Számítástudomány alapjai

3. gyakorlat – *Euler- és Hamilton körök* – 2008. 09. 23.

http://www.cs.bme.hu/~peresz/sza/

Euler-bejárás

1. (2/4) Mely $n, m \geq 1$ esetén tartalmaz Euler-kört, illetve Euler-utat a $K_{n,m}$ teljes páros gráf?

2. (2/5) Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1,2,\ldots,100$ számok jelölik. Az i és a j csúcsok között pontosan akkor vezet él G-ben, ha $|i-j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Euler-kört, illetve Euler-utat?

3. (2/7) Van-e olyan egyszerű gráf, amely tartalmaz Euler-kört, páros sok pontja és páratlan sok éle van?

4. (2/8) Az alábbi állítások közül melyik igaz?

a. Ha G egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G-nek is van.

b. Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G-nek is van.

c. Ha G-ben van Euler-kör és G valamely körének éleit töröljük, akkor a maradék G' gráfban is van.

d. Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfban van Euler-út, akkor G-ben is van.

5. (2/14) Egy G hurokélmentes gráf minden csúcsának fokszáma négy. Mutassuk meg, hogy G éleit pirosra és kékre lehet színezni úgy, hogy minden csúcsra két piros és két kék él illeszkedjen!

6. (2/15) Bizonyítsuk be, hogy ha egy páros gráfban létezik Euler-kör, akkor a gráfnak páros sok éle van!

7. (2/17) Mutassuk meg, hogy tetszőleges összefüggő G gráf élei bejárhatók úgy egy élsorozat mentén, hogy minden élen pontosan kétszer haladjunk végig!

Hamilton-kör és Hamilton-út

8. (3/3) Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1,2,\ldots,100$ számok jelölik. Az i és a j csúcsok között pontosan akkor vezet él G-ben, ha $|i-j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Hamilton-kört, illetve Hamilton-utat?

9. (3/4) Az $n \geq 3$ csúcsú teljes gráf csúcsait jelöljük az $1,2,\ldots,n$ számokkal. A gráfból elhagytuk egy Hamilton-körét, melyben a csúcsok $1,2,\ldots,n$ sorrendben követik egymást. Mely n-ek esetén létezik a maradék gráfban Hamilton-kör? Ha létezik, adjunk is meg egyet!

10. * (3/6) Hány különböző Hamilton-köre van a G_n gráfnak, ha

a. G_n az n csúcsú K_n teljes gráfot jelöli, és $n \geq 3$;

b. G_n egy olyan gráf, melyhez K_n egy $\{x, y\}$ élének elhagyása révén jutunk és $n \geq 4$;

c. G_n a $2n$ csúcsú $K_{n,n}$ teljes páros gráfot jelöli és $n \geq 2$?

11. (3/7) Mutassuk meg, hogy páratlan n esetén nem lehet bejárni az $n \times n$ méretű sakktábla összes mezőjét egy huszárral úgy, hogy minden mezőn pontosan egyszer járjunk és visszatérjünk a kiinduló mezőre.

12. (3/10) Melyik igaz az alábbi állítások közül minden $n \geq 5$ esetén?

a. Létezik olyan n csúcsú egyszerű G gráf, hogy G és $\overline{G}$ is tartalmaz Hamilton-kört.

b. Létezik olyan n csúcsú egyszerű G gráf, hogy sem G sem $\overline{G}$ nem tartalmaz Hamilton-utat.

13. (3/12) Be lehet-e járni egy 3×5 méretű sakktábla összes mezőjét egy huszárral úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépjünk?

14. (3/20) Van-e olyan 6 csúcsú 3-reguláris egyszerű gráf, amelyben nincsen Hamilton-kör?

15. (3/21) A boltban vásároltunk 100 piros, 150 kék és 200 darab zöld színű gyöngyöt. Bizonyítsuk be, hogy lehet olyan nyakláncot készíteni az összes gyöngy felhasználásával, amelyben azonos színű gyöngyök nem kerülnek egymás mellé!

16. * (3/22) Tartalmaz-e Hamilton-kört a KG(6,3) illetve a KG(16,3) Kneser-gráf? (KG(n,k): n, k paraméterű Kneser-gráf; csúcsai egy n elemű halmaz k elemű részhalmazai, és két ilyen részhalmaz akkor alkot élt, ha diszjunktak.)