolog) szintaxis megőrzése
- Típus, mód és determinizmus információk használata
- Szeparált fordítás támogatása
- Prologénál erősebb modul-rendszer
- Sztenderd könyvtár

Elérhetőség

- Fejlesztő (nyelv+implementáció): University of Melbourne
- `http://www.cs.mu.oz.au/mercury/`
- GPL

Mercury példaprogram

File-név illesztés

- A feladat: operációs rendszerek file-név-illesztéséhez hasonló funkció megvalósítása.

Adott minta és karaktersorozat illesztésekor

- A `?` egy tetszőleges karakterrel illeszthető.
- A `*` egy tetszőleges (esetleg üres) karakter-sorozattal illeszthető.
- A `\`c karakter-pár a c karakterrel illeszthető, ha egy minta `\`-re végződik, az illesztés meghiúsul.
- Bármely más karakter csak önmagával illeszthető.

A Mercury program hívási formája:

`match Pattern1 Name Pattern2`

Itt a `Pattern1` és `Pattern2` mintákban a `*` és `?` azonos elrendezésben kell előforduljon.

A program funkciója

- a `Pattern1` mintára (az összes lehetséges módon) illeszti a `Name` nevet,
- a `*` és `?` karakterek helyébe kerülő szövegeket a `Pattern2` mintába behelyettesíti,
- és az így kapott neveket kiírja.

A file-név-illesztő Mercury program listája

```
:- module match.
/*----------------------------------------------------*/
:- interface.

:- import_module io.
:- pred main(io__state::di, io__state::uo) is det. % kötelező

/*----------------------------------------------------*/
:- implementation.
:- import_module list, std_util, string, char.

main -->
    command_line_arguments(Args),
    (   {Args = [P1,N1,P2]} ->
         {solutions(match(P1, N1, P2), Sols)},
         format("Pattern `%s' matches `%s' as `%s'\
 matches the following:\n\n",
                         [s(P1),       s(N1),  s(P2)]),
         write_list(Sols, "\n", write_string),
         write_string("\n*** No (more) solutions\n")
    ;   write_string("Usage: match <p1> <n1> <p2>\n")
    ).
```

Példaprogram, folytatás

```
:- pred match(string::in, string::in, string::in,
              string::out) is nondet. % szükséges
match(Pattern1, Name1, Pattern2, Name2) :-
    to_char_list(Pattern1, Ps1),
    to_char_list(Name1, Cs1),
    to_char_list(Pattern2, Ps2),
    match_list(Ps1, Cs1, L),
    match_list(Ps2, Cs2, L),
    from_char_list(Cs2, Name2).

:- type subst ---> any(list(char)) ; one(char).

:- pred match_list(list(char), list(char), list(subst)).
:- mode match_list(in, in, out) is nondet. % mindkettő,
:- mode match_list(in, out, in) is nondet. % vagy egyik se
match_list([], [], []).
match_list([?|Ps], [X|Cs], [one(X)|L]) :-
    match_list(Ps, Cs, L).
match_list([*|Ps], Cs, [any(X)|L]) :-
    append(X, Cs1, Cs),
    match_list(Ps, Cs1, L).
match_list([\, C|Ps],  [C|Cs], L) :-
    match_list(Ps, Cs, L).
match_list([C|Ps], [C|Cs], L) :-
    C \= (*), C \= ?, C \= (\),
    match_list(Ps, Cs, L).
```

Típusok

A típusok fajtái

- primitív: `char`, `int`, `float`, `string`
- predikátum: `pred`, `pred(T)`, `pred(T1, T2)`, ...
- függvény: `(func) = T`, `func(T1) = T`, ...
- univerzális: `univ`
- „a világ állapota”: `io__state`
- felhasználó által bevezetett

Felhasználói típusok

- megkülönböztetett unió (SML: `datatype`)
- ekvivalencia (típusátnevezés) (SML: `type`)
- absztrakt

Megkülönböztetett unió

- Enumerációs és rekord típus
- lehet monomorf vagy polimorf

Enumeráció típus

```
:- type fruit ---> apple ; orange ; banana ; pear.
```

Rekord típus

```
:- type itree ---> empty ; leaf(int) ; branch(itree, itree).
```

Polimorfikus típus

```
:- type list(T) ---> [] ; [T|list(T)].
:- type pair(T1, T2) ---> T1 - T2.
```

A játékszabályok

- `:- type` ⟨típus⟩ `--->` ⟨törzs⟩ `.`
- a ⟨törzs⟩ minden konstruktorában az argumentumok típusok vagy változók
- a ⟨törzs⟩ minden változójának szerepelnie kell ⟨típus⟩-ban
- ⟨típus⟩ változói különbözők
- a típusok között névekvivalencia van
- egy típusban nem fordulhat elő egynél többször azonos nevű és argumentumszámú konstruktor

Következmények

- egyszerű típusok általában „dobozolatlanul” implementálhatók
- „heterogén” kolleckció esetében explicit csomagolásra van szükség

Más típusú típusmegadások

Ekvivalencia típus

- `:- type` ⟨típus⟩ `==` ⟨típus⟩`.`
- `:- type assoc_list(K, V) == list(pair(K, V)).`
- nem lehet ciklikus
- a jobb és a bal oldal ekvivalens

Absztrakt típus

- `:- type` ⟨típus⟩`.`
- `:- type t2(T1, T2).`
- a definíció el van rejtve az implementációs részben

A típusok használata

Predikátum-deklaráció

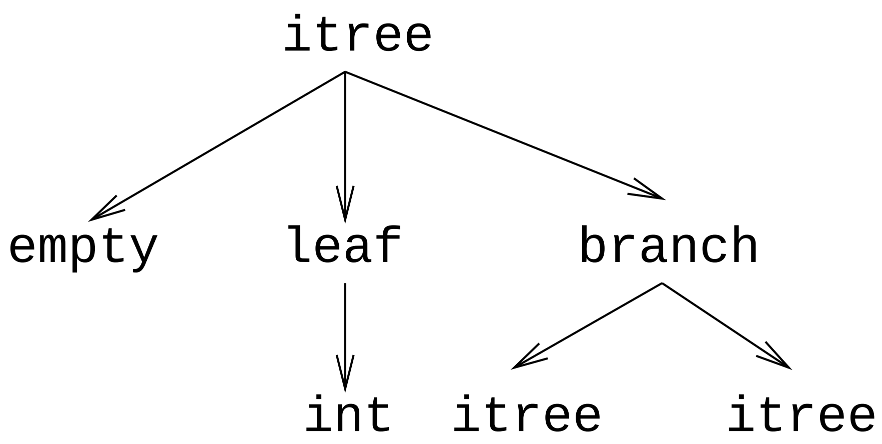
- A predikátumok és függvények argumentumainak meg kell mondani a típusát.
- `:- pred is_all_uppercase(string).`
- `:- func length(list(T)) = int.`

Módok, behelyettesítettség

Mód

- két behelyettesítettségi állapotból álló pár
- az első állapot arról szól, ahogy a paraméter bemegy, a második arról, ahogy kijön egy adott függvényből
- pl.: `out`: (szabad) változó megy be, tömör kifejezés jön ki

A behelyettesítettségi fa



- Az állapot leírásakor a típust tartalmazó („vagy”) csúcsokhoz rendelünk behelyettesítettségi állapotot.
- Deklarációban a `bound/1`, a `free/0` és a `ground/0` funktorokat használhatjuk.
- `:- inst bs = bound(empty; leaf(free); branch(bs,bs)).`
- Parametrizált `inst`-eket is csináhatunk:

```
:- inst bs(Inst) = bound(empty ; leaf(Inst) ;
branch(bs(Inst),bs(Inst))).
:- inst listskel(Inst) = bound([] ; [Inst|listskel(Inst)]).
```

Módok használata

Mód-deklaráció

- Módok definiálása:
  ```
  :- mode ⟨m⟩ :: ⟨inst1⟩ -> ⟨inst2⟩.
  ```
  ```
  :- mode in :: ground -> ground.
  :- mode out :: free -> ground.
  ```
- Módok átnevezése:
  ```
  :- mode ⟨m1⟩ :: ⟨m2⟩.
  ```
  ```
  :- mode (+) :: in.
  :- mode (-) :: out.
  ```
- Parametrizált módok:
  ```
  :- mode in(Inst) ::  Inst -> Inst.
  :- mode out(Inst) ::  free -> Inst.
  ```

Predikátum-mód deklaráció

- Egy eljárás minden paraméteréről megmondjuk milyen módú.
  ```
  :- pred append(list(T), list(T), list(T)).
  :- mode append(in, in, out).
  :- mode append(out, out, in).
  ```
- Egyetlen mód esetén összevonható a `pred` deklarációval.
  ```
  :- pred append(list(T)::in, list(T)::in, list(T)::out).
  ```
- Függvényeknek is lehet több módja.
- Mercuryban egy adott predikátum egy adott módját nevezzük eljárásnak.

Módok: mire kell figyelni?

- `free` változókat még egymással sem lehet összekapcsolni,

  ```
  :- mode append(in(listskel(free)),
                 in(listskel(free)),
                 out(listskel(free))).
  ```

  hibás!

- Ha egy predikátumnak nincs predikátum-mód deklarációja, akkor a fordító kitalálja az összes szükségeset (`--infer-all` kapcsoló),
- de függvényeknél ilyenkor felteszi, hogy minden argumentuma `in` és az eredménye `out`.
- A fordító átrendezi a hívásokat, hogy a mód korlátokat kielégítse: ha ez nem megy, hibát jelez. (Jobbrekurzió! Lásd a `match_list/3` `append/3` hívását!)
- A megadottnál „jobban” behelyettesített argumentumokat egyesítésekkel kiküszöböli a fordító. Ezeket a módokat le se kell írni (de érdemes lehet). Példa: `:- mode append(in, out, in).` a szétszedő `append`-et fogja használni.
- A jelenlegi implementáció nem kezeli a részlegesen behelyettesített adatokat.

Determinizmus

Determinizmus kategóriák
Minden predikátum minden módjára (azaz minden eljárásra) megadjuk, hogy hányféleképpen sikerülhet, és hogy meghiúsulhat-e.

A kategóriák nevei

meghiúsulás\megoldások	0	1	> 1
nem	`erroneous`	`det`	`multi`
igen	`failure`	`semidet`	`nondet`

A determinizmus-deklaráció

```
:- mode append(in, in, out) is det.
:- mode append(out, out, in) is multi.
:- mode append(in, in, in) is semidet.
```

Összevont deklaráció

```
:- pred p(int::in) is det.
p(_).
```

„Egzotikus" determinizmusok

- `failure` determinizmusú a `fail/0`
- `erroneous` determinizmusú a `require__error/1`

Függvények determinizmusa

- Ha minden argumentuma bemenő, akkor a determinizmusa csak `det`, `semidet`, `erroneous` vagy `failure` lehet.
- Ha nem így lenne, akkor az matematikai értelemben nem lenne függvény.
- Pl. `between(in, in, out)` nem írható függvényalakban.

Példák

Helyesek-e?

```
:- type fruit ---> banana ; orange ; lemon ; grape.
:- type ice_cream ---> lemon ; banana ; orange.
:- type unsi ---> z ; s(unsi).
```

Milyen módjai vannak és milyen a determinizmusa?

```
:- pred make_ice_cream(fruit, ice_cream).
make_ice_cream(lemon,  lemon).
make_ice_cream(orange, lemon).
make_ice_cream(banana, banana).

:- func factorial(int) = int.
factorial(N) = F :-
         (   N = 0 -> F = 1
         ;   N > 0 -> F = factorial(N-1)*N
         ;   require__error("out of domain")
         ).

:- pred even(num).
even(z).
even(s(N)) :-
         odd(N).

:- pred odd(num).
odd(s(N)) :-
         even(N).
```

Problémák a determinizmussal

- `det` és `semidet` módú eljárásokból nem hívható `nondet` vagy `multi` eljárás
- például a `main/2` eljárás `det` módú

Megoldások

- az összes megoldást megkeressük: `std_util__solutions/2`
- csak egy megoldást akarunk (és nem érdekes melyik)
  - ha az eljárás kimenő változóit nem használjuk fel, akkor az első utáni megoldásokat levágja a rendszer: `member(1, [1,1])`
  - kihasználjuk, hogy sosem fogunk egynél több megoldást keresni (committed choice nondeterminism): `cc_nondet`, `cc_multi` determinizmus
- (néhány megoldást keresünk meg: `std_util__do_while/4`)

Amire még nincs igazi megoldás

- meg akarunk hívni egy eljárást, amelynek minden megoldása ekvivalens
- tervezett megoldás: `unique [X] goal(X)`
- egyelőre a C interfésszel kell trükközni

Problémák a determinizmussal, példa

Feladat

1. Soroljuk fel egy halmaz összes részhalmazát!
2. Minden megoldást pontosan egyszer adjunk ki!

```
:- module resze.

:- interface.
:- import_module io.

:- pred main(io__state::di, io__state::uo) is cc_multi.

:- implementation.
:- import_module int, set, list, std_util.

main -->
         read_int_listset(L, S),
         io__write_string("Set version:\n"),
         {std_util__unsorted_solutions(resze(S), P)},
         io__write_list(P, " ", io__write),
         io__write_string("\n\nList version:\n"),
         {std_util__unsorted_solutions(lresze(L), PL)},
         io__write_list(PL, " ", io__write), io__nl.

:- pred read_int_listset(list(int)::out, set(int)::out,
                      io__state::di, io__state::uo) is det.
read_int_listset(L, S) -->
         io__read(R),
         {   R = ok(L0) -> L = L0, set__list_to_set(L, S)
         ;   set__init(S), L = []
         }.
```

Problémák a determinizmussal, folytatás

1. megoldás: `set` **absztrakt adattípussal**
A `set__member/2` felsoroló jellege miatt nem teljesíti a 2. feltételt.

```
:- pred resze(set(T)::in, set(T)::out) is multi.
resze(A, B) :-
        set__init(Fix),
        resze(A, B, Fix).

:- pred resze(set(T)::in, set(T)::out, set(T)::in) is multi.
resze(A, B, Fix) :-
        (   set__member(X, A)
        ->  set__delete(A, X, A1),
            (   resze(A1, B, Fix)
            ;   resze(A1, B, set__insert(Fix, X))
            )
        ;   B = Fix
        ).
```

2. megoldás: `list` **adattípussal**
A lista fejének levágása (szemi)determinisztikus, így teljesül a 2. feltétel.

```
:- pred lresze(list(T)::in, list(T)::out) is multi.
lresze(A, B) :-
        lresze(A, B, []).

:- pred lresze(list(T)::in, list(T)::out, list(T)::in) is multi.
lresze(A, B, Fix) :-
        (   A = [X|A1],
            (   lresze(A1, B, Fix)
            ;   lresze(A1, B, [X|Fix])
            )
        ;   A = [], B = Fix
        ).
```

Problémák a determinizmussal, folytatás

Egy példa-fordítás és futtatás

```
benko:~/mercury$ ls resze*
resze.m
benko:~/mercury$ mmake resze.dep
mmc --generate-dependencies     resze
benko:~/mercury$ mmake resze
rm -f resze.c
mmc --compile-to-c --grade asm_fast.gc resze.m > resze.err 2>&1
mgnuc --grade asm_fast.gc -c resze.c -o resze.o
c2init --grade asm_fast.gc resze.c > resze_init.c
mgnuc --grade asm_fast.gc -c resze_init.c -o resze_init.o
ml --grade asm_fast.gc -o resze resze_init.o resze.o
benko:~/mercury$ ls resze*
resze    resze.d    resze.dv   resze.m  resze_init.c
resze.c  resze.dep  resze.err  resze.o  resze_init.o
benko:~/mercury$ ./resze
[1, 2].
Set version:
[1, 2] [2] [1] [] [1, 2] [1] [2] []

List version:
[2, 1] [1] [2] []
benko:~/mercury$
```

Committed choice nondeterminism

Használat

- olyan helyeken használhatjuk, ahol biztosan nem lesz szükségünk több megoldásra
- `cc_multi` a `multi` helyett
- `cc_nondet` a `nondet` helyett
- két predikátummód-deklaráció különbözhet csak a `cc`-s mivoltukban

```
:- mode append(out, out, in) is multi.
:- mode append(out, out, in) is cc_multi.
```

Haszna

- I/O műveletek csak `det` és `cc_multi` eljárásokban lehetségesek
- hatékonyság
- nemkanonikus ábrázolású adattípusok egyenlőségének eldöntése

Egy cc_multi-s példa

```
:- module queens.

:- interface.
:- import_module list, int, io.

:- pred main(state::di, io__state::uo) is cc_multi.

:- implementation.

main -->
        (   {queen([1,2,3,4,5,6,7,8], Out)} -> write(Out)
        ;   write_string("No solution")
        ), nl.

:- pred queen(list(int)::in, list(int)::out) is nondet.
queen(Data, Out) :-
        perm(Data, Out),
        safe(Out).

:- pred safe(list(int)::in) is semidet.
safe([]).
safe([N|L]) :-
        nodiag(N, 1, L),
        safe(L).

:- pred nodiag(int::in, int::in, list(int)::in) is semidet.
nodiag(_, _, []).
nodiag(B, D, [N|L]) :-
        D \= N-B, D \= B-N,
        nodiag(B, D+1, L).
```

Magasabb rendű eljárások

Részlegesen paraméterezett eljárások

- segédeszközök: `call/2`, `call/3`, ... eljárások
- a `call/<I>` eljárások Mercuryban beépítettek

A `call/4` eljárás Prolog definíciója

```
% Pred az A, B és C utolsó argumentumokkal
% meghívva igaz.
call(Pred, A, B, C) :-
    Pred =.. FArgs,
    append(FArgs, [A,B,C], FArgs3),
    Pred3 =.. FArgs3, call(Pred3).
```

Példa: a `map` eljárás definíciója

```
% map(Pred, Xs, Ys): Az Xs lista elemeire
% a Pred transzformációt alkalmazva kapjuk az Ys listát.
:- pred map(pred(X, Y), list(X), list(Y)).
:- mode map(pred(in, out) is det, in, out) is det.
:- mode map(pred(in, out) is semidet, in, out) is semidet.
:- mode map(pred(in, out) is multi, in, out) is multi.
:- mode map(pred(in, out) is nondet, in, out) is nondet.
:- mode map(pred(in, in) is semidet, in, in) is semidet.
map(P, [H|T], [X|L]) :-
         call(P, H, X),
         map(P, T, L).
map(_, [], []).

:- import_module int.

:- pred negyzet(int::in, int::out) is det.
negyzet(X, X*X).

:- pred p(list(int)::out) is det.
p(L) :-
         map(negyzet, [1,2,3,4], L).

:- pred p1(list(int)::out) is det.
p1(L) :-
         map((pred(X::in, Y::out) is det :- Y = X*X), [1,2,3,4], L).
```

Magasabb rendű kifejezések létrehozása

Magasabbrendű eljárások

- tegyük fel, hogy létezik

```
:- pred sum(list(int)::in, int::out) is det.
```

- λ-kifejezéssel:

```
X = (pred(Lst::in, Len::out) is det :- sum(Lst, Len))
```

- az eljárás nevét használva (a nevezett dolognak csak egyféle módja lehet és nem lehet 0 aritású függvény):

```
Y = sum
```

- X és Y típusa: `pred(list(int), int)`

Magasabbrendű függvények

- ha adott

```
:- func mult_vec(int, list(int)) = list(int).
```

- λ-kifejezéssel:

```
X = (func(N, Lst) = NLst :- NLst = mult_vec(N, Lst))
Y = (func(N::in, Lst::in) = (NLst::out) is det
         :- NLst = mult_vec(N, Lst))
```

- a függvény nevét használva:

```
Z = mult_vec
```

Többargumentumú megasabbrendű kifejezések (currying)

Eljárások és függvények

- `Sum123 = sum([1,2,3])`: `Sum123` típusa `pred(int)`
- `Double = mult_vec(2)`: `Double` típusa `func(list(int)) = list(int)`

DCG

- Külön szintaxis az olyan eljárásokra, amelyek egy akkumulátor párt használnak
- Példa (típusa `pred(list(string), int, io__state, io__state)`):

```
Pred = (pred(Strings::in, Num::out, di, uo) is det -->
    io__write_string("The strings are: "),
    { list__length(Strings, Num) },
    io__write_strings(Strings),
    io__nl
)
```

Amire figyelni kell

- beépített nyelvi konstrukciókat nem lehet „curryzni”
- ilyenek pl.: `=`, `\=`, `call`, `apply`
- `list__filter([1,2,3], \=(2), List)` helyett:
  `list__filter([1,2,3], (pred(X::in) is semidet :- X \= 2), List)`

Magasabbrendű kifejezések meghívása

Eljárások meghívása

- `call(Closure, Arg`$_1$`, ..., Arg`$_n$`)`, $n \geq 0$
- `solutions(match(P1, N1, P2), Sols)`

Függvények meghívása

- `apply(Closure2, Arg`$_1$`, ..., Arg`$_n$`)`, $n \geq 0$
- `List = apply(Double, [1,2,3])`

Magasabbrendű módok

Mód és determinizmus

- A magasabbrendű kifejezések determinizmusa a módjuk része (és nem a típusuké).
- Például:

```
:- pred map(pred(X, Y), list(X), list(Y)).
:- mode map(pred(in, out) is det, in, out) is det.
```

Beépített behelyettesítettségek

- Eljárások:
  `pred(`⟨mode$_1$⟩`, ... ,` ⟨mode$_n$⟩`) is` ⟨determinism⟩, ahol $n \geq 0$
- Függvények:
  `(func) =` ⟨mode⟩ `is` ⟨determinism⟩
  `func(`⟨mode$_1$⟩`, ... ,` ⟨mode$_n$⟩`) =` ⟨mode⟩ `is` ⟨determinism⟩, ahol $n > 0$

Beépített módok

- A nevük megegyezik a behelyettesítettségek nevével, és a pár mindkét tagja ugyanolyan, a névnek megfelelő behelyettesítettségű.
- Egy lehetséges definíció lenne:

```
:- mode (pred(Inst) is Det) :: in(pred(Inst) is Det).
```

Amire figyelni kell

- Magasabbrendű kimenő paraméter:

```
:- pred foo(pred(int)).
:- mode foo(free -> pred(out) is det) is det.
foo(sum([1,2,3])).
```

- Magasabbrendű kifejezések nem egyesíthetők:
  `foo((pred(X::out) is det :- X = 6))` hibás.

Modul-rendszer

Támogatott tulajdonságok

- szeparált fordítás
- modulok egymásbaágyazása
- absztrakt típusok használata

Deklarációk

- modul kezdés: `:- module` ⟨modulename⟩.
- interfész: `:- interface.`
- megvalósítás: `:- implementation.`
- lezárás (opcionális): `:- end_module` ⟨modulename⟩.

Az interfész rész

- Minden szerepelhet, kivéve függvények, predikátumok és almodulok definíciója.
- Az itt szereplő dolgok fognak kilátszani a modulból.

Az implementációs rész

- Szerepelnie kell a függvények, predikátumok, absztrakt típusok és almodulok definíciójának.
- Az itt deklarált dolgok lokálisak a modulra.

Modul-rendszer, folytatás

Más modulok felhasználása

- `:- import_module` ⟨modules⟩`.`
  Ezután nem szükséges modulkvalifikáció.
- `:- use_module` ⟨modules⟩`.`
  Csak explicit modulkvalifikációval használhatjuk fel a benne levő dolgokat.

Modulkvalifikáció

- ⟨mod⟩`:`⟨submodule⟩`:`...`:`⟨submodule⟩`:`⟨name⟩
- Egyelőre a `:` helyett a `__` javasolt, mert lehet, hogy később a `.` lesz a modulkvalifikátor és a `:` típuskvalifikátor.

Almodulok

- beágyazott almodulok: a főmodul fájljában definiált
- szeparált almodulok: külön fájlban definiált
- a jelenlegi implementációnál az előbbi használata problémás

CHR—Constraint Handling Rules

Fő vonások

- Determinisztikus kifejezés-átíráson alapuló,
- Prolog vagy CLP gazda-megvalósításba beépített
- deklaratív nyelv-kiterjesztés,
- általános, szimbolikus (nem numerikus) **felhasználói** korlátok írására.
- Fő szerző: Thom Früwirth (ECRC, LMU, München).
- Nincs (beépített) konzisztencia-vizsgálat — minden korlát bemegy a tárba.

Példa

```
:- use_module( library(chr)).

handler leq.
constraints leq/2.
% X leq Y means variable X is less-or-equal to variable Y

:- op(500, xfx, leq).

reflexivity  @ X leq Y <=> X = Y | true.
antisymmetry @ X leq Y , Y leq X <=> X=Y.
idempotence  @ X leq Y \ X leq Y <=> true.
transitivity @ X leq Y , Y leq Z ==> X leq Z.

| ?- X leq Y, Y leq Z, Z leq X.
% X leq Y, Y leq Z  ----> (transitivity) X leq Z
% X leq Z, Z leq X  <---> (antisymmetry) X = Z
% Z leq Y, Y leq Z  <---> (antisymmetry) Z = Y

Y = X, Z = X ?
```

A CHR szabályok

Szabályfajták

- Egyszerűsítés (Simplification):
  $H_1, \ldots, H_i$ `<=>` $G_1, \ldots, G_j$ `|` $B_1, \ldots, B_k$.
- Propagáció (Propagation):
  $H_1, \ldots, H_i$ `==>` $G_1, \ldots, G_j$ `|` $B_1, \ldots, B_k$.
- Egypagáció (Simpagation):
  $H_1, \ldots, H_l \setminus H_{l+1}, H_i$ `==>` $G_1, \ldots, G_j$ `|` $B_1, \ldots, B_k$.

Jelölések

- $H_1, \ldots, H_i$: multi-fej, H_m CHR-korlátok,
- $G_1, \ldots, G_j$: őr (guard), G_m gazda-korlátok
- $B_1, \ldots, B_k$: törzs (body), B_m CHR- vagy gazda-korlátok,
- ahol $i > 0, j \geq 0, k \geq 0, l > 0$.

A szabályok jelentése

- Egyszerűsítés: ha az őr igaz, akkor a (multi-)fej és a törzs ekvivalens.
- Propagáció: ha az őr igaz, akkor a (multi-)fejből kövtkezik a törzs.
- Egypagáció: visszavezethető a fentiekre, mert:

  ```
  Heads1 \ Heads2 <=> Body
  ```

  azonos jelentésű mint

  ```
  Heads1, Heads2 <=> Heads1, Body,
  ```

  csak sokkal hatékonyabb.

A CHR szabályok végrehajtása

Korlátok aktiválása (meghívása vagy fölébresztése)

- Az aktív korláthoz sorra **próbáljuk** az összes szabályt, amelynek fejében előfordul,
- mindegyik fejre **illesztjük** a korlátot (egyirányú egyesítés!)
- többfejű szabályok esetén a korlát-tárban keresünk megfelelő (illeszthető) **partner**-korlátot,
- sikeres illesztés után végrehajtjuk az őr-részt, ha ez is sikeres, a szabály **tüzel**, különben folytatjuk a próbálkozást a következő szabállyal.
- A tüzelés abból áll, hogy kivesszük a tárból a kijelölt korlátokat (egyszerűsítés vagy egypagáció esetén), majd végrehajtjuk a törzset.
- Ha az aktív korlátot nem hagytuk el a tárból, folytatjuk a rá vonatkozó próbálkozást a következő szabállyal.
- Amikor az összes szabályt kipróbáltuk, akkor a korlátot **elaltatjuk**, azaz visszatesszük a tárba (passzív korlátok).

A végrehajtás jellemzői

- A korlátok három állapota: aktív (legfeljebb egy), aktiválható passzív, alvó passzív.
- A korlát akkor válik aktiválhatóvá, amikor egyik változóját **megérintik**, azaz egyesítik egy tőle különböző kifejezéssel.
- Minden alkalommal amikor egy korlát aktívvá válik, az összes rá vonatkozó szabályt végigpróbáljuk.
- A futás akkor fejeződik be, amikor nincs több aktiválható korlát.
- Az őr-részben nem lehet változót érinteni. Az őr-rész két komponense: `Ask & Tell`
  - Ask — változó érintés vagy behelyettesítési hiba meghiúsulást okoz
  - Tell — a felhasználó garantálja, hogy ilyen dolog nem fordul elő

Példa: végeshalmaz-korlátok

```
handler dom_consistency.
constraints dom/2, con/3.
% dom(X,D) var X can take values from D, a ground list
% con(C,X,Y) there is a constraint C between variables X and Y

con(C, X, Y) <=> ground(X), ground(Y) | test(C, X, Y).
con(C, X, Y), dom(X, XD) \ dom(Y, YD) <=>
        reduce(x_y, XD, YD, C, NYD) | new_dom(NYD, Y).
con(C, X, Y), dom(Y, YD) \ dom(X, XD) <=>
        reduce(y_x, YD, XD, C, NXD) | new_dom(NXD, X).

  reduce(CXY, XD, YD, C, NYD):-
        select(GY, YD, NYD1), % try to reduce YD by GY
        (   member(GX, XD), test(CXY, C, GX, GY) -> fail
        ;   reduce(CXY, XD, NYD1, C, NYD) -> true
        ;   NYD = NYD1
        ), !.

  test(x_y, C, GX, GY):- test(C, GX, GY).
  test(y_x, C, GX, GY):- test(C, GY, GX).

  new_dom([], _X) :- !, fail.
  new_dom(DX, X):- DX = [E|RX], dom(X, DX),
          (   RX = [] -> X = E
          ;   true
          ).

% labeling:
constraints labeling/0.

labeling, dom(X, L) #Id <=>
        L = [_,_|_] | member(I, L), dom(X, [I]), labeling
        pragma passive(Id).
```

Az N királynő feladat

```
% an N-queens example:

queens(N, Qs) :-
        length(Qs, N), make_list(1, N, L1_N), domains(Qs, L1_N),
        safe(Qs), labeling.

make_list(I, N, []) :- I > N, !.
make_list(I, N, [I|L]) :-
        I1 is I+1,
        make_list(I1, N, L).

domains([], _).
domains([V|Vs], Dom) :- dom(V, Dom), domains(Vs, Dom).

safe([]).
safe([Q|Qs]) :- no_attack(Qs, Q, 1), safe(Qs).

no_attack([], _, _).
no_attack([X|Xs], Y, I) :-
        con(no_threat(I), X, Y), I1 is I+1,
        no_attack(Xs, Y, I1).

test(no_threat(I), X, Y) :-
        Y =\= X, Y =\= X-I, Y =\= X+I.

| ?- queens(4, Qs).

Qs = [_A,_B,_C,_D],
labeling,
dom(_D,[2]),
dom(_C,[4]),
dom(_B,[1]),
dom(_A,[3]) ? ;

Qs = [_A,_B,_C,_D],
labeling,
dom(_D,[3]),
dom(_C,[1]),
dom(_B,[4]),
dom(_A,[2]) ? ;
no
```

Szintaxis

```
Rule           --> [Name @]
                     (Simplification | Propagation | Simpagation)
                        [pragma Pragma].

Simplification --> Heads         <=> [Guard '|'] Body
Propagation    --> Heads         ==> [Guard '|'] Body
Simpagation    --> Heads \ Heads <=> [Guard '|'] Body

Heads          --> Head | Head, Heads
Head           --> Constraint | Constraint # Id
Constraint     --> a callable term declared as constraint
Id             --> a unique variable

Guard          --> Ask | Ask & Tell
Ask            --> Goal
Tell           --> Goal
Goal           --> <<A callable term, including conjunction
                   and disjunction etc.>>

Body           --> Goal

Pragma         --> <<a conjunction of terms usually referring to
                   one or more heads identified via #/2>>
```

Fontosabb pragmák

- `already_in_heads(Id)` — kiküszöböli ugyanazon korlát kivételét és visszarakását
- `passive(Id)` — a hivatkozott fej-korlát csak passzív szerepű lehet.

Példák

Prím-szűrő

```
handler eratosthenes.
constraints primes/1,prime/1.

primes(1) <=> true.
primes(N) <=> N>1 | M is N-1,prime(N),primes(M).

absorb(J) @ prime(I) \ prime(J) <=> J mod I =:= 0 | true.
```

Boole-korlátok — konjunkció

```
handler bool.
constraints and/3, labeling/0.

and(0,X,Y) <=> Y=0.
and(X,0,Y) <=> Y=0.
and(1,X,Y) <=> Y=X.
and(X,1,Y) <=> Y=X.
and(X,Y,1) <=> X=1,Y=1.
and(X,X,Z) <=> X=Z.
and(X,Y,A) \ and(X,Y,B) <=> A=B.
and(X,Y,A) \ and(Y,X,B) <=> A=B.

labeling, and(A,B,C)#Pc <=> label_and(A,B,C), labeling
    pragma passive(Pc).

        label_and(0,X,0).
        label_and(1,X,X).

| ?- and(X, Y, 0), labeling.
  X = 0, labeling ? ;
  X = 1, Y = 0, labeling ? ;
  no
```

Boole-korlátok: számosság

```
constraints card/4.

card(A,B,L):-
        length(L,N), A=<B,0=<B,A=<N, card(A,B,L,N).

triv_sat @ card(A,B,L,N) <=> A=<0,N=<B | true.
pos_sat @ card(N,B,L,N) <=> set_to_ones(L).
neg_sat @ card(A,0,L,N) <=> set_to_zeros(L).
pos_red @ card(A,B,L,N) <=> select(X,L,L1),X==1 |
                A1 is A-1, B1 is B-1, N1 is N-1,
                card(A1,B1,L1,N1).
neg_red @ card(A,B,L,N) <=> select(X,L,L1),X==0 |
                N1 is N-1, card(A,B,L1,N1).
% special cases with two variables
card2nand @ card(0,1,[X,Y],2) <=> and(X,Y,0).
% ...
labeling, card(A,B,L,N)#Pc <=>
  label_card(A,B,L,N), labeling
    pragma passive(Pc).

label_card(A,B,[],0):- A=<0,0=<B.
label_card(A,B,[0|L],N):- N1 is N-1, card(A,B,L,N1).
label_card(A,B,[1|L],N):-
    A1 is A-1, B1 is B-1, N1 is N-1, card(A1,B1,L,N1).

| ?- card(2,3,L), labeling.

L = [1,1], labeling ? ;

L = [0,1,1] ? ; L = [1,0,1] ? ; L = [1,1,_A] ? ;
L = [0,0,1,1] ? ; L = [0,1,0,1] ? ; L = [0,1,1,_A] ? ;
% ...
```

FDBG, a CLP(FD) nyomkövető csomag

Hanák Dávid, Szeredi Tamás

Háttérinformációk

A SICStus Prolog nyomkövető

A hagyományos nyomkövetési eszközök (pl. spypoint, trace) mellett egyéb, fejlett lehetőségek is adottak:

- a program állapota magából a programból is lekérdezhető;
- a töréspontok összetett feltétel-rendszerrel, tág keretek között adhatók meg;
- a töréspontoknál nem kell feltétlenül megállítani a végrehajtást, programrészlet is futtattatható.

A `dispatch_global_fast/4` predikátum

- a beépített globális korlátokat hívja meg;
- utolsó klóza hívja a `dispatch_global/4`-et, paraméterezése azonos vele.
- nem `multifile`-os, ezért lefordítható, tehát gyorsabb;
- a nyomkövetéskor erre a predikátumra teszünk töréspontot.

Az FD halmaz (`fd_set`)

Szigorúan nem összefüggő intervallumok rendezett listája, amelyben minden intervallumot egy `[From|To]` struktúra ír le.

Kampók, `portray/1`

Bizonyos események bekövetkezésekor meghívódik egy-egy kampó-predikátum, amely, ha nem hiúsul meg, helyettesíti az alapértelmezett viselkedést, Ilyen pl. a `portray/1`, amely a `print/1,2` használatakor a kiírandó kifejezés minden nem változó részkifejezésére meghívódik.

Két egyszerű példa

```
| ?- use_module(library(clpfd)), use_module(fdbg).
| ?- assert(fdbg_output(user_error)), fdbg_on(exit_hook(fdbg_show)).
{The clp(fd) debugger is switched on}

yes
| ?- fdbg_name(x, X), X #< 5, X #> 3.
<x>#<5
    x = inf..4
    Constraint exited.

<x>#>3
    x = {4}
    Constraint exited.

X = 4 ? ;

no
| ?- domain([A,B], 0, 10), sum([A,2,3], #=, B), B #= 6.
scalar_product([1,1,1],[<noname_1>,2,3],#=,<noname_2>)
    noname_1 = 0..5
    noname_2 = 5..10

<noname_2>#=6
    noname_2 = {6}
    Constraint exited.

scalar_product([1,1,1],[<noname_1>,2,3],#=,6)
    noname_1 = {1}
    Constraint exited.

A = 1,
B = 6 ? ;

no
```

Alapelvek

Célok

- követhető legyen a véges tartományú (röviden: FD) korlát változók tartományainak szűkülése;
- a programozó értesüljön a korlátok felébredéséről, kilépéséről és hatásairól, valamint az egyes címkézési lépésekről és hatásukról;
- jól olvasható formában lehessen kiírni FD változókat tartalmazó kifejezéseket.

Fogalmak

- *CLP(FD) események*
  - globális korlát felébredése
  - valamely címkézési esemény (címkézés kezdése, címkézési lépés vagy címkézés meghiúsulása)
- *Megjelenítő (Visualizer)*

  A CLP(FD) eseményekre reagáló predikátum, általában kiírja az aktuális eseményt valamilyen formában. Mindkét eseményosztályhoz tartozik egy-egy megjelenítő-típus:

  - korlát-megjelenítő
  - címkézés-megjelenítő

  Mindkét fajta megjelenítő az események tényleges bekövetkezése, hatásaik érvényesülése *előtt* hívódik meg.
- *Jelmagyarázat (Legend)*
  - változók és a hozzájuk tartozó tartományok listája;
  - a vizsgált korlát viselkedésével kapcsolatos következtetések;
  - rendszerint az éppen megfigyelt korlát után íródik ki.

Jellemzők

Nyomon követhető korlátok

- csak globális korlátok, indexikálisok nem;
- lehetnek beépített vagy felhasználói korlátok egyaránt;
- nyomkövetés esetén a (*lineáris*) aritmetikai korlátok mindegyike globálissá fordul.

CLP(FD) események figyelése

- az egyes események hatására meghívódik egy vagy több megjelenítő;
- a meghívott megjelenítő lehet beépített vagy felhasználó által definiált.

Segédeszközök megjelenítők írásához

A nyomkövető eljárásokat biztosít

- kifejezésekben található FD változók megjelöléséhez (*annotáláshoz*);
- annotált kifejezések jól olvasható kiírásához;
- jelmagyarázat előkészítéséhez és kiírásához.

Kifejezések elnevezése

Név rendelhető egy-egy változóhoz vagy tetszőleges kifejezéshez.

- ilyenkor minden a kifejezésben előforduló változó is „értelmes” nevet kap;
- egyes esetekben automatikusan is előállhatnak nevek;
- a név segítségével hivatkoznak a megjelenítők az egyes változókra;
- az elnevezett kifejezések lekérdezhetők a nevük alapján.

Alapszintű használat
Az FDBG be- és kikapcsolása

- `fdbg_on`
  `fdbg_on(`+*Options*`)`
  Engedélyezi a nyomkövetést alapértelmezett vagy megadott beállításokkal. Lethetséges opciók:
  - `file(`*Filename*`, `*Mode*`)`
    A megjelenítők kimenete a *Filename* nevű állományba irányítódik át, amely az `fdbg_on/1` hívásakor nyílik meg *Mode* módban (`write` vagy `append`).
  - `exit_hook(`*Goal*`)`
    Goal két argumentummal kiegészítve meghívódik a korlátok felébredésekor. Pl. `fdbg_show/2`, ld. később.
  - `labeling_hook(`*Goal*`)`
    Goal három argumentummal kiegészítve meghívódik minden címkézési eseménykor. Pl. `fdbg_label_show/3`, ld. később.
- `fdbg_off`
  Kikapcsolja a nyomkövetést.
- `fdbg_output(`-*Stream*`)`
  A megjelenítők a *Stream* folyamra írnak. Dinamikus predikátum, vagy az FDBG bekapcsolásakor jön létre, vagy a felhasználónak kell definiálnia.

1. példa
Kimenet átirányítása, beépített megjelenítő, nincs címkézési nyomkövetés.

```
| ?- fdbg_on([file('my_log.txt', append), exit_hook(fdbg_show)]).
{The clp(fd) debugger is switched on}
```

2. példa
Kimenet nincs átirányítva (ld. `assert/1`), saját és beépített megjelenítő.

```
| ?- fdbg_on([exit_hook(fdbg_show), exit_hook(my_show),
              labeling_hook(fdbg_label_show)]),
     assert(fdbg_output(user_error)).
{The clp(fd) debugger is switched on}
```

Beépített megjelenítők

- `fdbg_show(+`*Constraint*`, +`*Actions*`)`
  Beépített korlát-megjelenítő, kiírja az aktuális korlátot és a hozzá tartozó jelmagyarázatot.

  ```
  exactly(1,[<a>,<b>,<c>],2)
      a = 0..2 -> {1}
      b = {0}\/{2}
      c = 0..2 -> {1}
      Constraint exited.
  ```

- `fdbg_label_show(+`*Event*`, +`*ID*`, +`*Variable*`)`
  Beépített címkézés-megjelenítő.

  ```
  Labeling [13, <c>]: starting in range {0}\/{2}.
  Labeling [13, <c>]: dual: <c> = 0
  [...]
  Labeling [13, <c>]: dual: <c> = 2
  [...]
  Labeling [13, <c>]: failed.
  ```

- `fdbg_guard(+`*Goal*`, +`*Constraint*`, +`*Actions*`)`
  Korlát-megjelenítő, amely valójában nem ír ki semmit. Megoldások elvesztésének megfigyelésére alkalmas.

  ```
  | ?- fdbg_on([exit_hook(fdbg_guard(user:print(user_error)))]).
  {The clp(fd) debugger is switched on}

  yes
  | ?- domain([X], -1, 1), fdbg_name(fdbg_guard, [X-{0}]),
       exactly(0, [X], 0).
  [_661-[[0|0]]]
  X in{-1}\/{1} ?

  yes
  ```

Kifejezések elnevezése

Egy kifejezés elnevezésekor

- a megadott név hozzárendelődik a teljes kifejezéshez;
- a kifejezésben szereplő összes változóhoz egy-egy származtatott név rendelődik – ez a név a megadott névből és a változó kiválasztójából keletkezik (struktúra argumentum-sorszámok ill. lista indexek sorozata);
- a létrehozott nevek egy globális listába kerülnek;
- ez a lista mindig egyetlen toplevel híváshoz tartozik (*illékony*).

Származtatott nevek

származtatott név = névtő + kiválasztó

Pl. `fdbg_name(foo, bar(A, [B, C]))` hatására a következő nevek generálódnak:

név	kifejezés	megjegyzés
`foo`	`bar(A, [B, C])`	a teljes kifejezés
`foo_1`	`A`	`bar` első argumentuma
`foo_2_1`	`B`	`bar` második argumentumának első eleme
`foo_2_2`	`C`	`bar` második argumentumának második eleme

Predikátumok

- `fdbg_name(+`*Name*`, +`*Term*`)`
  A *Term* kifejezéshez a *Name* nevet rendeli az aktuális toplevel hívásban.
- `fdbg_current_name(?`*Name*`, -`*Term*`)`
  - lekérdez egy kifejezést (változót) a globális listából a neve alapján;
  - felsorolja az összes tárolt név-kifejezés párt.
- `fdbg_get_name(+`*Term*`, -`*Name*`)`
  Name a *Term* kifejezéshez rendelt név. Ha *Term*-nek még nincs neve, automatikusan hozzárendelődik egy.

Testreszabás

Amikor nem kielégítő a beépített megjelenítők kimenete, lehetőség van beavatkozni kissebb vagy nagyobb mértékben.

`fdbg_show/2` kimenetének hangolása kampókkal

- Az alábbi kampóknak a következő három argumentuma van:
  - *Name*: az FD változó neve
  - *Variable*: maga a változó
  - *FDSetAfter*: a változó tartománya, *miután* az aktuális korlát elvégezte rajta a szűkítéseket
- `fdbg:fdvar_portray(+`*Name*`, +`*Variable*`, +`*FDSetAfter*`)`
  A kiírt korlátokban szereplő változók megjelenésének megváltoztatására szolgál. Az alapértelmezett viselkedés *Name* kiírása kacsacsőrök között.

```
:- multifile fdbg:fdvar_portray/3.
fdbg:fdvar_portray(Name, Var, _) :-
       fd_set(Var, Set), fdset_to_range(Set, Range),
       format('<~p = ~p>', [Name, Range]).
```

- `fdbg:legend_portray(+`*Name*`, +`*Variable*`, +`*FDSetAfter)*
  A jelmagyarázat minden sorára meghívódik. A sorokat mindenképpen négy szóköz nyitja és egy újsor karakter zárja.

```
:- multifile fdbg:legend_portray/3.
fdbg:legend_portray(Name, Var, Set) :-
        fd_set(Var, Set0), fdset_to_list(Set0, L0),
        fdset_to_list(Set, L),
        (   L0 == L
        ->  format("~p = ~p", [Name, L])
        ;   format("~p = ~p -> ~p", [Name, L0, L])
        ).
```

A példák kimenete összevetve az alapértelmezettel

```
exactly(1,[<a = 0..2>,2],1)    |    exactly(1,[<a>,2],1)
    a = [0,1,2] -> [1]         |        a = 0..2 -> {1}
    Constraint exited.         |        Constraint exited.
```

Segéd predikátumok

A változók tartományának kiírásához és az ún. *annotáláshoz* több predikátum adott. Ezeket használják a beépített nyomkövetők, de hívhatók kívülről is.

Annotálás

- `fdbg_annotate(+`*Term0*`, -`*Term*`, -`*Vars*`)`
  `fdbg_annotate(+`*Term0*`, +`*Actions*`, -`*Term*`, -`*Vars*`)`
  A *Term0* kifejezésben található összes FD változót megjelöli, azaz lecseréli egy `fdvar/3` struktúrára. Ennek tartalma:
  - a változó neve;
  - a változó maga (tartománya még a szűkítés előtti állapotokat tükrözi);
  - egy FD halmaz, amely a változó tartománya *lesz* az *Actions* akciólista szűkítései után.

  Az így kapott kifejezés *Term*, a beszúrt `fdvar/3` struktúrák listája *Vars*.

Példa annotálás

```
| ?- length(L, 3), domain(L, 0, 10), fdbg_name(list, L),
     fdbg_annotate(member(0, L, 1), Member, _).

Member = member(0,[fdvar(list_1,_809,[[0|10]]),
                   fdvar(list_2,_840,[[0|10]]),
                   fdvar(list_3,_871,[[0|10]])],1)
```

Jelmagyarázat

- `fdbg_legend(+`*Vars*`)`
  `fdbg_legend(+`*Vars*`, +`*Actions*`)`
  Az `fdbg_annotate/3,4` által előállított változólistát és az *Actions* listából levonható következtetéseket jelmagyarázatként kiírja:
  - egy sorba egy változó leírása kerül;
  - minden sor elején a változó neve szerepel;
  - a nevet a változó tartománya követi (régi `->` új).

Saját megjelenítő írása

- *Globális korlát megjelenítő*
  my_global_visualizer(+*Arg1*, ..., +*Constraint*, +*Actions*)
  Constraint az éppen felébredt korlát, *Actions* az általa visszaadott akciólista.
  `fdbg_on(exit_hook(`*my_global_visualizer*(*Arg1*, ...)`))`
- *Címkézés megjelenítő*
  my_labeling_visualizer(+*Arg1*, ..., +*Event*, +*ID*, +*Var*)
  Event egy az eseményt leíró kifejezés:

`start`	egy címkézés kezdete
`fail`	egy címkézés meghiúsulása
`step(`*Step*`)`	egy címkézési lépés, amelyet *Step* ír le

  ID a címkéző kísérlet azonosítója, *Var* pedig a címkézett változó.
  `fdbg_on(labeling_hook(`*my_labeling_visualizer*(*Arg1*, ...)`))`

Példa megjelenítők

Érdemes megnézni az `fdbg_show/2` megjelenítő kódját:

```
fdbg_show(Constraint, Actions) :-
        fdbg_annotate(Constraint, Actions, AnnotC, CVars),
        fdbg_output(S),
        print(S, AnnotC), nl(S),
        fdbg_legend(CVars, Actions),
        nl(S).
```

Gyakran szükség lehet arra, hogy csak bizonyos korlátokat vizsgáljunk. Ilyenkor jól jön egy szűrő, pl.

```
filter_show(Constraint, Actions) :-
        Constraint = scalar_product(_,_,_,_),
        fdbg_show(Constraint, Actions).
```

És hogy használni is tudjuk:

```
:- fdbg_on([exit_hook(filter_show),
            labeling_hook(fdbg_label_show),
            file('fdbg.log', write)]).
```

Jelmagyarázat-készítés

- a változók listáját az `fdbg_annotate/3,4` által visszaadott *Vars* lista alapján lehet kiírni
- egyéb következtetések kinyeréséhez adott egy segédeljárás, amely az akciólistát egy könnyebben feldolgozható alakra hozza:

  `fdbg_transform_actions(+`*Actions*`, +`*Vars*`, -`*Transformed*`)`
  Az *Actions* listát egy könnyebben feldolgozható alakra hozva *Transformed*-ban adja vissza. A *Transformed* lista lehetséges elemei:

  - `exit`: a korlát kilép
  - `fail`: a korlát meghiúsul egy `fail` akció miatt
  - `fail(`*Action*`)`: a korlát meghiúsul, mert az *Action* akció meghiúsul (pl. `0=1` vagy `X in_set []`)
  - `fdvar(`*Name*`, `*Var*`, `*FDSet*`)`: ebben az esetben *Actions* nem csak a *Vars* listában szereplő változókat szűkítette, hanem másokat is; ez egy ilyen változót leíró `fdvar/3` struktúra
  - `call(`*Goal*`)`: az `Actions` akciólista eredetileg is tartalmazta ezt az akciót; az FDBG az ilyen hívásokat nem tudja kezelni, csak értesíti a felhasználót
  - bármi más: az akciólistában fel nem ismert akció is volt, ez módosítatlanul lemásolódott

Mágikus sorozatok

```
:- use_module(fdbg).
:- use_module(library(clpfd)).
:- use_module(library(lists)).

magic(N, L) :-
        length(L, N),
        fdbg_name(list, L), % <--- !!!
        N1 is N-1,
        domain(L, 0, N1),
        occurrences(L, 0, L),
%       sum(L, #=, N),
%       findall(I, between(0, N1, I), C),
%       scalar_product(C, L, #=, N),
        labeling([ff], L).

occurrences([], _, _).
occurrences([E|Ek], I, List) :-
        exactly(I, List, E), J is I+1,
        occurrences(Ek, J, List).
```

Példa futtatás

```
| ?- magic(4, L).

L = [1,2,1,0] ? ;

L = [2,0,2,0] ? ;

no
| ?- magic(10, L).

L = [6,2,1,0,0,0,1,0,0,0] ? ;

no
```

Példa nyomkövetés

```
| ?- [magic].

| ?- fdbg_on.
{The clp(fd) debugger is switched on}

yes
| ?- magic(4, L).

L = [1,2,1,0] ?

yes
| ?- fdbg_off.
{The clp(fd) debugger is switched off}

yes
```

Az `fdbg.log` állomány (alapértelmezett kimenet) vége

```
exactly(2,[1,2,<list_3>,0],<noname_3>)
    list_3 = 1..2
    noname_3 = 1..3 -> 1..2

exactly(1,[1,2,<list_3>,0],2)
    list_3 = 1..2 -> {1}
    Constraint exited.

<noname_3>#=1
    noname_3 = {1}
    Constraint exited.

exactly(2,[1,2,1,0],1)
    Constraint exited.
```

Grafikus megjelenítő (látványterv)

Előkészületben van az `fdbg_show/2` grafikus változata, amely a jelmagyarázatot színes négyzetekkel jeleníti meg. Ennek egy képe látható a következő ábrán: