

Algel XIII. gyakorlat

P, NP

2012. május 2.

Hasznos tudnivalók

- Eldöntési problémákról beszélünk!
- $P \subseteq NP$, $P \subseteq coNP$. Tehát ha valami P -beli, akkor **biztos**, hogy NP -beli és $coNP$ -beli is!!!
- **P -beliség bizonyítása:** adunk egy polinom idejű algoritmust. Nem redukálunk, nem fejtegetjük P és NP viszonyát. Nem fontos a hatékonyság, n^{100} is polinomiális!
- **NP -beliség bizonyítása:** tanú mutatása, tanú mérete polinomiális, ellenőrzés polinomiális. Nem kell algoritmus a tanú előállítására!!! A tanú lehet pofátlanul egyszerű. Nem redukálunk, nem fejtegetjük P és NP viszonyát.

Feladatok

1. Lássuk be, hogy az alábbi problémák NP -beliek! Melyekről tudjuk megmondani, hogy $coNP$ -ben vannak? Melyekről, hogy P -ben?

- (a) $L_1 = \{(G, k) \mid G \text{ gráf kiszínezhető } k \text{ színnel}\}$
- (b) $L_2 = \{(G, k) \mid G \text{ páros gráfban van } k \text{ élből álló párosítás}\}$
- (c) $L_3 = \{G \mid G \text{ irányítatlan gráfban van Euler-kör}\}$
- (d) $L_4 = \{(G, k) \mid G \text{ irányítatlan gráfban van } k \text{ független pont}\}$
- (e) $L_5 = \{G \mid G \text{ irányítatlan gráf, van benne pontosan 100 élből álló kör}\}$
- (f) $L_6 = \{(G, k) \mid G \text{ irányítatlan gráf, van benne legalább } k \text{ élből álló kör}\}$
- (g) $L_7 = \left\{ (s_1, s_2, \dots, s_n, b) \mid \forall i \ s_i, b \in \mathbb{Z}^+; \exists j_1, \dots, j_k \ (1 \leq k \leq n) : \sum_{l=1}^k s_{j_l} = b \right\}$

2. Bizonyítsuk be, hogy P -beli az olyan négy színnel színezhető G gráfokból álló nyelv, melyekre igaz, hogy G csúcsai kiszínezhetők a piros, zöld, sárga, kék színekkel úgy, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs legyen kék!
3. **[Vizsga: 2007. május 29.]** A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazza meg a feladathoz tartozó nyelvet. Lássuk be róla hogy NP -ben van. Lehet P -ben?
4. Bizonyítsuk be a következő problémáról, hogy P -beli!

$$L = \{G \mid G \text{ irányítatlan teljes gráf, amiben van Hamilton-kör}\}$$

5. Tegyük fel, hogy van egy olyan F eljárásunk, ami egy input G gráfra és k számra 1 lépés alatt megmondja, hogy van-e G -ben legalább k méretű független ponthalmaz. Tervezzünk olyan algoritmust, ami polinomidőben
 - (a) meghatározza $\alpha(G)$ -t!
 - (b) talál egy $\alpha(G)$ méretű független ponthalmazt!

-
6. Mi az alábbi problémák bonyolultsága, ha az input egy $G(V, E)$ gráf ($|V| = n, |E| = e$)? Természetesen bizonyítsuk is be!

- (a) Van-e G -ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?
 - (b) Van-e G -ben legalább $n/100$ hosszúságú kör?
 - (c) Van-e G -ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális foksám legfeljebb 2?
 - (d) Van-e G -ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális foksám legfeljebb 3?
7. Bizonyítsuk be, hogy a leghosszabb út meghatározása egy irányított, élsúlyozott G gráfban NP -beli! (Pontosabban az ehhez tartozó eldöntési probléma.) Másképpen: bizonyítsuk be, hogy

$$L = \{(G, k) \mid G \text{ irányított, élsúlyozott gráf, van benne legalább } k \text{ súlyú út}\}$$

NP -beli! Lehet-e P -ben?

8. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Tudjuk, hogy a síkgráfokból álló nyelv P -ben van. Legyen a SÍK-MAXKLIKK nyelv a következő:

$$\{(G, k) \mid G \text{ egy síkgráf, amiben van } k \text{ pontú klikk}\}$$

Mutassa meg, hogy a nyelv P -ben van.

9. **[Vizsga: 2009. május 28.]** Mi mondható az alábbi probléma bonyolultságáról? Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és az a kérdés, hogy van-e olyan C kör a gráfban, melyhez minden $v \notin C$ csúcsból vezet él.
10. **[Vizsga: 2010. május 27.]** Az árvíz több helyen fenyegeti a gátakat, tudjuk, hogy n kritikus hely van. Ezek közül az i -ediknél a gát megfelelő megerősítéséhez h_i darab homokzsák kell. Ha az erősítés nem történik meg (vagy csak kevesebb homokzsákkal), akkor az i -edik helyen k_i kárt okoz a folyó. Adottak a h_i és k_i pozitív számok, továbbá a gátak megerősítéséhez összesen rendelkezésre álló homokzsákok Z száma ($Z > 0$ egész). Azt szeretnénk meghatározni, hogy ennyi homokzsákkal hogyan tudjuk a kárt minimalizálni, ha feltesszük, hogy a meg nem erősített pontokon keletkező károk összeadódnak.

Fogalmazza meg a feladatot eldöntési problémaként és mutassa meg, hogy NP -beli. Lehet P -beli?

11. Legyenek $x_1, \dots, x_n$ Boole-változók. Legyen adott

"Ha x_i igaz, akkor x_j is igaz."

típusú állítások egy rendszere ("axiómarendszer"). Készítsük el azt az irányított gráfot, melynek a csúcsai $x_1, \dots, x_n$, éleit pedig úgy kapjuk, hogy minden egyes $x_i \Rightarrow x_j$ "axiómának" megfelelően behúzzuk az $x_i \rightarrow x_j$ élt.

- (a) Hogyan értelmezhetők a gráf tranzitív lezártjának az élei?
- (b) Hogyan értelmezhetők a gráf erős (erősen összefüggő) komponensei? $\diamond$

12. Legyen most olyan rendszerünk, amiben a

"Ha x_i igaz, akkor x_j hamis.", "Ha x_i hamis, akkor x_j igaz.", valamint "Ha x_i hamis, akkor x_j is hamis."

típusú "axiómák" is meg vannak engedve. Hogyan lehet gráf segítségével megfogalmazni azt, hogy a rendszerünk tartalmaz -e önellentmondást?

13. Legyen adva egy $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) \wedge (\dots \vee \dots) \wedge \dots$ típusú Boole-kifejezésünk: kéttagú "vagy"-kifejezések "és"-éből áll; egy "vagy" kifejezés egy tagja egy változó (x_i), vagy egy változó negáltja ($\bar{x}_i$) lehet. Adjunk hatékony algoritmust annak eldöntésére, hogy a formula kielégíthető-e (van -e a változóknak olyan "igaz-hamis" behelyettesítése, hogy a kifejezés értéke "igaz").