

Algél X. gyakorlat

Vegyes saláta

1. Egy tanteremben fel van szerelve egy $n \times n$ -es tábla, melyen n^2 villanykörte helyezkedik el. A tábla minden egyes sorához illetve oszlopához tartozik egy-egy nyomógomb, mellyel a megfelelő sorban (oszlopban) található n darab villanykörte állapotát egyszerre lehet átváltoztatni az ellenkezőjére. (Egy gombnyomásra az adott sorban illetve oszlopban égő körték elalszanak, az alvók pedig kigyulladnak.) A szünet kezdetekor az összes körte leoltott állapotban van. Szünetben a nebulók össze-vissza nyomogatják a gombokat. Hány kapcsolással tudja a tanár visszaállítani az eredeti állapotot? (A gombok egyállapotúak, azaz nem látszik rajtuk, hogy megnyomták-e őket vagy sem.)
2. n dobozban golyók vannak szétosztva úgy, hogy a k -adik dobozba éppen k golyó esik. Adjunk optimális lépésszámú módszert az összes doboz kiürítésére, ha a megengedett lépés a következő: jelöljük ki tetszőleges számú dobozt, és mindegyikből vegyünk ki ugyanannyi golyót.
3. Egy $2 \times n$ -es sakktábla mezőin n piros és $n - 1$ kék nyüzgetet helyezünk el. Ezeket olyan módon akarjuk átrendezni, hogy a felső sorban piros, az alsóban kék négyzetek legyenek, s a bal alsó sarok maradjon üres. Ehhez egy-egy lépés során az üres mezőre tolhatjuk valamelyik szomszédját. Bizonyítsuk be, hogy ehhez
 - (a) $O(n^2)$ lépés elégséges és
 - (b) $\Omega(n^2)$ lépés szükséges.
4. Rendezzük egy mátrix soraiban az elemeket növekvő sorrendbe, majd ezt követően az oszlopokat rendezzük hasonló módon. Mutassuk meg, hogy a második rendezés nem rontja el a sorok rendezettségét.
5. Adott egy n bites M természetes szám. Javasoljunk (n -ben) polinomiális idejű módszert $\left\lceil \sqrt[3]{M} \right\rceil$ kiszámítására.
6. Az orosz cár üzenetet akar küldeni a kínai császárnak sürgősen. A Szent Pétervárról Pekingbe menő utat akarja használni, ami n városon megy keresztül $v_1, v_2, \dots, v_n$ sorrendben. A levelet postagalambok viszik, akár több is egymás után. A felesleges kerülők elkerülése érdekében, ha egy galamb a v_i városból v_j városba repül, akkor $i < j$. Segítsünk a cárnak megtervezni a leggyorsabb útvonalat, ha tudjuk minden galambról hogy melyik városból melyik városba repülhet, és mennyi ideig tart az neki.
7. Össze kell fésűnünk az $A_1 < A_2 < \dots < A_n$ és $B_1 < B_2 < \dots < B_{n+1}$ rendezett halmazokat. Bizonyítsuk be hogy a szükséges összehasonlítások minimális száma $2n$. Igazúe hogy alkalmas c állandóra minden (n, k) párra az n és k elemű rendezett halmazok összefésüléséhez kell legalább $c(n + k)$ összehasonlítás?
8. Egy rendezett halmazból n elem kupacban van elhelyezve. Bizonyítsuk be, hogy a legnagyobb elem megkereséséhez $\Omega(n)$ összehasonlítás szükséges!
9.
 - (a) Adjunk egy algoritmust, ami $\lceil 3/2n \rceil - 2$ összehasonlítással megtalálja a legkisebb és legnagyobb elemet.
 - (b) Igazoljuk, hogy $\lceil 3/2n \rceil - 2$ összehasonlítás szükséges is a fenti feladat megoldására.
10. Egy rendezett halmaz adott n eleméből kupacot szeretnénk építeni, melyre (a kupac tulajdonság mellett) teljesül, hogy minden x csúcs bal részfájának az elemei kisebbek mint az x jobb részfájának az elemei. Igazoljuk, hogy ehhez legalább $\Omega(n \log n)$ összehasonlítás szükséges!