Számítástudomány alapjai

7. gyakorlat – *Párosítások, színezések* – 2008. 10. 21.

`http://www.cs.bme.hu/~peresz/sza/`

1. (5/6) Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban van teljes párosítás, akkor bármely k független pontnak együtt legalább k szomszédja van!

2. (5/7) Tegyük fel, hogy a G gráf minden összefüggő komponense egy kör. Mi az a legkisebb m szám, amelyre teljesül, hogy G-hez hozzá lehet venni m élt úgy, hogy az új gráfban legyen teljes párosítás? Mikor létezik ilyen m szám?

3. (5/8) Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráf tetszőleges pontját elhagyva a kapott gráfnak létezik teljes párosítása. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a G gráfban nincs elvágó él, vagyis tetszőleges élt elhagyva a gráf továbbra is összefüggő marad!

4. (5/11) Bizonyítsuk be, hogy egy 3-reguláris, Hamilton kört tartalmazó egyszerű gráf élhalmaza előáll 3 diszjunkt teljes párosítás uniójaként!

5. (5/12) Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban létezik két különböző teljes párosítás, akkor létezik páros hosszú kör is!

6. (ZH, 2006) Tegyük fel, hogy a $G=(A,B;E)$ páros gráfban létezik A-t fedő párosítás, továbbá hogy minden A-t fedő párosítás tartalmazza az $ab \in E$ élt (ahol $a \in A$). Bizonyítsuk be, hogy létezik A-nak egy olyan a-t tartalmazó X részhalmaza, amire $|N_G(X)|=|X|$, és b egyedül a-val szomszédos az X-beli csúcsok között!

7. (5/18) Legyen a $G=(A,B,E)$ páros gráf d-reguláris ($d>0$). Igazoljuk, hogy $|A|=|B|$, és ha G egyszerű, akkor van benne $|A|$ független él!

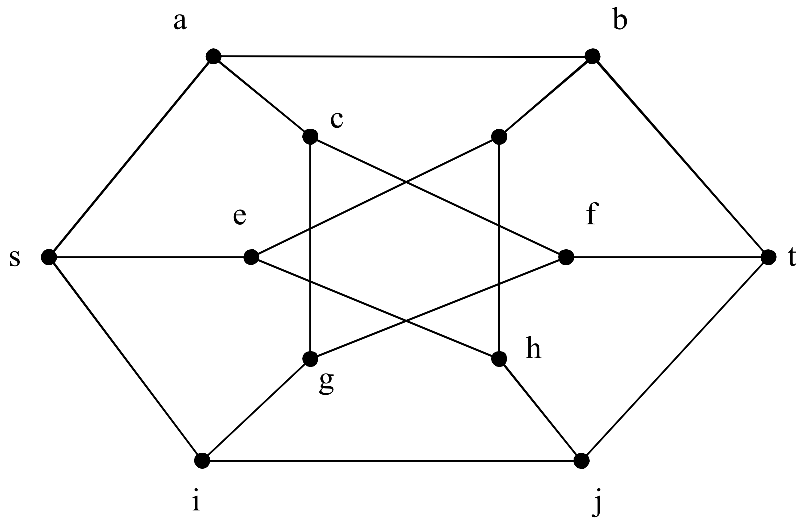
8. (5/19) Mutassuk meg, hogy egy d-reguláris, egyszerű páros gráf élhalmaza előáll, mint d darab teljes párosítás uniója!

9. (5/22 b.) Legyen G a 7. feladat gráfja. Ha elhagyunk valahogy $d-1$ élt, akkor a keletkező gráfnak lesz-e teljes párosítása?

10. (5/48) Igazoljuk, hogy az n pontú G páros gráfban $\alpha(G) \geq n/2$!

11. (5/49) Határozzuk meg $\alpha(G), \tau(G), \nu(G)$ és $\rho(G)$ értékét a K_n teljes gráfra!

12. (ZH, 2006) Határozzuk meg az alábbi G gráfra a következő paramétereket: $\alpha(G)$, $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$, $\chi(G)$, $\chi'(G)$!



13. (7/12) Bizonyítsuk be, hogy egy n csúcsú e élű reguláris G gráfra fennáll, hogy $\chi(G) \leq 1+2e/n$!

14. (7/4) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges egyszerű G gráfra $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$!

15. (7/6) Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq \tau(G) + 1$!

16. (7/7) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges egyszerű gráfra $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$!

17. (7/40) Legyen G 100-reguláris egyszerű gráf 2001 ponton. Határozzuk meg $\chi_e(G)$ értékét!

18. (7/45) Legyen G az a gráf, amit úgy kapunk, hogy egy 8 hosszúságú körben a másodszomszédos pontokat is összekötjük. (G-nek tehát 8 csúcsa és 16 éle van.) Perfekt-e G?