

Számítástudomány alapjai

14. gyakorlat – Csoportelmélet – 2008. 12. 09.

<http://www.cs.bme.hu/~peresz/sza/>

1. Csoport-e a $\langle \mathbb{R}_+, * \rangle$ struktúra, ahol az \mathbb{R}_+ alaphalmaz a pozitív valósok halmaza, és $a * b = 5ab$. Csoport-e, ha az alaphalmaz a valós számok halmaza?
2. Bizonyítsa be, hogy ha a G csoportban minden egységelemtől különböző elem rendje ugyanaz, akkor ez a rend prímszám!
3. (14.1.1) Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számhoz található n elemű csoport!
4. (14.1.2) Bizonyítsuk be, hogy ha egy G csoportban minden elem rendje 2, akkor G kommutatív csoport!
5. (14.1.3) Legyen G kommutatív csoport és az $a, b \in G$ elemek rendje legyen $o(a) = n$, $o(b) = k$. Bizonyítsuk be, hogy $o(ab)$ osztja n és k legkisebb közös többszörösét!
6. (14.1.8) Bizonyítsuk be, hogy egy csoport akkor és csak akkor véges, ha részcsoportjainak a száma véges!
7. (14.1.11) Jelölje $(G_1, *)$ és $(G_2, *)$ a $(G, *)$ csoport két különböző részcsoportját. ($*$ a művelet) Igaz-e, hogy $(G_1 \cup G_2, *)$ is részcsoport?
8. (14.1.10) Tekintsünk egy páratlan rendű kommutatív csoportot, melyben a műveletet összeadásnak nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy az összes elem összege 0.
9. Bizonyítsuk be, hogy ciklikus csoport minden részcsoportja normálosztó!
10. Legyen G egy csoport, N normálosztó ($N \triangleleft G$), H pedig egy részcsoport G -ben ($H \leq G$). Bizonyítsa be, hogy NH részcsoport G -ben ($NH \leq G$)!
11. (13.2.1) Aliz és Béla telefonon keresztül sakkoznak. Ha a játszma függőben marad, és mondjuk Aliz következik, az utolsó lépést „borítékolnia” kell. (Ha nem tennék, akkor valamelyiküknek egy extra nap gondolkodási ideje lenne.) Hogyan lehet „borítékolni” telefonon keresztül? (Egyrészt Béla nem tudhatja másnapig, hogy mi a lépés. Másrészt Aliz közben rájöhetne, hogy mást kellett volna lépnie, ezért Béla másnap egy Aliztól kapott információval már „ki tudja nyitni” a borítékot.) (Segítség: Tetszőleges négyjegyű szám folytatható alkalmas 196 további jeggyel úgy, hogy egy 200 jegyű prímhez jussunk.)
12. (13.2.3) Fehérkém 5 titkos információval rendelkezik, amelyek közül az egyiket szívesen eladná Feketekémnek. Az információkat Fehérkém egy-egy borítékban tartja, mindre fel van írva, miről szól. Feketekém az egyik borítékot szívesen megvenné, de fél, hogy másnap Fehérkém már 6 borítékot árulna, az utolsót azzal a felirattal, hogy „Mi érdeklí Feketekémet?”. Ajánljunk nekik olyan eljárást, mellyel Feketekém hozzájut pontosan egy boríték tartalmához, de Fehérkém nem tudja, melyikhez!