

Algel I. gyakorlat

Barátkozás a tárggyal és egymással

2013. február 15.

1. Tegyük fel, hogy van egy számítógépes programunk, ami egy k méretű feladaton a jelenlegi gépünkön 1 nap alatt fut le. Beszereztünk egy százszor gyorsabb számítógépet. Ugyanazon programmal mekkora feladatot lehet az új gépen egy nap alatt megoldani, ha a program lépésszáma n méretű feladat esetén (a) n -nel, (b) n^3 -bel, illetve (c) 2^n -nel arányos?
 2. Jelöljük $T(n)$ -nel egy algoritmus legnagyobb lehetséges lépésszámát az n méretű inputokon. Tudjuk, hogy $T(1) = 2$ és $T(n) = T(n-1) + 3$, amennyiben $n \geq 2$. Adjuk meg $T(n)$ -t zárt alakban!
 3. Jelöljük $T(n)$ -nel egy algoritmus legnagyobb lehetséges lépésszámát az n méretű inputokon. Tudjuk, hogy $T(1) = 2$ és $T(n) = 3 \cdot T(n-1) + 1$, amennyiben $n \geq 2$. Adjuk meg $T(n)$ -t zárt alakban!
 4. Négy ember egy rozoga hídhoz érkezik éjszaka. Egyszerre legfeljebb kettőjüket bírja el, ráadásul fény nélkül nem lehet biztonságosan átkelni, lámpájuk viszont csak egy van. Magabiztosság- és testi adottságbeli különbségek miatt az átkelési idők a következők: 1, 2, 5 és 10 perc az egyes emberekre. Legkevesebb mennyi idő alatt tudnak átjutni? (Kerülőút nincs, úszni nem lehet, valamint két ember átkelése esetén pontszerűnek tekintendők.)
 5. Egy f fokú létrán bizonyos fokok annyira rozogák, hogy ha rálépünk, leszakadnak. Szerencsére tudjuk, hogy melyik fokok ilyenek, hova nem szabad lépnünk. Egy lépéssel legfeljebb 3 fokot tudunk lépni. Adjunk algoritmust ami meghatározza, hogy a létra aljától fel tudunk-e jutni a létra legfelső fokára! (Feltehető, hogy a legfelső fokra rá szabad lépni.) Az algoritmus lépésszáma legyen $c \cdot f$, ahol c valami fix konstans.
 6. Adott n chip, melyek képesek egymás tesztelésére a következő módon: ha összekapcsolunk két chipet, mindkét chip nyilatkozik a másikról, hogy hibásnak találta-e. Egy hibátlan chip korrektül felismeri, hogy a másik hibás-e, míg egy hibás chip akármilyen választ adhat. Tegyük fel, hogy a chipek több, mint a fele korrekt. Adjunk algoritmust, mely n -nél kevesebb fenti tesztet használva kikeres egy jó chipet.
-
7. Igaz-e a következő állítás: Minden olyan borgnak, aki ebben a szobában van, piros fülei vannak.
 8. Mi a tagadása az alábbi állításoknak? Igazak ezek az állítások?
 - (a) Minden hétfőn van algel gyakorlat.
 - (b) Minden olyan hallgató, aki jár algel gyakorlatra, átmegy a vizsgán.
 - (c) Minden olyan 17 lábú zsiráf, aki jár algel gyakorlatra, az átmegy a vizsgán.
 9. Fogalmazzuk meg az alábbi állítás tagadását úgy, hogy ne szerepeljen benne tagadószó! „Minden asszony életében van olyan pillanat, hogy szeretne olyat tenni, ami nem szabad.”
 10. Van két állítás, p és q . Tudjuk, hogy ha p igaz, akkor q is igaz. Következik-e ebből, hogy ha q nem igaz, akkor p sem igaz?
 11. Tudjuk, hogy minden hömpörő surjancs. Mondjuk meg minden alábbi állításra, hogy biztosan igaz, lehetséges, vagy biztosan hamis!
 - (a) Tudjuk valamiről, hogy nem hömpörő. Azt állítom, hogy ez surjancs.
 - (b) Tudjuk valamiről, hogy hömpörő. Azt állítom, hogy ez nem surjancs.

- (c) Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs. Azt állítom, hogy ez hömpörő.
 - (d) Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs. Azt állítom, hogy ez nem hömpörő.
 - (e) Tudjuk valamiről, hogy surjancs. Azt állítom, hogy ez nem hömpörő.
-

12. Bizonyítsuk be, hogy

- (a) $\log_2 f(n) = \Theta(\log_{100} f(n)) \quad (f(n) > 0)$,
- (b) $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0 \quad (a_k \neq 0) \Rightarrow f(n) = \Theta(n^k)$,
- (c) $2^{n+1} = O(2^n)$, de $2^{2n} \neq O(2^n)$,
- (d) $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n)) \quad (f(n), g(n) > 0)!$

13. Igaz-e, hogy

- (a) ha $f = O(g)$ és $g = O(h)$, akkor $f = O(h)$;
- (b) ha $f = \Omega(g)$ és $g = \Omega(h)$, akkor $f = \Omega(h)$?

14. Tudjuk, hogy $f(x) = O(h(x))$ és $g(x) = O(h(x))$. Igaz-e, hogy

- (a) ha $h(x) = 3x$, akkor $f(g(x)) = O(h(x))$;
- (b) $f(g(x)) = O(h(x)) \forall h$ függvényre?

15. Az alábbi függvényeket rendezzük olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!

$$f_1(n) = 8n^{2.5}, \quad f_2(n) = 5\sqrt{n} + 1000n, \quad f_3(n) = 2^{\log^2 n}, \quad f_4(n) = 2008n^2 \log n$$

16. Az $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n^2)$. Lehetséges-e, hogy

- (a) $\forall n$ hosszú bemeneten $O(n)$ lépést használ?
- (b) $\exists x$, hogy az x bemeneten az algoritmus lépésszáma $10|x|^2 \log |x| - 800$ (ahol $|x|$ az x bemenet hosszát jelöli)?

17. **[Vizsga: 2007. június 19.]** Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!

$$f_1(n) = 2^{100n} - 2^{50n}, \quad f_2(n) = 2007n^3, \quad f_3(n) = 3^{3n}$$

18. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Egy $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n \log n)$. Lehetséges-e, hogy

- (a) van olyan x bemenet, amin a lépésszáma x^3 ?
- (b) minden x bemeneten legfeljebb $2007|x|$ lépést használ? (Szokás szerint $|x|$ az x szó hosszát jelöli.)

19. **[Vizsga: 2007. június 5.]** Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $L(n)$. Azt tudjuk, hogy minden $n = 2k > 4$ páros számra $L(2k) \leq L(2k - 2) + 1$ teljesül, és hogy $L(4) = 10$. Következik-e ebből, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n)$?

20. Jelöljük $T(n)$ -nel egy algoritmus legnagyobb lehetséges lépésszámát az n méretű inputokon. Tudjuk, hogy $T(n) \leq 10$, ha $n \leq 5$ és $T(n) \leq T(n - 1) + n/3$, ha $n > 5$. Ekkor mit tudunk mondani $T(n) = O(n)$, $T(n) = O(n^2)$ és $T(n) = O(n^3)$ egyenlőségek helyességéről?