

Hálózati folyamatok

A használt fogalmak definiálása

Hálózat

Ez összesen 4 dologból áll:

- Egy irányított G gráf
 - Ennek egy kitüntetett pontja, amit forrásnak hívunk és s -sel jelölünk
 - A gráf még egy kitüntetett pontja, amit nyelőnek hívunk és t -vel jelölünk
 - Egy c függvény, ami minden élhez egy nemnegatív számot rendel. Ez az él kapacitása
// $c(e)$
- Tehát a hálózat egy ilyen $(G; s; t; c)$.

Folyam

Szemléletesen

Adott hálózatban szeretnénk minél több vizet eljuttatni s -ből t -be. A szabályok:

- minden élen legfeljebb annyi víz folyhat át, amennyi annak az élnek a kapacitása
- minden csúcsba ugyanannyi víznek kell befolynia, mint amennyi onnan kifolyik. Ez alól a két kivétel a forrás (itt ∞ mennyiségű víz áll rendelkezésre) és a nyelő (itt ∞ mennyiségű víz tűnhet el).

Formálisan

Egy f függvény, ami minden élhez egy számot rendel úgy, hogy:

$0 \leq f(e_i) \leq c(e_i)$ minden i -re, és

$\sum_{v\text{-be menő élek}} f(e) - \sum_{v\text{-ből induló élek}} f(e) = 0$ minden v eleme $V(G) \setminus \{s; t\}$

Folyam értéke

Amennyi víz eljutott s -ből t -be, ha az adott folyam szerint áramoltattuk, tehát
 $\sum_{s\text{-ből induló élek}} f(e)$

Vágás – jelölésben C

Szemléletesen

Úgy hagyunk el éleket a gráfból, hogy már ne lehessen eljutni s -ből t -be. Ezeknek az éleknek a halmaza egy vágás.

Formálisan

A gráf csúcsait két halmazra osztjuk, s -nek és t -nek különböző halmazban kell lennie. Az s -t tartalmazó halmazt jelöljük X -szel. Azoknak az éleknek a halmaza, amik az x halmazból a $V(G) \setminus X$ -be vezetnek egy vágást alkotnak.

Vágás értéke – $c(C)$

A vágás élein a kapacitások összege.

Ford-Fulkerson tétel

A maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével.

Ennek egyszerű következménye, hogy ha egy adott hálózatban találunk egy folyamat és egy vágást, amiknek az értéke egyenlő, akkor biztosak lehetünk abban, hogy egy maximális folyam ill. egy minimális vágás van a kezünkben.

Maximális folyam keresése

Gyakori probléma, hogy egy adott hálózatban meg kell találni a maximális folyamat. Erre alapvetően két módszer létezik.

1. Hasraütés

Ránézésre keresünk egy maximálisnak tűnő folyamat, majd erről belátjuk, hogy tényleg az. Erre a Ford-Fulkerson tétel a legalkalmasabb, ami biztosítja, hogy ha találunk egy ugyanolyan értékű vágást, akkor a folyamunk maximális.

Előnyök:

- Gyors

Hátrányok:

- Ismerni kell a Ford-Fulkerson tételt
- Gondolkodást igényel
- Nem biztos, hogy működik
- Nem használható, ha a feladat algoritmikus megoldást kér.

2. Segédgráfos-javítóutas algoritmus

Pont úgy állunk neki, mint az előző módszernek, veszünk egy szemre jónak tűnő folyamat. A különbség, hogy itt nem múlik a módszer sikere a jó választáson (legfeljebb az időtartama). Ha nem vagyunk túl kreatívak, akár az azonosan 0 folyam is megteszi.

Ezután kreálunk egy segédgráfot, amire a következő szabályaink vannak:

- a pontjai ugyanazok, mint az eredetinek
- berajzolunk minden irányított élt, ami nem telített
- berajzolunk minden irányított élt fordított irányítással, amin a folyamérték nem 0.

// az utolsó két szabály alapján egy élt lehet, hogy kétszer is be kell rajzolnunk, különböző irányítással

Most ebben a segédgráfban kell egy irányított utat találnunk s-ből t-be. (Akár BFS-sel.) Ha ilyen nincs, akkor a folyamunk maximális.

Ha van, akkor ez egy javítóút, vagyis az eredeti gráfban ezen az úton tudjuk növelni a folyamértéket. Ehhez az eredeti irányítású éleken növeljük, a fordított irányításúakon csökkentjük az $f(e)$ -t, mindegyiken ugyanannyival. Ez az ugyanannyi legyen olyan nagy, amennyire csak lehet úgy, hogy egy él se lépje túl a kapacitását ill. egy $f(e)$ se csökkenjen 0 alá. Ezután az új (immár nagyobb) folyamhoz új segédgráfot készítünk.

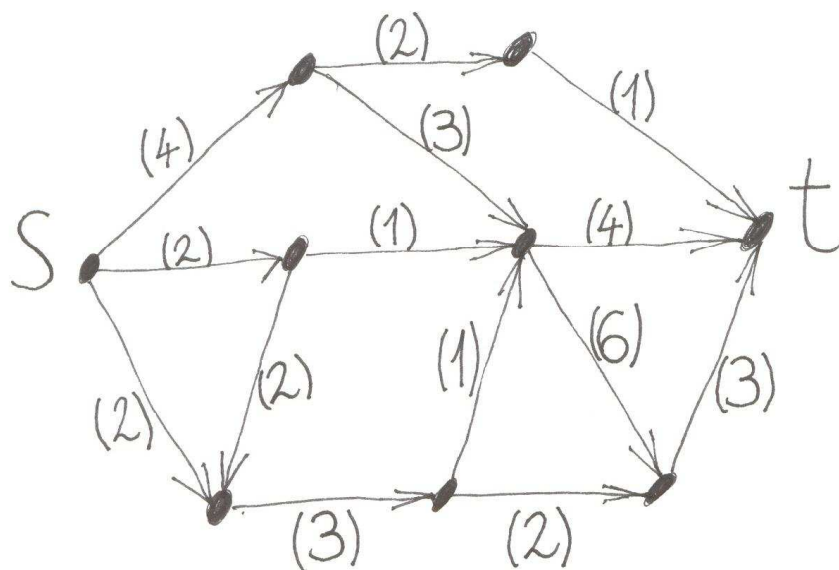
Előnyök:

- Nem kell ismerni a Ford-Fulkerson tételt (ez csak vicc, természetesen ismerni kell)
- Nem igényel gondolkodást
- Biztos, hogy működik
- Használható, ha a feladat algoritmikus megoldást kér

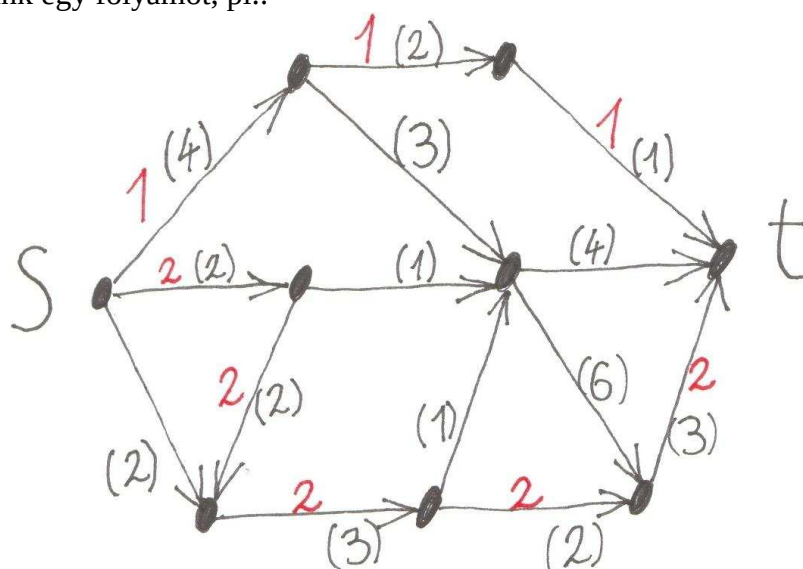
Hátrányok

- Lassú

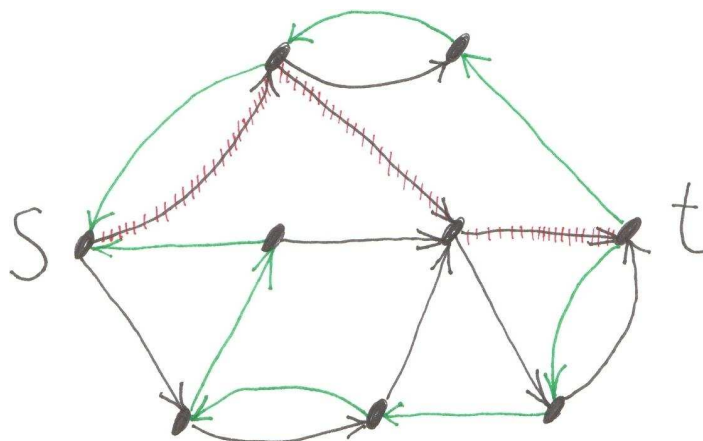
Példa:



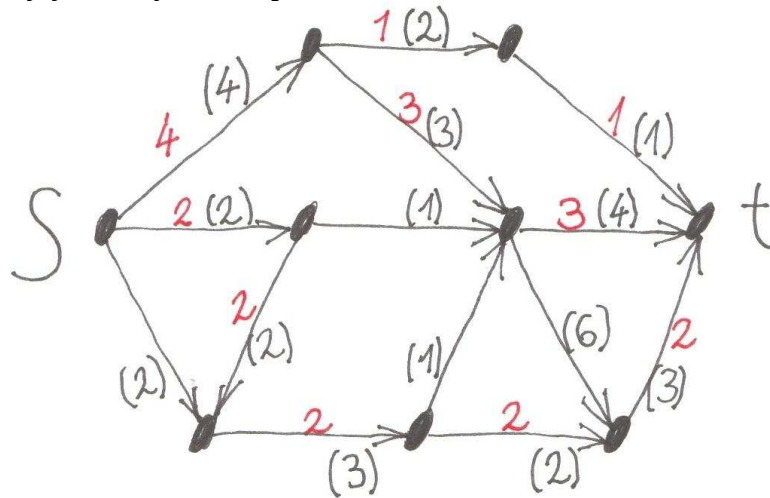
Szemre keresünk egy folyamot, pl.:



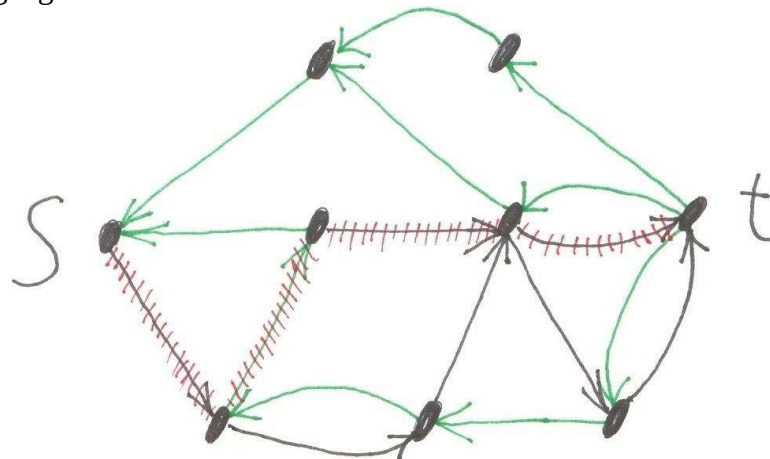
Ehhez elkészítjük a segédgráfot. Feketével jelöltem az eredeti, zölddel a fordított irányítású éleket (ennek a megkülönböztetésnek gyakorlati jelentősége nincs, csak a szemléltetést szolgálják).



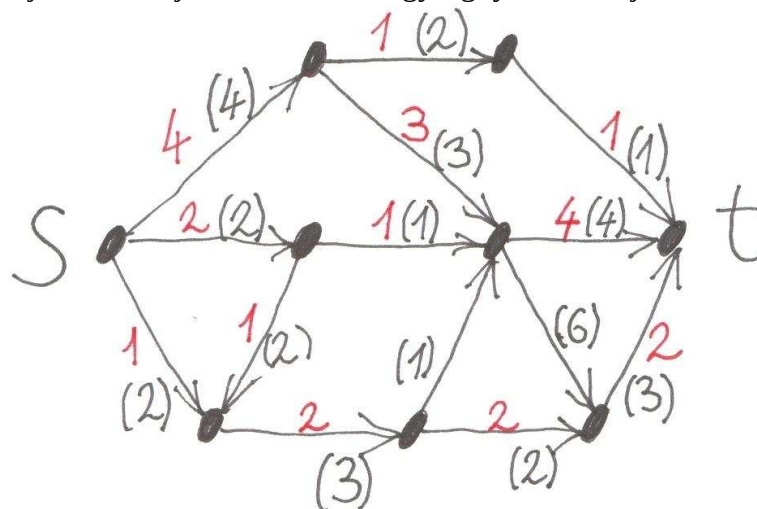
A piros kiemelés egy irányított utat jelöl s-ből t-be, ez lesz a javítóútunk. A legnagyobb javítás, amit itt elvégezhetünk 3 értékű (ez az eredeti gráfból látszik). Ha segít, akár rá is írhatjuk az élekre, hogy ott még mennyit vihetünk, ill. (fordított élek esetén) mennyivel vihetünk kevesebbet az eredeti gráf szerint.
A javítással egy új, jobb folyamatot kaptunk:



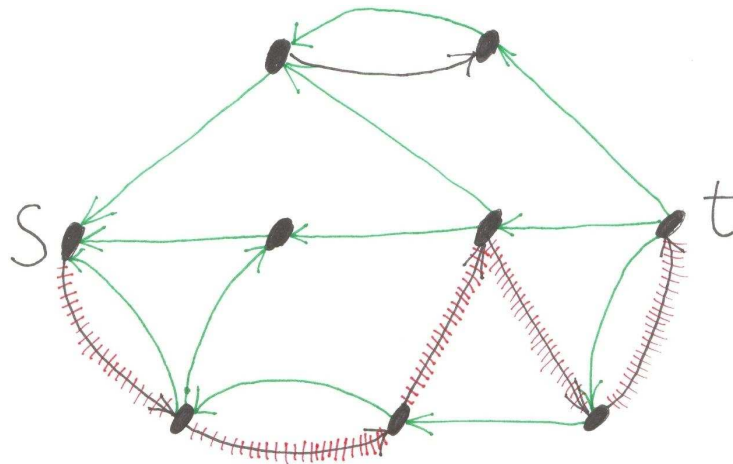
Ehhez ismét segédgráfot készítünk.



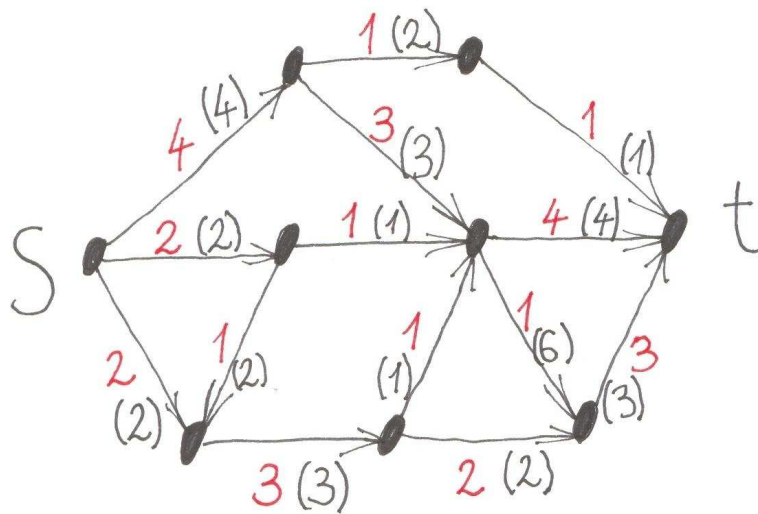
Most olyan javítóutat találtunk, ami fordított élt is használt. Ne feledjük, ezen az élen az eredeti gráfban majd csökkentjük az értéket. 1 egységnyit tudunk javítani:



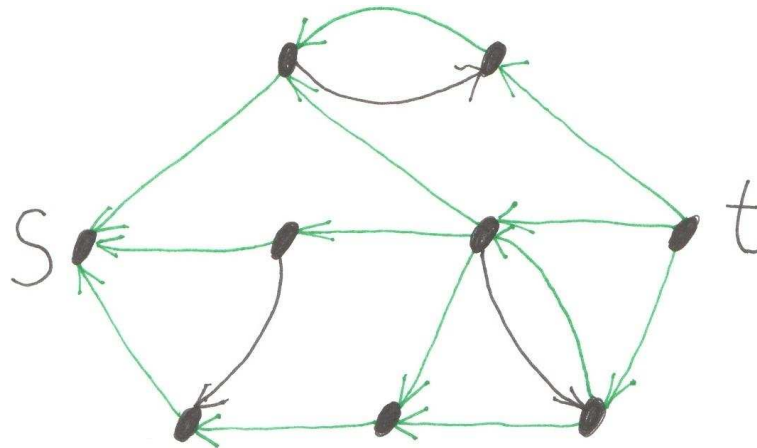
Ehhez ismét segédgráf:



Ismét javítás:



Ismét segédgráf:



Itt már nincs út s-ből t-be, tehát megtaláltuk a maximális folyamot. Ennek értéke 8 (s-ből induló éleken az $f(e)$ összeg). Érdemes ellenőrizni, hogy a kapott függvény tényleg folyam.

Minimális vágás keresése

Előfordulhat, hogy nem maximális folyamra van szükségünk, hanem minimális vágásra. Ennek megtalálására pont ugyanazt a két módszert fogjuk használni.

1. Ránézésre találunk egy folyamot és egy vágást, aminek az értéke egyforma, plusz megemlítjük, hogy van egy ilyen Ford-Fulkerson tétel.
2. A segédgráfos-javítóutas algoritmust használva megkeressük a maximális folyamot (vagy az egyik ilyen). Azt a segédgráfot használjuk, amiben már nem volt s-t út. Megkeressük azokat a pontokat, amik s-ből elérhetők, ők alkotják az X halmazt. Ehhez a halmazhoz tartozó vágás minimális vágás lesz.