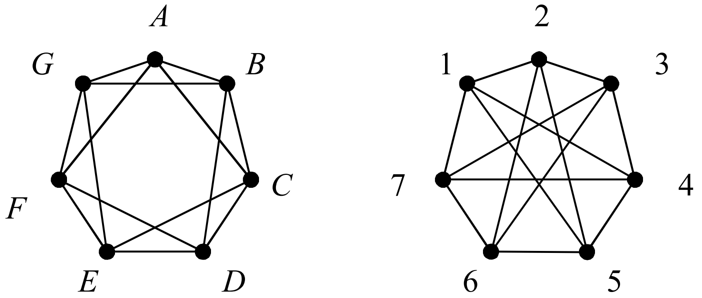
Számítástudomány alapjai

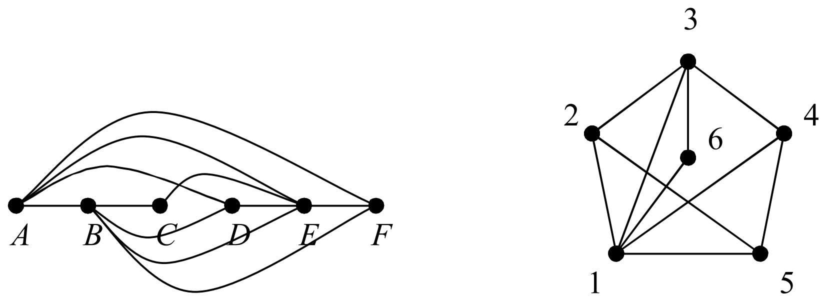
2. gyakorlat – *Gráfelméleti alapfogalmak, fák alaptulajdonságai, Prüfer-kód, Kruskal tétele* – 2008. 09. 16.

`http://www.cs.bme.hu/~peresz/sza/`

1. Jelölje $\varphi(n)$ az n számnál kisebb, n-hez relatív prím számok számát! Adjunk formulát $\varphi(n)$ értékének kiszámítására!
2. Hányféleképp választható ki 3 különböző szám az $1,2,\ldots,100$ számok közül úgy, hogy összegük 3-mal osztható legyen?
3. Izomorfizmus
   a. (1/1) Izomorfak-e az alábbi ábra gráfjai?



   b. (1/2) Izomorfak-e az alábbi ábra gráfjai?



   c. (1/6) Rajzolja fel az összes olyan nemizomorf 7 pontú fát, amelyben van negyedfokú pont!
   d. (1/7) Legyen $k \geq 7$. Hány darab olyan, páronként nemizomorf, k pontú fa van, amely tartalmaz $(k-3)$-adfokú pontot?
4. (1/17) Hány olyan egyszerű gráf van, melynek fokszámai rendre: 2, 3, 3, 4, 6, 6, 6?
5. (1/24) Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $n-3$!
6. (1/29) Jelöljünk ki a fában 4 elsőfokú pontot. Mutassuk meg, hogy ezek összepárosíthatók úgy, hogy a párok éldiszjunkt utakkal legyenek összekötve!
7. Cayley-tétel, Prüfer-kód
   a. (1/34) Egy n csúcsú fa Prüfer-kódja $n-1$ azonos számjegyből áll. Mi a fa, amit kódol és mi ez a szám? (Egy n csúcsú fa Prüfer-kódjába beleértjük annak $(n-1)$-edik elemét is.)
   b. (1/35) Egy F fa Prüfer-kódja csupa különböző számból áll. Hogyan jellemezhetjük F-et?

c. (1/36) Válasszuk meg x értékét úgy, hogy az alábbi sorozat egy olyan fa Prüfer-kódja legyen, amelyben minden pont fokszáma páratlan szám! Adjuk is meg ezt a fát! A sorozat: 1, 1, 5, x, 6, 6, 8.

8. (1/38) Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, amelynek legalább három elsőfokú csúcsa van?

9. (1/47) Hány minimális súlyú feszítőfája van annak az 1000 csúcsú teljes gráfnak, amelyben egy háromszög éleinek súlya 1, minden más él súlya 2? (A pontokat címkézettnek tekintjük.)

10. (1/48) Igaz-e a következő állítás? Ha egy $2n$ pontú egyszerű G gráfban minden pont foka legalább n, akkor G összefüggő.

11. (1/57) Mutassuk meg, hogy egy hurokmentes irányított gráf élhalmaza felbontható két diszjunkt részhalmazra úgy, hogy egyik sem tartalmaz irányított kört!

12. * (1/22) Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-re van olyan egyszerű, összefüggő, $2n$ csúcsú gráf, melynek minden $1 \le k \le n$ esetén pontosan két k fokszámú csúcsa van!

13. * (1/33) Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melyben a pontpárok távolságai közül a legnagyobb hárommal egyenlő?