

Algel XIV. gyakorlat

$P?NP$

2012. május 18/2.

Hasznos tudnivalók

- Eldöntési problémákról beszélünk!
- $P \subseteq NP$, $P \subseteq coNP$. Tehát ha valami P -beli, akkor **biztos**, hogy NP -beli és $coNP$ -beli is!!!
- **P -beliség bizonyítása:** adunk egy polinom idejű algoritmust. Nem redukálunk, nem fejtegetjük P és NP viszonyát. Nem fontos a hatékonyság, n^{100} is polinomiális!
- **NP -beliség bizonyítása:** tanú mutatása, tanú mérete polinomiális, ellenőrzés polinomiális. Nem kell algoritmus a tanú előállítására!!! A tanú lehet pofátlanul egyszerű. Nem redukálunk, nem fejtegetjük P és NP viszonyát.
- **NP -teljesség bizonyítása** π_{uj} problémára:
 1. π_{uj} NP -beliségének bizonyítása.
 2. π_{uj} NP -nehézségének bizonyítása:
 - (a) Találunk egy vele kapcsolatba hozható problémát, ami ismert NP -teljes, ez legyen π_{ismert} .
 - (b) Bemutatunk egy $\pi_{ismert} \prec \pi_{uj}$ Karp-redukciót, az irány **eszméletlenül fontos!** Azaz van egy π_{ismert} -beli kérdésünk (**nem az aktuális probléma**, hanem egy ismert nehéz!), azt átalakíthatjuk, és átalakítva bedobjuk a π_{uj} -t (az egyelőre ismeretlen nehézségű problémát) megoldó fekete dobozba, és ez a válasz lesz az eredeti kérdésünkre is a válasz! Tehát az átalakítást kell megadni, arra jár a pont.
 - (c) Bizonyítjuk a Karp-redukció helyességét. Azaz, ha f az átalakítás: $x \in \pi_{ismert} \Leftrightarrow f(x) \in \pi_{uj}$ a bizonyítandó. Figyelem! **Két bizonyítás**, akkor és csak akkor, „ $\Leftrightarrow$ ”!
 - (d) Belátjuk, hogy f polinom időben elvégezhető.

Feladatok

1. Adjunk Karp-redukciót a 3-SZÍN nyelvről a 4-SZÍN nyelvre!
 2. [Vizsga: 2007. május 29.] A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazza meg a feladathoz tartozó nyelvet és vagy lássa be róla, hogy P -ben van vagy azt, hogy NP -teljes.
 3. [Vizsga: 2008. június 10.] Tegyük fel, hogy $P \neq NP$. Az alábbi feltételek közül melyikből következik és melyikből nem következik hogy az X eldöntési probléma nem P -beli?
 - (a) Egy NP -teljes Y problémára X Karp-redukálható.
 - (b) Egy NP -teljes Y probléma Karp-redukálható X -re.
 - (c) az X probléma NP -beli.
-
4. Mi az alábbi problémák bonyolultsága, ha az input egy $G(V, E)$ gráf ($|V| = n, |E| = e$)? Természetesen bizonyítsuk is be!
 - (a) Van-e G -ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?
 - (b) Van-e G -ben legalább $n/100$ hosszúságú kör?

(c) Van-e G -ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális foksám legfeljebb 2?

(d) Van-e G -ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális foksám legfeljebb 3?

5. Bizonyítsuk be, hogy a leghosszabb út meghatározása egy irányított, élsúlyozott G gráfban NP -teljes! (Pontosabban az ehhez tartozó eldöntési probléma.) Másképpen: bizonyítsuk be, hogy

$$L = \{(G, k) \mid G \text{ irányított, élsúlyozott gráf, van benne legalább } k \text{ súlyú út}\}$$

NP -teljes!

6. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Tudjuk, hogy a síkgráfokból álló nyelv P -ben van. Legyen a SÍK-MAXKLIKK nyelv a következő:

$$\{(G, k) \mid G \text{ egy síkgráf, amiben van } k \text{ pontú klikk}\}$$

Mutassa meg, hogy ez a nyelv NP -teljes, vagy mutassa meg, hogy a nyelv P -ben van.

7. **[Vizsga: 2009. május 28.]** P -beli vagy NP -teljes az alábbi probléma? Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és az a kérdés, hogy van-e olyan C kör a gráfban, melyhez minden $v \notin C$ csúcsból vezet él.

8. **[Vizsga: 2010. május 27.]** Az árvíz több helyen fenyegeti a gátakat, tudjuk, hogy n kritikus hely van. Ezek közül az i -ediknél a gát megfelelő megerősítéséhez h_i darab homokzsák kell. Ha az erősítés nem történik meg (vagy csak kevesebb homokzsákkal), akkor az i -edik helyen k_i kárt okoz a folyó. Adottak a h_i és k_i pozitív számok, továbbá a gátak megerősítéséhez összesen rendelkezésre álló homokzsákok Z száma ($Z > 0$ egész). Azt szeretnénk meghatározni, hogy ennyi homokzsákkal hogyan tudjuk a kárt minimalizálni, ha feltesszük, hogy a meg nem erősített pontokon keletkező károk összeadódnak.

Fogalmazza meg a feladatot eldöntési problémaként és vagy adjon rá polinomiális algoritmust vagy igazolja, hogy a probléma NP -teljes!

9. **[Vizsga: 2010. május 27.]** Az X probléma bemenete egy binárisan felírt $N > 0$ egész szám, és akkor lesz a válasz igen, ha N nem 2-hatvány. Az Y probléma bemenete egy G egyszerű gráf, és akkor lesz a válasz igen, ha G csúcsainak színezéséhez 3-nál több szín kell. Ha feltesszük, hogy $P \neq NP$, akkor van-e $X \prec Y$, illetve $Y \prec X$ Karp-redukció?

10. **[Vizsga: 2010. június 17.]** Az X problémában adott egy G dag és egy k pozitív egész szám, a kérdés, hogy van-e G -ben legalább k élű út. Igaz-e, hogy $X \prec 3SZÍN$, illetve, hogy $3SZÍN \prec X$?

11. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Igazolja, hogy ha a $3SZÍN$ nyelv benne van $coNP$ -ben, akkor $NP = coNP$.

11. Legyenek $x_1, \dots, x_n$ Boole-változók. Legyen adott

"Ha x_i igaz, akkor x_j is igaz."

típusú állítások egy rendszere ("axiómarendszer"). Készítsük el azt az irányított gráfot, melynek a csúcsai $x_1, \dots, x_n$, éleit pedig úgy kapjuk, hogy minden egyes $x_i \Rightarrow x_j$ "axiómának" megfelelően behúzzuk az $x_i \rightarrow x_j$ élt.

(a) Hogyan értelmezhetők a gráf tranzitív lezártjának az élei?

(b) Hogyan értelmezhetők a gráf erős (erősen összefüggő) komponensei? $\diamond$

12. Legyen most olyan rendszerünk, amiben a

"Ha x_i igaz, akkor x_j hamis.", "Ha x_i hamis, akkor x_j igaz.", valamint "Ha x_i hamis, akkor x_j is hamis."

típusú "axiómák" is meg vannak engedve. Hogyan lehet gráf segítségével megfogalmazni azt, hogy a rendszerünk tartalmaz-e önellentmondást?

13. Legyen adva egy $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) \wedge (\dots \vee \dots) \wedge \dots$ típusú Boole-kifejezésünk: kéttagú "vagy"-kifejezések és "és"-éből áll; egy "vagy" kifejezés egy tagja egy változó (x_i), vagy egy változó negáltja ($\bar{x}_i$) lehet. Adjunk hatékony algoritmust annak eldöntésére, hogy a formula kielégíthető-e (van-e a változóknak olyan "igaz-hamis" behelyettesítése, hogy a kifejezés értéke "igaz").